528

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 27. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK.

ZWÖLFTE (SCHLUSS-) LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der siebenundzwanzigsten Lieferung:

also ist
$$\frac{\psi' \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{xy'^2 + xyy'' - yy'}{1 + y'^2 + yy''}.$$

Wird dies in 3. eingesetzt, so erhält man
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{-(x+yy')y}{1+y'^2+yy''}.$$

Hieraus und aus 2. folgt sofort
$$-\frac{1}{y'^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{1+y'^2+yy''}{y'(x+yy')}.$$

Da nun
$$\frac{d(x+yy')}{dy} = \frac{1}{y'} + y' + yy'' \cdot \frac{1}{y'},$$
so ist
$$-\frac{1}{y'^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{d}{dy} l(x+yy').$$

Hieraus folgt
$$G = \frac{1}{x+yy'}.$$

Man hat nun das Integral zu bestimmen
$$\int \frac{dy - y'\,dx}{y'(x+yy')} = C.$$

Man erhält zunächst
$$C = \int \frac{y\,dy + yy' \cdot d(yy')}{yy'(x+yy')} - \int \frac{dx + d(yy')}{x+yy'}$$
$$= -l(x+yy') + \frac{1}{2}\int \frac{d[y^2(1+y'^2)]}{yy'(x+yy')}.$$

Setzt man zur Abkürzung
$$y\sqrt{1+y'^2} = u,$$
so folgt hieraus
$$C = -l(x+yy') + \int \frac{u\,du}{yy'(x+yy')}.$$

Da nun
$$yy'(x+yy') \equiv u^2 + \frac{u(xy'-y)}{\sqrt{1+y'^2}},$$
so folgt aus 1.
$$yy'(x+yy') = u^2 + uf(u).$$

Daher hat man schliesslich

5. $$C = -l(x+yy') + \int \frac{du}{u+f(u)}.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ergiebt sich durch Elimination von y' aus 1. und 5.

34. Die Curve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Normale gefällte Loth eine gegebene Function des Radius vector ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

1. $$\varphi \equiv f(x^2+y^2) - \frac{x+yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Hieraus folgt
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yf' - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{xy'-y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus 1. ergiebt sich ferner durch Differentiation

$$2(x+yy')f' = \frac{d(x+yy')}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - (x+yy')\cdot\frac{y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher ist

$$2yf' = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy') - \frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun

$$\frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d(x+yy')}{dx},$$

$$= \frac{y'x+yy'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

so folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y'x}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -\frac{d}{dx}l(x+yy'),$$

$$F = \frac{1}{x^2+y'}.$$

Man hat daher das Integral

$$\int\frac{dy-y'dx}{x+yy'} = C.$$

Subtrahirt man hiervon

$$\int\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - arc\,tang\frac{y}{x} = 0,$$

so erhält man

$$arc\,tang\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{xy'-y}{x+yy'}\cdot\frac{d(r^2)}{r^2} = C, \quad r^2 = x^2+y^2.$$

Da nun, wie man sofort erhält,

$$\left(\frac{xy'-y}{x+yy'}\right)^2 + 1 = \frac{r^2(1+y'^2)}{(x+yy')^2},$$

so folgt mit Rücksicht auf die Differentialgleichung

$$\frac{xy'-y}{x+yy'} = \sqrt{\frac{r^2}{f(r^2)^2}-1}.$$

Daher hat man schliesslich für das allgemeine Integral

$$arc\,tang\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{r^2-f(r^2)^2}}{r^2f(r^2)}d(r^2) = C.\text{*})$$

35. **Integration durch unendliche Reihen.**

Aus der Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ gewinnt man durch Differentiation

$$y'' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_1(x,y),$$

1.
$$y''' = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \varphi_2(x,y),$$

$$y'''' = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \varphi_3(x,y),$$

u. s. w.,

so dass also y', y'', y''' bekannte Functionen von x und y sind. Diese Werthe

*) Weitere Beispiele findet man in dem citirten MALMSTEN'schen Aufsatze.

kann man dazu verwenden, y in eine TAYLOR'sche oder MACLAURIN'sche Reihe zu entwickeln. Wird einem Anfangswerthe x_0 eine beliebige Ordinate y_0 zugeordnet, so ist

2.
$$y = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\frac{x-x_0}{1} + \varphi_1(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Setzt man insbesondere $x_0 = 0$ und schreibt b für y_0, so erhält man

3.
$$y = b + \varphi(0, b)\cdot\frac{x}{1} + \varphi_1(0, b)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \varphi_2(0, b)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Nach Berechnung der Coefficienten $\varphi_k(x_0, y_0)$ hat man die Grenzen für die Convergenz festzustellen.

Die Entwicklung 3. wird man zumeist mit Vortheil nach der Methode der unbestimmten Coefficienten vornehmen; man setzt

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots$$

also

$$y' = A_1 + 2\cdot A_2x + 3\cdot A_3x^2 + \ldots\ldots,$$

substituirt beide Reihen in die Differentialgleichung und bestimmt die A_k so, dass dieselbe identisch erfüllt wird. Wenn eine der Functionen $\varphi_k(0, b)$ unendlich gross ist, so ist die Entwicklung nach der MACLAURIN'schen Reihe nicht zulässig; in diesem Falle wird man zur TAYLOR'schen Reihe greifen und x_0, y_0 so wählen, dass alle Functionen $\varphi_k(x_0, y_0)$ endlich sind.

Aus der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\varphi(x,y)}{x}$$

folgt $y' = \infty$ für $x = 0$, sobald $\varphi(x, y)$ für $x = 0$ nicht verschwindet. Man kann daher das Integral dieser Gleichung nicht nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickeln. Setzt man $x = 1 + \xi$, so erhält man

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\varphi(1+\xi, y)}{1+\xi}.$$

Wenn nun φ für $x = 1$ nicht unendlich gross ist, so kann man unter Umständen y in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ξ, d. i. in eine TAYLOR'sche Reihe nach steigenden Potenzen von $x - 1$ entwickeln.

36. Es kann der Fall eintreten, dass man nicht das allgemeine Integral, sondern nur ein particuläres erhält, wenn man nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickelt. So führt z. B. die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2x+y}{x(1+x+y)}$$

bei der Annahme

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$$

auf die Gleichung

$$(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots)[(A_0+1)x + (A_1+1)x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + \ldots]$$
$$= -A_0 - (A_1+2)x - A_2x^2 - A_3x^3 - A_4x^4 - \ldots.$$

Hieraus folgen die Werthe

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0,$$

also ergiebt sich das Integral

$$y = -x,$$

das nicht das allgemeine sein kann, da es keine willkürliche Constante enthält. Die Herstellung des allgemeinen Integrals hat keine Schwierigkeit, da man sich leicht überzeugt, dass die Differentialgleichung einen integrirenden Faktor hat, der eine Function von $x + y$ ist.

37. Die RICCATI'sche Differentialgleichung (No. 13).

1.
$$y' + by^2 = cx^m$$

wird, indem man by durch y ersetzt, in die Gleichung verwandelt

2.
$$y' + y^2 = \gamma x^m, \quad \gamma = cb.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich als Quotient zweier Potenzreihen herstellen. Macht man nämlich die Annahme $y = \psi(x):\varphi(x)$, indem man unter ψ und φ zwei Potenzreihen versteht, so erhält man aus 2.

$$\frac{\varphi\psi' - \psi\varphi' + \psi^2}{\varphi^2} = \gamma x^m.$$

Nimmt man $\psi = \varphi'$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\varphi'' = \gamma\varphi x^m.$$

Hierin ersetzen wir φ durch $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ und erhalten

$$1\cdot 2\cdot A_2 + 2\cdot 3 A_3 x + 3\cdot 4 A_4 x^2 + \dots = \gamma(A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \dots).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$A_2 = A_3 = A_4 = \dots = A_{m+1} = 0.$$
$$(m+1)(m+2)A_{m+2} = \gamma A_0, \quad (m+2)(m+3)A_{m+3} = \gamma A_1,$$
$$A_{m+4} = A_{m+5} = \dots = A_{2m+3} = 0,$$
$$(2m+3)(2m+4)A_{2m+4} = \gamma A_{m+2}, \quad (2m+4)(2m+5)A_{2m+5} = \gamma A_{m+3},$$
$$A_{2m+6} = A_{2m+7} = \dots = A_{3m+5} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Setzen wir abkürzungsweise

$$U = 1 + \frac{\gamma}{(m+1)(m+2)}x^{m+2} + \frac{\gamma^2}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)}x^{2m+4} + \dots$$

$$V = x + \frac{\gamma}{(m+2)(m+3)}x^{m+3} + \frac{\gamma^2}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)}x^{2m+5} + \dots,$$

so ergiebt sich

$$\varphi = A_0 U + A_1 V;$$

daher ist, wenn der willkürliche Quotient $A_1 : A_0$ mit c bezeichnet wird, das allgemeine Integral der Riccati'schen Gleichung

$$y = \frac{U' + cV'}{U + cV}.$$

38. Trajectorien. Eine Curvengleichung $\varphi(x, y, c) = 0$ enthalte eine willkürliche Constante c; giebt man derselben nach einander alle möglichen Werthe, so wird ein System von unendlich vielen Curven erzeugt. Eine Curve, welche alle diese Curven unter demselben Winkel schneidet, wird als Trajectorie des Curvensystems bezeichnet. Der einfachste Fall tritt ein, wenn die Trajectorie die Curven der Schaar orthogonal schneidet, eine Orthogonalcurve der Schaar ist.

Für irgend einen Punkt x, y der Curve

1. $$\varphi(x, y, c) = 0$$

bestimmt sich die Richtung der Tangente aus der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$

daher folgt für die diesen Punkt enthaltende Orthogonalcurve

2. $$y' = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Eliminirt man c aus den Gleichungen 1. und 2., so erhält man die Differentialgleichung der Orthogonalcurve; wie man sieht, ist dieselbe von der ersten Ordnung.

39. Für eine Orthogonalcurve von

$$y = \gamma x^m$$

ergiebt sich zunächst

$$y' = -\frac{1}{m\gamma x^{m-1}}.$$

Die Elimination von γ aus beiden Gleichungen führt zu

$$yy' + \frac{1}{m}x = 0;$$

hiervon ist das allgemeine Integral

$$\frac{1}{m}x^2 + y^2 = c.$$

Ist $m > 0$, so sind die gegebenen Curven parabolisch und die Orthogonalcurven Ellipsen; ist $m = 1$, so sind die gegebenen Curven Strahlen eines Büschels, dass den Nullpunkt zum Träger hat, und die Orthogonalcurven sind concentrische Kreise; ist $m < 0$, so sind die gegebenen Curven hyperbolisch und haben die Achsen zu Asymptoten, die Orthogonalcurven sind Hyperbeln; für $m = -1$ insbesondere bilden die gegebenen Curven sowohl, wie die Orthogonalcurven Büschel von gleichseitigen coaxialen Hyperbeln, die Achsen des einen Büschels sind die gemeinsamen Asymptoten des anderen.

40. Um die Orthogonalcurven der Kreise eines Büschels zu erhalten, legen wir die X-Achse durch die Centren, die Y-Achse in die Chordale des Büschels; die Gleichungen aller Büschelkreise sind dann von der Form

$$\varphi = (x-a)^2 + y^2 + b + 2\gamma x = 0$$

wobei γ von Kreis zu Kreis sich ändert. Für eine Orthogonalcurve hat man daher zunächst

$$y' = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{y}{x - a + \gamma}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von γ

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2 + b)\,dy = 0.$$

Hier ist
$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : M = \frac{2}{y},$$

folglich hat die Differentialgleichung einen integrirenden Faktor, der eine Function von y allein ist; er ergiebt sich aus der Gleichung $dF : F = -2dy : y$ zu $F = y^{-2}$.

Ferner bildet man

$$\lambda = \int\frac{M}{y^2}dx = \frac{x^2}{y},$$

$$Y = \frac{N}{y^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 1 + \frac{b}{y^2}, \quad \int Y dy = y - \frac{b}{y},$$

$$\lambda + \int Y dy = \frac{x^2 + y^2 - b}{y},$$

und erhält hieraus das allgemeine Integral der Differentialgleichung, wenn die willkürliche Constante mit $2c$ bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 + y^2 - b}{y} = 2c,$$

oder
$$x^2 + y^2 - b - 2cy = 0.$$

Dies bestätigt den in der analytischen Planimetrie entwickelten Satz, dass die Orthogonalcurven eines Kreisbüschels die Kreise eines Büschels sind, deren Centren auf der Chordale des gegebenen Büschels liegen und deren Chordale mit der Centralen desselben zusammenfällt.

41. Die Ellipsen

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

für welche, wenn h eine Constante bezeichnet,

2. $$a^2 - b^2 = h^2,$$

sind confocal; um die Differentialgleichung ihrer Orthogonalcurven zu erhalten, hat man a und b aus 1. und 2. und aus der Gleichung

$$y' = \frac{y}{b^2} : \frac{x}{a^2}$$

zu eliminiren; man erhält

3. $$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - h^2)y' - xy = 0.$$

Durch Einführung neuer Variabeln kann diese Gleichung wesentlich vereinfacht werden; setzt man nämlich $x^2 = s$, $y^2 = t$, so erhält man

$$st'^2 + (s - t - h^2)t' - t = 0, \quad \text{oder}$$

4. $$st' - t = h^2 \frac{t'}{t' + 1}.$$

Wird diese Gleichung differenzirt und $dt' : ds = t' \cdot dt' : dt$ gesetzt, so folgt

$$st' \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{h^2 t'}{(t'+1)^2} \cdot \frac{dt'}{dt}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei

5. $$t' = 0, \quad s = \left(\frac{h}{t'+1}\right)^2, \quad \frac{dt'}{dt} = 0.$$

Die erste liefert in 4. substituirt das particuläre Integral $t = 0$. Aus der zweiten und aus 4. eliminirt man t' und erhält

6. $$(h \pm x)^2 + y^2 = 0.$$

und diese Gleichung ist nur durch die beiden Brennpunkte $x = \pm h$, $y = 0$, der Schaar confocaler Ellipsen zu befriedigen. Die dritte der Gleichungen 5. führt zu

$$t' = c.$$

Wird dies in 4. substituirt, so erhält man

$$cx^2 - y^2 = \frac{h^2 c}{1 + c},$$

das allgemeine Integral von 3.; hieraus folgt, dass die Orthogonalcurven confocale Hyperbeln sind, was auch in der Differentialrechnung nachgewiesen worden ist. Zu bemerken ist noch, dass die Gleichung 6. der Differentialgleichung 3. genügt und daher das singuläre Integral derselben ist.

§ 25. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Eine Function φ von x und y enthalten n Constante $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Die Gleichung

1. $$\varphi(x, y, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0$$

wollen wir n mal differenziren; dadurch entstehen nach einander n Gleichungen von der Form

2. $$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, y';\ c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\varphi_2(x, y, y', y'';\ c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\varphi_3(x, y, y', y'', y''';\ c_1 \ldots c_n) = 0, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)};\ c_1 \ldots c_n) = 0. \end{aligned}$$

Eliminiren wir die n Grössen $c_1 \ldots c_n$ aus den $n + 1$ Gleichungen 1. und 2., so entsteht eine Resultante von der Form

3. $$F(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

also eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, — vorausgesetzt dass sich die Constanten nicht bereits aus 1. und aus den ersten k Gleichungen von 2. eliminiren lassen, in welchem Falle die resultirende Differentialgleichung nur von der $k$ten Ordnung sein würde. Wir schliessen daher: Wenn eine Gleichung zwischen

den Variabeln x und y n Constante enthält, so genügen die mit ihr vereinbaren Werthsysteme von $x, y, y', y'', y''' \ldots$ im Allgemeinen einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche diese Constanten nicht enthält.

Denkt man sich die Differentialgleichung 3. gegeben, so wird derselben durch die Gleichung 1. genügt unabhängig von den Werthen, die man den Constanten beilegen mag; wenn es sich also darum handelt, die Differentialgleichung zu integriren, d. i. aus ihr eine von Differentialquotienten freie Beziehung zwischen den Variabeln abzuleiten, so haben die c den Charakter von willkürlichen Constanten.

Beispiele. A. Die Gleichung

$$y = ae^x + be^{-x}$$

liefert durch zweimalige Differentiation

$$y'' = ae^x + be^{-x};$$

hieraus folgt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Aus der allgemeineren Gleichung

$$y = ae^{mx} + be^{nx},$$

folgen $$y' = mae^{mx} + nbe^{nx},$$

und $$y'' = m^2ae^{mx} + n^2be^{nx}.$$

Die erste und zweite Gleichung ergeben

$$y' - ny = (m - n)ae^{mx},$$

aus der zweiten und dritten folgt

$$y'' - ny' = m(m - n)ae^{mx},$$

daher ergiebt sich die von den Constanten a und b freie Differentialgleichung

$$y'' - (n + m)y' + mny = 0.$$

2. Unter dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung

1. $$f(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0$$

versteht man eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, dass jedes Werthsystem $x, y, y', \ldots y^{(n)}$, das der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, sowie die durch n aufeinanderfolgende Differentiationen daraus folgenden Gleichungen erfüllt

2. $$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, y') = 0, \\ &\varphi_2(x, y, y', y'') = 0, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0, \end{aligned}$$

und umgekehrt.

In der Differentialgleichung 1. kann man $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ganz willkürliche Werthe geben; alsdann ist der höchste Differentialquotient $y^{(n)}$ durch die Gleichung 1. bestimmt. Es müssen daher das allgemeine Integral und die daraus abgeleiteten Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \ldots \varphi_{(n-1)} = 0$$

so beschaffen sein, dass sie durch jedes willkürliche für die Grössen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ substituirte Werthsystem erfüllt werden können. Hieraus folgt, dass die Function φ n unbestimmte Constante $c_1, c_2 \ldots c_n$ enthalten muss, und zwar in solchen Verbindungen, dass durch geeignete Wahl dieser Constanten den angegebenen Bedingungen genügt werden kann. Wir erhalten hieraus: Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung enthält n willkürliche Constante.

Wenn eine Gleichung $\varphi = 0$ so beschaffen ist, dass alle Werthe von $x, y, y' \ldots y^{(n)}$, die den Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_n = 0$$

genügen, auch die Differentialgleichung erfüllen, φ aber nicht n willkürliche Constante enthält, so wird $\varphi = 0$ als ein particuläres Integral bezeichnet, wenn es aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung einiger Constanten hervorgeht; in jedem andern Falle wird es als singuläres Integral bezeichnet.

3. Eine Gleichung $\psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = 0$ wird als ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet, wenn jedes Werthsystem $x, y, y' \ldots y^{(n)}$, welches der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\psi = 0$ und die durch einmalige Differentiation daraus hervorgehende $\psi_1 = 0$ erfüllt. Aus dem Umstande, dass in der Differentialgleichung die Grössen $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$ beliebig gewählt werden können, folgt, dass die Function ψ eine willkürliche Constante enthalten muss. Ein allgemines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung enthält eine willkürliche Constante. Ausser den durch Specialisirung der Constanten aus einem allgemeinen ersten Integrale hervorgehenden kann es noch weitere erste Integrale $\psi = 0$ geben, so dass alle $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ befriedigenden Werthe von $x, y, \ldots y^{(n)}$ auch die Differentialgleichung erfüllen; diese werden als singuläre erste Integrale bezeichnet.

Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung ist eine Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung. Ein allgemeines erstes Integral dieser Gleichung wird als ein allgemeines zweites Integral der gegebenen Differentialgleichung bezeichnet u. s. f.; ein allgemeines zweites Integral enthält somit zwei, ein drittes drei Constante, u. s. w. Das allgemeine $n$te Integral enthält n Constante und keinen Differentialquotienten; es fällt mit dem bereits definirten allgemeinen Integrale zusammen.

Beispiele. A. Die Differentialgleichung

$$y'' - (m + n)y' + mn = 0$$

hat das allgemeine erste Integral

$$\psi = y' - ny - (m - n)ae^{mx} = 0;$$

denn durch Differentiation ergiebt sich

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\psi}{\partial y'}y'' = y'' - ny' - (m - n)\, mae^{mx} = 0,$$

und durch Elimination von a aus $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ folgt die Differentialgleichung. Dieselbe hat noch ein allgemeines erstes Integral, das sich aus No. 1, 3 und 4 durch Elimination von a ergiebt, nämlich

$$y' - my - (n - m)\,be^{nx} = 0.$$

Eliminirt man b aus dieser Gleichung und aus der durch Differentiation aus ihr hervorgehenden

$$y'' - my' - (n - m)\,nbe^{nx} = 0,$$

so erhält man ebenfalls die gegebene Differentialgleichung.

B. Die Differentialgleichung erster Ordnung

3. $$y - xy' = \gamma\sqrt{x},$$

in welcher γ als willkürliche Constante gilt, ist ein allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man durch Elimination von γ aus 3. und aus der durch Differentiation abgeleiteten Gleichung erhält

4. $$-xy'' = \frac{\gamma}{2\sqrt{x}},$$

also der Gleichung 5. $2x^2y'' - xy' + y = 0$.

Zu 3. gehört das allgemeine Integral (§ 24, No. 8)

6. $$y = cx + 2\gamma\sqrt{x};$$

diese Gleichung giebt nach x differenzirt

7. $$y' = c + \frac{\gamma}{\sqrt{x}}.$$

Eliminirt man γ aus 6. und 7., so folgt

8. $$2xy' - y = cx,$$

und diese Gleichung ist das andere allgemeine erste Integral von 5.

4. Eliminirt man aus dem allgemeinen Integrale $\varphi(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$ einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung und aus der durch einmalige Differentiation abgeleiteten Gleichung $\varphi_1 = 0$ eine Constante so erhält man eine Differentialgleichung I. O. mit $(n-1)$ Constanten; wie man sofort sieht, ist dieselbe ein allgemeines $(n-1)$tes Integral der gegebenen Gleichung. Da man nun jede der n Constanten eliminiren kann, so ist ersichtlich, dass man n allgemeine $(n-1)$te Integrale erhält.

Differenzirt man ein solches $(n-1)$tes Integral und eliminirt man aus dem Resultate und aus der ursprünglichen Gleichung eine weitere Constante, so erhält man ein allgemeines $(n-2)$tes Integral u. s. w.

Eliminirt man zwei Constante aus

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

erhält man ebenfalls ein allgemeines $(n-2)$tes Integral.

Man erkennt leicht, dass es nicht zwei verschiedene $(n-2)$te allgemeine Integrale geben kann, die dieselben $(n-2)$ willkürlichen Constanten enthalten. Denn gesetzt

$$\psi(x, y, y', y''\, c_1, c_2 \ldots c_{n-2}) = 0$$

und $$\chi(x, y, y', y'', c_1, c_2 \ldots c_{n-2}) = 0$$

wären wesentlich verschieden, so dass also eine dieser beiden Gleichungen nicht eine nothwendige Folge der andern wäre. Differenzirt man die erste Gleichung, so erhält man

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \ldots \frac{d^{n-3}\psi}{dx^{n-3}} = 0,$$

und diese $(n-2)$ Gleichungen enthalten die Grössen $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$. Fügt man hierzu noch die Gleichung $\chi = 0$, so kann man aus diesen $n - 1$ Gleichungen die c_k eliminiren, und behält eine Gleichung zwischen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ übrig, im Widerspruche damit, dass ein allgemeines $(n-2)$tes Integral durch jedes System von $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$ muss befriedigt werden können.

Man erhält somit dasselbe allgemeine $(n-2)$te Integral erstens, indem man c_i und c_k aus $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ eliminirt; zweitens, indem man c_i aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_i = 0$ differenzirt und c_k aus $\varphi_i = 0$ und $\varphi_i' = 0$ eliminirt; drittens, indem man c_k aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_k = 0$ differenzirt, und c_i aus $\varphi_k = 0$ und $\psi_k' = 0$ eliminirt.

Aehnlich, wie den Satz, dass es nicht zwei verschiedene allgemeine $(n-2)$te Integrale mit denselben $(n-2)$ willkürlichen Constanten giebt, beweist man, dass es nicht zwei $(n-k)$te Integrale mit denselben $(n-k)$ willkürlichen Constanten geben kann.

Hieraus schliessen wir weiter, dass es soviele $(n-k)$te verschiedene Integrale giebt, als sich die n willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals zu k gruppiren lassen; es giebt daher

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots k}$$

allgemeine $(n-k)$te Integrale.

Wenn man aus den allgemeinen n ersten Integralen die Grössen y', y'', y''' . . $y^{(n-1)}$ eliminirt, so erhält man eine von Differentialquotienten freie Gleichung zwischen x, y und n willkürlichen Constanten, also das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung $n$ter Ordnung.

5. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung lässt sich durch Reihenentwicklung nach dem Taylor'schen Satze erhalten. Wir denken uns die Differentialgleichung auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(n)}$ algebraisch reducirt und berechnen aus

1. $$y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)})$$

die höheren Differentialquotienten; indem wir bei jeder durch Differentiation erhaltenen neuen Gleichung den Werth für $y^{(n)}$ aus 1. substituiren, erhalten wir alle höheren Differentialquotienten als Functionen von x, y, y' . . . $y^{(n)}$; es ergiebt sich zunächst

2. $$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\cdot y^n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\cdot f(x, y, y' \ldots y^{(n)}). \\ &\equiv f_1(x, \ldots y^{(n)}).\end{aligned}$$

So fortfahrend findet man

3. $$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = f_2(x, \ldots y^{(n)}), \quad \frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}} = f_3(x, \ldots y^{(n)}), \ldots .$$

Nehmen wir nun die zu einem beliebigen Ausgangswerthe x_0 gehörigen Werthe der abhängigen Variabeln und ihrer Differentialquotienten bis zum $(n-1)$ten willkürlich an, so sind $y_0^{(n+1)}$, $y_0^{(n+2)}$ . . . . durch die Gleichungen 2. und 3. bestimmt. Werden die willkürlich angenommenen Werthe der Reihe nach mit α, β, γ, . . . π bezeichnet, so ergiebt sich schliesslich die gesuchte Entwicklung

4. $$\begin{aligned} y = \alpha + \beta(x-\alpha) + \frac{\gamma}{1\cdot 2}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{\pi}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}(x-\alpha)^{n-1} \\ + \frac{f(\alpha, \beta, \ldots)}{n!}\cdot(x-\alpha)^n + \frac{f_1(\alpha, \beta, \ldots)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ + \frac{f_2(\alpha, \beta, \ldots)}{(n+2)!}\cdot(x-\alpha)^{n+2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

6. Wir wenden uns nun zu den Regeln für die Bestimmung des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in den einfachsten Fällen.

A. Ist y'' eine Function von x allein, also

1. $$y'' = f(x),$$

so hat man sofort ein allgemeines erstes Integral

2. $$y' = \int f(x)\,dx + C$$

und hieraus das allgemeine Integral

3. $$y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C_1 .$$

Das andere allgemeine erste Integral folgt durch Elimination von C aus 2. und 3. zu

$$xy' - y = x\int f(x)\,dx - \int dx \int f(x)\,dx - C_1 .$$

B. Ist y'' eine Function von y allein, also

4. $$y'' = f(y),$$

so setze man

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy};$$

dadurch entsteht aus 4.

$$y'dy' = f(y)\,dy,$$

und hieraus folgt ein allgemeines erstes Integral

5. $$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C, \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}.$$

Hier lassen sich wieder die Variabeln sondern und man erhält

6. $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}} + C_1 .$$

C. Ist y'' eine Function von y' allein, so hat man

7. $$y'' = f(y').$$

Hieraus ergiebt sich

8. $$x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C,$$

und es erübrigt nun noch die Integration dieser Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann indess dieselbe umgehen, da man das andere allgemeine erste Integral bestimmen kann.

Setzt man in 7. $y'' = y'dy' : dy$, so erhält man

$$y'\,dy' = f(y')\,dy;$$

hieraus ergiebt sich

9. $$y = \int \frac{y'dy'}{f(y')} + C_1 .$$

Das allgemeine Integral von 7. erhält man nun durch Elimination von y' aus 8. und 9.

D. Enthält die Differentialgleichung nur y'', y' und x, also y nicht explicite, ist sie also von der Form

10. $$f(y'', y', x) = 0,$$

so bemerke man, dass $y'' = dy' : dx$; man erkennt nun, dass 9. eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und x ist. Die Integration derselben führt auf eine Gleichung von der Form

11. $$\varphi(y', x, C) = 0;$$

das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung erster Ordnung ist das allgemeine Integral von 10.

E. Enthält die Differentialgleichung nur y'', y' und y, also nicht x explicite, so hat sie die Form

12. $$f(y'', y', y) = 0.$$

Ersetzt man hier y'' durch $y'dy' : dy$, so ergiebt sich

$$f\left(y'\frac{dy'}{dy}, y', y\right) = 0,$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und y. Das allgemeine Integral derselben

13. $$\varphi(y', y, C) = 0$$

ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und x; das allgemeine Integral von 13. ist auch das allgemeine Integral von 12.

7. Geometrische Anwendungen. Die Aufgabe, eine Curve durch ihre Krümmungshalbmesser zu definiren, führt auf eine Differentialgleichung II. O.,

sobald der Krümmungshalbmesser als Function der Coordinaten, oder ausserdem als Function der Tangente, Normale, Subtangente oder Subnormale gegeben ist.

A. Eine Curve so zu bestimmen, dass der Krümmungshalbmesser in jedem Punkte proportional dem Cubus der Normale ist.

Aus den bekannten Formeln für den Krümmungshalbmesser ρ und die Normale ν

$$\rho = \sqrt{(1+y'^2)^3} : y'', \quad \nu = y\sqrt{1+y'^2}$$

folgt, wenn a ein constanter, gegebener Faktor ist, die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''} = a^2y^3\sqrt{(1+y'^2)^3},$$

oder einfacher

$$y'' = \frac{1}{a^2y^3};$$

daher ist

$$y'dy' = \frac{dy}{a^2y^3},$$

$$y'^2 = -\frac{1}{a^2y^2} + C, \quad y' = \frac{\sqrt{a^2Cy^2-1}}{ay}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$x = a\int\frac{ydy}{\sqrt{a^2Cy^2-1}} + C_1;$$

d. i.

$$x = \frac{1}{aC}\sqrt{a^2Cy^2-1} + C_1.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$-a^2C^2(x-C_1)^2 + a^2Cy^2 - 1 = 0,$$

so erkennt man, dass die Aenderung von C_1 nur auf eine Verschiebung der Y-Achse hinauskommt; von dem Vorzeichen von C hängt es ab, ob die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

B. Die Curve zu bestimmen, für welche der Krümmungshalbmesser proportional der Tangente ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{ay}{y'}\sqrt{1+y'^2},$$

oder

$$y'' = \frac{(1+y'^2)y'}{ay}.$$

Wir setzen hierin $y'' = y'dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{ay};$$

daher ist ein erstes allgemeines Integral

$$arc\,tang\,y' = lCy^{\frac{1}{a}}.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$x = \int\frac{dy}{tang(lCy^{\frac{1}{a}})} + C_1.$$

C. Der Krümmungshalbmesser sei proportional der Normalen.

Ist n ein constanter Faktor, so hat man jetzt

$$n\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2},$$

oder einfacher

$$n(1+y'^2) = yy''.$$

Hier setzen wir wieder $y'' = y'dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{y'dy'}{1+y'^2} = n\frac{dy}{y},$$

daher ergiebt sich ein erstes allgemeines Integral

$$\tfrac{1}{2}l(1+y'^2) = nl\left(\frac{y}{C}\right),$$

woraus folgt

$$y' = \frac{\sqrt{y^{2n}-C^{2n}}}{C^n},$$

$$x = C^n\int\frac{dy}{\sqrt{y^{2n}-C^{2n}}} + C_1.$$

Für $n = -1$ ergiebt sich ein Kreis, dessen Centrum auf der Abscissenachse liegt; für $n = 1$ eine Kettenlinie; für $n = -\frac{1}{2}$ eine Cycloide; für $n = \frac{1}{2}$ eine Parabel.

D. Soll der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function φ der Abscisse sein, so hat man

$$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = y''\varphi(x).$$

Hieraus folgt

$$\int\frac{dy'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \int\frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Die Integration links kann man ausführen und erhält

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int\frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

Wird das Integral rechts zur Abkürzung mit X bezeichnet, so ergiebt sich

$$y' = \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}},$$

und hieraus folgt schliesslich

$$y = \int\frac{(X+C)}{\sqrt{1-(X+C)^2}}dx + C_1\text{*}).$$

8. Lineare Differentialgleichungen. Unter einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung versteht man eine Gleichung von der Form

1. $$\frac{d^ny}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_ny = X,$$

wobei $X_1, X_2 \ldots X_n, X$ Functionen von x allein sind. Die Gleichung

2. $$\frac{d^ny}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_ny = 0,$$

die aus 1. hervorgeht, wenn man $X = 0$ setzt, wird als reducirte lineare Differentialgleichung bezeichnet. Wir betrachten diese zunächst. Für dieselben gilt folgender Satz:

Wenn eine reducirte lineare Differentialgleichung die particulären Integrale hat

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad y = y_3, \ldots y = y_k,$$

so wird ihr auch durch die Function genügt

3. $$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \ldots + c_ky_k,$$

wobei $c_1, c_2 \ldots c_k$ willkürliche Constante sind.

Denn setzt man 3. in 1. ein, und fasst die Glieder zusammen, die mit demselben c multiplicirt sind, so erhält man

*) Weitere Beispiele findet man u. A. in SCHLOEMILCH, Compendium, 1. Bd., Cap. XVIII.

$$\begin{aligned}&c_1(y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y'_1 + X_n y_1)\\ &+ c_2(y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y'_2 + X_n y_2)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ c_k(y_k^{(n)} + X_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y'_k + X_n y_k) = 0.\end{aligned}$$

Da nun $y_1, \ldots y_k$ der Gleichung 1. genügen, so verschwinden links alle Klammerausdrücke, also ist die Gleichung identisch erfüllt. Kennt man n particuläre Integrale und sind nicht zwei oder mehr durch eine Identität von der Form

$$y_1 = ay_2 + by_3 + cy_4 + \ldots$$

so ist

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \ldots + c_ny_n$$

das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung. Denn der gegebene Werth von y befriedigt die Gleichung und enthält n willkürliche Constante. Tritt hingegen der ausgeschlossene Fall ein, ist z. B. $y_1 = ay_2 + by_3$, so hat man

$$y = (a + c_1)y_2 + (b + c_2)y_3 + c_4y_4 + \ldots + c_ny_n,$$

und diese Function enthält nur $(n - 1)$ willkürliche Constante, nämlich $(a + c_1)$, $(b + c_2)$, c_4, $c_5 \ldots c_n$.

9. In die lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0$$

substituiren wir versuchsweise $y = e^{\lambda x}$, und erhalten

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n)e^{\lambda x} = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch erfüllt, sobald man für λ eine Wurzel der Gleichung nimmt

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, so erhält man n verschiedene particuläre Integrale

$$y = e^{\lambda_1 x}, \quad y = e^{\lambda_2 x}, \ldots y = e^{\lambda_n x};$$

daher ist das allgemeine Integral

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_ne^{\lambda_n x}.$$

Sind unter den Wurzeln λ conjugirt complexe, so ersetzt man die Exponentialfunctionen durch goniometrische. Die Methode versagt, wenn die Gleichung für λ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat; wir werden später sehen, wie man in diesem Falle das allgemeine Integral findet.

10. Der Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x}y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a^n}{x^n}y = 0$$

lässt sich durch die Annahme genügen $y = x^\mu$; man erhält durch Substitution dieses Werthes

$$[\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 1) + a_1\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n]x^{\mu-n} = 0,$$

hat also für μ eine Wurzel der Gleichung zu nehmen

$$\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 1) + a_1\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\mu_1, \ldots \mu_n$, so erhält man n particuläre Integrale und aus diesen das allgemeine

$$y = c_1x^{\mu_1} + c_2x^{\mu_2} + c_3x^{\mu_3} + \ldots + c_nx^{\mu_n}.$$

11. Kennt man ein particuläres Integral einer reducirten linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, so wird das allgemeine Integral aus einer Differentialgleichung $(n - 1)$ter Ordnung gefunden.

Ist $y = \eta$ das gegebene particuläre Integral, so ist auch $y = c\eta$ ein Integral, wenn c constant ist; es liegt nun nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen

man der Gleichung durch einen variabeln Werth von c genügen kann. Ersetzen wir c durch z, setzen also $y = z\eta$, so haben wir die höheren Differentialquotienten des Produkts $z\eta$ nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung zu bilden und diese entwickelten Werthe in die Differerentialgleichung einzusetzen. Wir erhalten dann eine Differentialgleichung, welche keinen höheren Differentialquotienten von z enthält als $z^{(n)}$. Die Glieder, welche z enthalten, sind

$$(\eta^{(n)} + X_1\eta^{(n-1)} + X_2\eta^{(n-2)} + \ldots + X_{n-1}\eta' + X_n\eta)z;$$

da nun η ein particuläres Integral ist, so verschwindet der Klammerinhalt, und die Differentialgleichung für z ist somit von der Form

$$z^{(n)} + Pz^{(n-1)} + Qz^{(n-2)} + \ldots + Tz'' + Uz' = 0.$$

Setzt man hier

$$\frac{dz}{dx} = v, \quad \text{also} \quad z = \int v\,dx,$$

so erhält man für v die Gleichung

$$v^{(n-1)} + Pv^{(n-2)} + Qv^{(n-3)} + \ldots + Tv' + Uv = 0,$$

also in der That eine Differentialgleichung $(n - 1)$ter Ordnung.

Hat man das allgemeine Integral dieser Gleichung, so wird zu den $(n - 1)$ willkürlichen Constanten desselben durch die Integration

$$z = \int v\,dx$$

noch eine hinzugefügt, und es ist daher

$$y = z\eta$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

12. Dieser Satz führt zunächst dazu, eine reducirte lineare Differentialgleichung II. O. von der Form No. 9 oder No. 10 allgemein zu integriren, wenn die Gleichungen für λ und μ gleiche Wurzeln haben.

Bei der Gleichung

1. $$y'' - 2ay' + a^2y = 0$$

ergiebt die Substitution $y = e^{\lambda x}$ für λ die Gleichung

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0,$$

also zwei zusammenfallende Wurzeln $\lambda = a$. Macht man nun in 1. die Substitution

$$y = ze^{ax},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$z'' = 0, \quad \text{also} \quad z = C_1x + C.$$

Folglich ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = e^{ax}(C_1x + C).$$

Setzt man ferner in die Gleichung

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

$y = \mu x$, so erhält man für μ

$$\mu^2 - (1 - a)\mu + \frac{(1-a)^2}{4} = 0, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{1-a}{2}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, haben wir zu setzen

$$y = zx^{\frac{1-a}{2}}$$

und erhalten

$$z' \cdot x^{-\frac{a+1}{2}} + z'' \cdot x^{\frac{1-a}{2}} = 0, \quad \text{oder} \quad z' + xz'' = 0.$$

Hieraus folgt $v = C : x$ und $z = Clx + C_1$; daher ist

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}(Clx + C_1)$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

13. Hat bei der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_3 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

die Gleichung für λ

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

r gleiche Wurzeln $\lambda = \nu$, so liegt es nahe, von dem für Gleichungen zweiter Ordnung erhaltenen Resultate ausgehend zu vermuthen, dass der gegebenen Gleichung durch die Annahme genügt werde

1. $$y = e^{\nu x}(cx^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1}),$$

wobei $c, c_1, c_2 \ldots c_{r-1}$ willkürliche Constante sind.

Um die Richtigkeit dieser Vermuthung nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Function $f(\lambda) = 0$ den Faktor $(\lambda - \nu)^r$ enthält, alsdann in der Function $f'(\lambda) = 0$ der Faktor $(\lambda - \lambda)^{r-1}$ enthalten ist; denn aus der Voraussetzung

$$f(\lambda) = (\lambda - \nu)^r \cdot \varphi(\lambda)$$

folgt
$$f'(\lambda) = r(\lambda - \nu)^{r-1} \cdot \varphi(\lambda) + (\lambda - \nu)^r \varphi'(\lambda).$$

Wenn daher ν eine $r$fache Wurzel der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

ist, so sind für $\lambda = \nu$ auch die Gleichungen erfüllt

$$f'(\lambda) = 0, \quad f''(\lambda) = 0, \quad f^{(r-1)}(\lambda) = 0.$$

Setzt man

$$cx^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1} \equiv \varphi,$$

so erhält man

$$e^{-\nu x} y^{(k)} = \nu^k \varphi + \binom{k}{1} \nu^{k-1} \varphi' + \binom{k}{2} \nu^{k-2} \varphi'' + \ldots.$$

Substituirt diese für $k = n, n - 1, n - 2, \ldots 2, 1$ gebildeten Werthe in die Differentialgleichung und unterdrückt den Faktor $e^{\nu k}$, so erhält man

$$\begin{aligned}0 &= \varphi \cdot (\nu^n + a_1 \nu^{n-1} + a_2 \nu^{n-2} + \ldots) \\ &+ \varphi' \cdot \left[\binom{n}{1} \nu^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 \nu^{n-2} + \binom{n-2}{1} a_2 \nu^{n-3} + \ldots\right] \\ &+ \varphi'' \cdot \left[\binom{n}{2} \nu^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 \nu^{n-3} + \binom{n-2}{2} a_2 \nu^{n-4} + \ldots\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Die Faktoren von $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$ sind der Reihe nach

$$f(\nu), \quad \frac{f'(\nu)}{1}, \quad \frac{f''(\nu)}{1 \cdot 2}, \quad \ldots\ldots$$

verschwinden daher sämmtlich; folglich ist 1. ein Integral der Differentialgleichung.

14. Der linearen Gleichung zweiter Ordnung

1. $$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

suchen wir durch eine Potenzreihe zu genügen; setzen wir

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

also
$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots,$$
$$y'' = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4 \cdot A_4 x^2 + \ldots,$$

so erhalten wir

$$\frac{2A_1}{x} + 2 \cdot 3A_2 + k^2 A_0 + (3 \cdot 4A_3 + k^2 A_1)x + (4 \cdot 5A_4 + k^2 A_2)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + [n(n+1)A_n + k^2 A_{n-2}]x^{n-2} + \ldots \equiv 0.$$

Hieraus ergeben sich

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A_0 \ldots,$$

allgemein
$$A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n} = \pm \frac{k^{2n}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)} A_0.$$

Daher ist

$$y = A_0 \left(1 - \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots\right) = \frac{A_0}{k} \cdot \frac{\sin kx}{x}.$$

Dieses Integral ist particulär, da es nur eine willkürliche Constante enthält. Substituirt man in 1.

$$y = z \cdot \frac{\sin kx}{x},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$\frac{\sin kx}{x} \cdot z'' + 2 \cdot \frac{k \cos kx}{x} \cdot z' = 0,$$

Diese Differentialgleichung ergiebt

$$z' = \frac{C_1}{\sin^2 kx}, \quad z = -\frac{C_1 \cot kx}{k} + C_2.$$

Ersetzt man hier C_1 durch $-kC_1$, so erhält man für das allgemeine Integral von 1.

$$y = \frac{C_1 \cos kx + C_2 \sin kx}{x}.$$

15. Ersetzen wir in der Gleichung

2. $$y'' - (x^2 + 3)y = 0$$

y durch die Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$, so erhalten wir das allgemeine Integral

$$y = A_0 \left(1 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{24} x^4 + \frac{23}{240} x^6 + \ldots\right)$$
$$+ A_1 \left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots\right).$$

In der zweiten eingeklammerten Reihe ist das Bildungsgesetz der Coefficienten zwar nicht allgemein nachgewiesen, nach den ersten vier Gliedern scheint es aber, als sei diese Reihe

$$x\left[1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right] = xe^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Um diese Vermuthung zu prüfen, setzen wir

$$y = xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

in die gegebene Differentialgleichung; wir finden leicht, dass derselben genügt wird; mithin haben wir ein particuläres Integral gefunden. Zur Bestimmung des allgemeinen setzen wir

$$xe^{\frac{1}{2}x^2} \cdot z'' + 2\frac{d}{dx}(xe^{\frac{1}{2}x^2})z' = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$z' = \frac{C}{x^2} e^{-x^2}, \quad z = C_1 + C\int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx,$$

also ist das allgemeine Integral von 2.

$$y = xe^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_1 + C\int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx\right).^{*)}$$

16. Wir wenden uns nun zur Integration einer linearen Differentialgleichung, die nicht reducirt ist; die Integrationsmethode wollen wir zunächst an der Differentialgleichung II. O. zeigen.

*) SCHLOEMILCH, Compendium, Bd. I, § 114.

Um das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y'' + X_1 y' + X_2 y = X$$

zu finden, liegt es nahe, zunächst die reducirte Gleichung zu integriren

2. $$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0,$$

und dann zu versuchen, ob man der Gleichung 1. vielleicht dadurch genügen kann, dass man in dem allgemeinen Integrale von 2.

3. $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

die willkürlichen Constanten durch passend gewählte Functionen von x ersetzt. Diese Methode, das Integral einer Gleichung aus dem Integral einer einfacheren herzustellen, wird als Variation der Constanten bezeichnet; wir haben von derselben bereits in § 24 No. 8 und § 25 No. 11 Gebrauch gemacht.

Setzen wir nun in 1.

4. $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

wobei also y_1 und y_2 bekannte Functionen sind, welche den Gleichungen genügen

5. $$y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2 = 0,$$

so erhalten wir zunächst

6. $$u_1(y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1) + u_2(y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2) + X_1(u_1' y_1 + u_2' y_2) + 2(u_1' y_1' + u_2' y_2') + u_1'' y_1 + u_2'' y_2 = X.$$

Die erste Zeile verschwindet nach der Voraussetzung. Machen wir nun für u_1 und u_2 die Annahme

7. $$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0,$$

so folgt zunächst durch Differentiation dieser Gleichung

8. $$u_1' y_1' + u_2' y_2' = -(u_1'' y_1 + u_2'' y_2).$$

Durch 7. und 8. reducirt sich 6. auf

9. $$u_1' y_1' + u_2' y_2' = X.$$

Aus 7. und 9. folgen nun für u_1' und u_2' die Werthe

$$u_1' = \frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'}, \quad u_2' = \frac{X y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}.$$

Daher ergiebt sich

$$u_1 = \int \frac{X y_2\, dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + C_1, \quad u_2 = \int \frac{X y_1\, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_2.$$

Das allgemeine Integral der nicht reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist daher

10. $$y = y_1 \int \frac{X y_2\, dx}{y_2 y_1' - y_2 y_2'} + y_2 \int \frac{X y_1\, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Hieraus ist der auch direkt leicht erweisliche Satz ersichtlich: Das allgemeine Integral einer nicht reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird erhalten, indem man zu einem particulären Integrale das allgemeine Integral der entsprechenden reducirten Gleichung fügt.

Bei der Verwendung der Formel 10. wird man unter Umständen mit Vortheil berücksichtigen, dass

$$\frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} = X : y_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right), \quad \frac{X y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = X : y_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Beispiele. A. Die reducirte Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

hat bekanntlich die particulären Integrale

$$y_1 = \frac{\cos kx}{x}, \quad y_2 = \frac{\sin kx}{x};$$

daher hat die Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = \frac{\cos kx}{x}\left(C_1 - \frac{1}{k}\int X \sin kx\, dx\right) + \frac{\sin kx}{x}\left(C_2 + \frac{1}{k}\int X \cos kx\, dx\right).$$

B. Für die Gleichung

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = 0$$

haben wir die particulären Integrale

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3;$$

daher ergiebt sich für

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = x^2(C_1 - \int x X dx) + x^3(C_2 + \int x^2 X dx).$$

17. Um das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = X$$

zu erhalten, setzen wir voraus, es sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

und suchen nun $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ als Functionen von x so zu bestimmen, dass

2. $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$$

das allgemeine Integral von 1. wird.

Wenn man den Werth 2. und die daraus folgenden Werthe $y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$ in 1. substituirt, so erhält man eine Gleichung für die n unbestimmten Functionen u_k; um dieselben zu bestimmen, kann man daher noch $(n - 1)$ Gleichungen beliebig annehmen. Wir wählen diese Gleichungen so, dass in den Werthen $y', y'', y''' \ldots y^{(n-1)}$ keine Differentialquotienten der u_k vorkommen; alsdann enthält die Differentialgleichung nur die ersten Differentialquotienten dieser Functionen und die Bestimmung derselben wird dadurch thunlichst erleichtert. Aus y folgt zunächst

$$y' = u_1 y_1' + \ldots + u_n y_n' + u_1' y_1 + \ldots + u_n' y_n.$$

Um Differentialquotienten der u in y' zu vermeiden, setzen wir

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' = 0,$$

und erhalten unter dieser Voraussetzung

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots + u_n y_n'.$$

Ferner setzen wir

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' = 0,$$

und erhalten dadurch

$$y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_n y_n''.$$

So weiter gehend, erhalten wir schliesslich

$$y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} u_n' = 0,$$
$$y^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n y_n^{(n-1)}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$y^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)} + y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n'.$$

Setzt man nun diese Werthe für $y, y', y'' \ldots y^{(n)}$ in die Differentialgleichung ein und berücksichtigt, dass $y_1, y_2, \ldots y_n$ der reducirten Differentialgleichung genügen, so erhält man

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' = X.$$

Für die Unbekannten $u_1, u_2 \ldots u_n$ haben wir somit die n Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1\, u_1' + y_2\, u_2' + \ldots + y_n\, u_n' &= 0, \\ y_1'\, u_1' + y_2'\, u_2' + \ldots + y_n'\, u_n' &= 0, \\ y_1''u_1' + y_2''u_2' + \ldots + y_n''u_n' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}u_1' + y_2^{(n-2)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)}u_n' &= 0, \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' &= X. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear für $u_1', u_2' \ldots u_n'$; löst man sie auf, so erhält man $\quad u_1' = \chi_1, \quad u_2' = \chi_2, \quad u_3' = \chi_3 \ldots u_n' = \chi_n,$ wobei $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ bekannte Functionen von x sind. Hieraus folgt

$$u_1 = \int\chi_1 dx + C_1, \quad u_2 = \int\chi_2 dx + C_2, \ldots u_n = \int\chi_n dx + C_n;$$

daher ist schliesslich das gesuchte allgemeine Integral

$$y = y_1 \int\chi_1 dx + \ldots + y_n \int\chi_n dx + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Man ersieht hieraus noch: Das allgemeine Integral einer nicht reducirten linearen Differentialgleichung wird aus einem particulären Integrale gefunden, indem man zu diesem das allgemeine Integral der entsprechenden reducirten Gleichung fügt.

18. Ueberblickt man die soeben vollendete Rechnung, so erkennt man leicht, dass derselbe Gedankengang auch dann förderlich sein wird; wenn man nicht das allgemeine Integral der reducirten Gleichung kennt, sondern nur eine beschränkte Anzahl von particulären Integralen. Sind r particuläre Integrale y_1. $y_2, y_3 \ldots y_r$ bekannt, zwischen denen keine linearen Indentitäten bestehen, so setzen wir das allgemeine Integral der nicht reducirten Gleichung

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_r y_r.$$

Wir bilden nun die entsprechenden Bedingungsgleichungen für die u_1 wie im vorigen Falle; da wir aber nur u_r unbekannte Functionen haben, so dürfen wir ausser der Differentialgleichung nur $(r-1)$ Gleichungen ansetzen. Dieselben seien

$$\begin{aligned} y_1\, u_1' + y_2\, u_2' + \ldots + y_1\, u_r' &= 0, \\ y_1'\, u_1' + y_2\, u_2' + \ldots + y_r'\, u_r' &= 0, \\ y_1''u_1' + y_2''u_2' + \ldots + y_r''\, u_r' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(r-2)}u_1' + y_2^{(r-2)}u_2' + \ldots + y_r^{(r-2)}u_r' &= 0. \end{aligned} \tag{1.}$$

Alsdann ergiebt sich

$$\begin{aligned} y' &= u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots + u_r y_r', \\ y'' &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_r y_r'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(r-1)} &= u_1 y_1^{(r-1)} + u_2 y_2^{(r-1)} + \ldots + u_r y_r^{(r-1)}, \end{aligned} \tag{2.}$$

sowie ferner

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= u_1 y_1^{(r)} + u_2 y_2^{(r)} + \ldots + u_r y_r^{(r)} \\ &\quad + u_1' y_1^{(r-1)} + u_2' y_2^{(r-1)} + \ldots + u_r' y_r^{(r-1)}, \\ y^{(r+1)} &= \Sigma u_k y_k^{(r+1)} + 2\Sigma u_k' y_k^{(r)} + \Sigma u_k'' y_k^{(r-1)}, \\ y^{(r+2)} &= \Sigma u_k y_k^{(r+2)} + 3\Sigma u_k' y_k^{(r+1)} + 3\Sigma u_k'' y_k^{r} + \Sigma u_k''' y_k^{(r-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= \Sigma u_k y_k^{(n)} + \binom{n-r+1}{1}\Sigma u_k' y_k^{(n-1)} + \binom{n-r+1}{2}\Sigma u_k'' y_k^{(n-2)} + \ldots \\ &\quad \ldots + \Sigma u_k^{(n-r+1)} y_k^{(r-1)}. \end{aligned}$$

Führen wir diese Werthe in die Differentialgleichung ein und beachten dabei, dass $y_1, y_2, \ldots y_r$ der reducirten Gleichung genügen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Sigma P_k u_k' + \Sigma Q_k u_k'' + \ldots + \Sigma V_k u_k^{(n-r+1)} = X, \tag{3.}$$

worin die $P_k, Q_k, \ldots\ldots V_k$ bekannte Functionen von x sind. Aus den $(r-1)$ Bedingungsgleichungen 1. können wir die Verhältnisse der $u_1', u_2' \ldots u_r'$ finden; drücken wir $u_2' \ldots u_r'$ durch u_1' aus, so erhalten wir

$$u_2' = Au_1', \quad u_3' = Bu_1' \ldots u_r' = Nu_1' \tag{5.}$$

wo nun $A, B, \ldots N$ bekannt sind. Diese Gleichungen differenziren wir $(n-r)$ mal und setzen die Resultate in 4. ein. Dadurch entsteht eine Differentialgleichung, die nur u_1 enthält und von der Form ist

$$\alpha u^{(n+r-1)} + \beta u^{(n+r-2)} + \ldots + \nu u' = X,$$

worin $\alpha, \beta, \ldots \nu$ bekannte Functionen von x sind.

Dies ist eine nichtreducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung für den Differentialquotienten u'. Wir erhalten somit: Wenn man r particuläre durch keine lineare Identität verbundene Integrale der Differentialgleichung kennt

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_n y = 0,$$

so hat man zur Bestimmung des allgemeinen Integrals dieser Gleichung eine reducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung aufzulösen und dann noch ein einfaches Integral zu berechnen; zur Bestimmung des allgemeinen Integrals der nicht reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_n y = X,$$

hat man die Differentialgleichung $(n-r)$ter Ordnung zu integriren, die aus der des reducirten Problems hervorgeht, wenn man auf der rechten Seite X statt 0 setzt, und dann ebenfalls noch ein einfaches Integral auszuführen.

---

19. Die Methode, an Stelle einer gegebenen Differentialgleichung eine einfachere aufzulösen, und aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung das der gegebenen dadurch abzuleiten, dass man an die Stelle einer oder mehrerer Constanten geeignet gewählte Functionen der Variabeln setzt, lässt sich auch in andern Fällen, als in den schon bekannten, mit gutem Erfolge anwenden.

Um zu dem allgemeinen Integrale der Gleichung

$$y'' + Xy' + Yy'^2 = 0 \tag{1.}$$

zu gelangen, in welcher X und Y Functionen von x bez. y allein sind, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$y'' + Xy' = 0, \tag{2.}$$

zu der wir leicht ein erstes Integral finden

$$y' = Ce^{-\int X dx}. \tag{3.}$$

Wir versuchen nun, z als Function von x so zu bestimmen, dass

$$y' = ze^{-\int X dx} \tag{4.}$$

ein allgemeines erstes Integral von 1. wird. Aus 4. folgt durch Differentiation

$$y'' = e^{-\int X dx}(-zX + z'); \tag{5.}$$

substituirt man 4. und 5. in 1., so ergiebt sich

$$z' + Yz^2 e^{-\int X dx} = 0.$$

Ersetzt man hier z' durch $y'dz:dy$, so erhält man in Rücksicht auf 4.

$$\left(\frac{dz}{dy} + Yz\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dy} + Yz = 0, \quad \text{also} \quad z = Ce^{-\int Ydy}.$$

Führt man dies in 4. ein, so entsteht zunächst

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int Ydy} \cdot e^{-\int Xdx}.$$

In dieser Differentialgleichung I. O. kann man die Variabeln trennen und erhält das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung

$$\int e^{\int Ydy} dy = C\int e^{-\int Xdx} dx + C_1.$$

20. An Stelle der Gleichung

1. $$(1-x^2)y'' - 2xy' + Xy'^3 = 0,$$

worin X nur x enthält, untersuchen wir zunächst die einfachere

2. $$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0;$$

diese hat das erste Integral

3. $$y' = \frac{C}{1-x^2}.$$

Setzen wir nun in 1.

$$y' = \frac{z}{1-x^2}, \quad \text{also} \quad y'' = \frac{2xz}{(1-x^2)^2} + \frac{z'}{1-x^2},$$

so erhalten wir

$$z' + X \cdot \frac{z^3}{(1-x^2)^3} = 0.$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$\frac{1}{z^2} = 2\int \frac{Xdx}{(1-x^2)^3} + C,$$

und daher schliesslich das allgemeine Integral von 1.

$$y = \int \frac{zdx}{1-x^2} + C_1.$$

21. Die soeben behandelte Gleichung ist ein besonderer Fall von

$$y'' + X_0 y' + X_1 y'^n = 0$$

Ein allgemeines erstes Integral von

$$y'' + X_0 y' = 0$$

ist

$$y' = Ce^{-\int X_0 dx}.$$

Sucht man nun der gegebenen Gleichung durch das erste Integral zu genügen

$$y' = ze^{-\int X_0 dx},$$

so erhält man zur Bestimmung von z die Gleichung

$$z' + X_1 z^n e^{-(n-1)\int X_0 dx} = 0.$$

Hieraus folgt, sobald n von $+1$ verschieden ist,

$$\frac{1}{n-1} z^{-n+1} = \int X_1 e^{-(n-1)\int X_0 dx} dx + C.$$

Führt man den hieraus folgenden Werth von z in y' ein, so erhält man y' als Function von x, und gewinnt y durch nochmalige Integration.

22. Das allgemeine Integral der Gleichung

1. $$y'' + Y_0 y'^2 + Y_1 y'^n = 0,$$

worin Y_0 und Y_1 Functionen von y allein sind, wird aus einem allgemeinen ersten Integrale der Gleichung gefunden

$$y'' + Y_0 y'^2 = 0.$$

Ersetzt man y'' durch $y'dy':dy$, so erhält man hieraus

$$\frac{dy'}{y'} = -Y_0 dy$$

und hieraus

$$y' = Ce^{-\int Y_0 dy}.$$

Wir suchen nun der gegebenen Gleichung durch

2. $$y' = ze^{-\int Y_0 dy}$$

zu genügen, worin z eine Function von y allein bedeute. Bildet man unter dieser Voraussetzung

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy} = ze^v\left(e^v\frac{dz}{dy} - Y_0 ze^v\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$v = -\int Y_0 dy$$

gesetzt worden ist, so erhält man aus 1.

$$ze^{2v}\frac{dz}{dy} + Y_1 z^n e^{nv} = 0.$$

Hieraus folgt

3. $$\frac{dz}{z^{n-1}} + Y_1 e^{(n-2)v} dy = 0,$$

worin die Variabeln gesondert sind. Hat man hieraus z als Function von y erhalten, so giebt 2. durch eine Integration x als Function von y. Die beiden Constanten treten bei der Integration der Gleichungen 3. und 2. ein.

23. Mitunter gelingt es, durch Einführung von ein oder zwei neuen Variabeln eine Differentialgleichung in eine einfachere überzuführen. Die Gleichung

1. $$y'' = a^2 x - b^2 y$$

lässt sich als nicht reducirte lineare Gleichung integriren; noch rascher kommt man zum Ziele, wenn man setzt

$a^2 x - b^2 y = t$, also $-b^2 y'' = t''$. Dadurch erhält man aus 1.

$$t'' = -b^2 t;$$

das allgemeine Integral hiervon ist

$$t = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx,$$

daher ist das allgemeine Integral von 1.

$$a^2 x - b^2 y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx^*).$$

§ 26. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln. Bestimmte Systeme.

1. Aus der Gleichung zwischen drei Variabeln

1. $$f(x, y, z) = c,$$

worin c eine willkürliche Constante bezeichnet, folgt durch Differentiation

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Diese Gleichung hat man sich durch eine der verschwindenden Grössen dx,

---

*) Weitere Ausführungen siehe LACROIX. Traité du calcul differential et du calcul intégral, Paris 1800, 2. vol. Auf die Theorie der singulären Integrale von Gleichungen höherer Ordnung einzugehen, müssen wir uns versagen; man vergl. LACROIX, Traité, 2. vol. No. 667. BOOLE, A Treatise on differential equations, 4. ed. 1. vol. Ch. X.

dy, dz dividirt zu denken, so dass an die Stelle verschwindender Faktoren Quotienten treten, die einen bestimmten Grenzwerth haben.

Ist umgekehrt eine Gleichung gegeben

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0\,,$$

worin P, Q, R Functionen von x, y, z bezeichnen, so fragt es sich, ob dieselbe ein Integral von der Form

$$f(x, y, z) = c$$

hat, und wie dieselbe gefunden werden kann.

2. Sollen alle Werthsysteme von x, y, z, welche die Differentialgleichung erfüllen

1. $$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

der Gleichung genügen

2. $$f(x, y, z) = c\,,$$

so muss 1. mit der durch Differentiation aus 2. genommenen

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0$$

übereinstimmen; es muss daher einen Faktor v geben, für welchen

3. $$vP = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad vR = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Berechnet man $\partial^2 f : \partial x \partial y$ aus der ersten und zweiten Gleichung, $\partial^2 f : \partial y \partial z$ aus der zweiten und dritten, $\partial^2 f : \partial z \partial x$ aus der dritten und ersten und setzt die erhaltenen Werthe einander gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$v\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\,\frac{\partial v}{\partial y} - Q\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,,$$

$$v\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\,\frac{\partial v}{\partial z} - R\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0\,,$$

$$v\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\,\frac{\partial v}{\partial x} - P\,\frac{\partial v}{\partial z} = 0\,.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit R, die zweite mit P, die dritte mit Q und addirt, so erhält man nach geeigneter Umstellung folgende v nicht enthaltende Bedingung

4. $$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Soll also die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ durch eine einzige Gleichung $f(x, y, z) = c$ integrabel sein, so müssen die Functionen P, Q, R die Gleichung 4. identisch erfüllen.

3. Die Bedingung ist nicht nur nothwendig sondern auch ausreichend. Wir weisen dies nach, indem wir zugleich zeigen, wie das Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden werden kann.

Die Werthe von x und y, die der Gleichung No. 2, 1 bei constantem z genügen, erfüllen die Differentialgleichung

1. $$Pdx + Qdy = 0;$$

aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung

2. $$V(x, y) = c$$

kann man das Integral der gegebenen Gleichung erhalten, indem man in 2. die Constante c durch eine passend gewählte Function von z ersetzt. Nehmen wir an, $V = \varphi(z)$ sei das Integral der Gleichung

3. $$Pdx + Qdy + Rdz = 0\,.$$

Durch Differentiation folgt aus

4. $$V - \varphi(z) = 0$$

die Gleichung

5. $$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \varphi'\right)dz = 0\,.$$

Da nun $V = c$ das allgemeine Integral von 1. ist, so giebt es einen Faktor v von der Beschaffenheit, dass

6. $$vP = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Multiplicirt man 3. mit v und berücksicht 6., so folgt

7. $$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + vR\,dz = 0\,.$$

Der Vergleich von 5. und 7. ergiebt

8. $$\frac{\partial V}{\partial z} - vR = \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Da hier rechts eine Function von z allein steht, so muss dasselbe auch links der Fall sein.

Durch die Gleichung $V = \varphi(z)$ ist z als Function von V definirt; die Bedingung, dass $\partial V : \partial z - vR$ eine Function von z allein sei, ist daher erfüllt, wenn dieser Ausdruck in Anbetracht der Variabeln x und y eine Function von V ist. Die ausreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich

9. $$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) = 0\,.$$

Von dieser Bedingung lässt sich leicht zeigen, dass sie mit No. 2, 4 identisch ist. Durch Ausführung der Differentiationen folgt zunächst aus 9.

10. $$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - v\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\right) - R\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Aus

$$\frac{\partial V}{\partial y} = vQ\,, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = vP \quad \text{folgt}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = v\,\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\,\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = v\,\frac{\partial P}{\partial z} + P\,\frac{\partial v}{\partial z};$$

daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = v^2\left(P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

$$v\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\right) = v^2\left(P\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial R}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Da v integrirender Faktor der Gleichung 1. ist, so ist

$$P\,\frac{\partial v}{\partial y} - Q\,\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Setzt man dies in 10. ein und unterdrückt den Faktor v^2, so erhält man in der That No. 2, 4.

Um nun $\varphi(z)$ zu erhalten, hat man in 8. links die Variabeln x und y durch V zu verdrängen und V durch φ zu ersetzen; man erhält dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für φ. Durch das allgemeine Integral dieser Gleichung tritt in das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung eine willkürliche Constante ein.

Beispiel. $\quad a^2 x dx + b^2 y\, dy - c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}\, dz = 0\,.$

Hier ist $v = 2$, $V = a^2x^2 + b^2y^2$; daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial z} - vR = 2c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}\,.$$

Dies ist eine Function von V, folglich lässt die gegebene Differentialgleichung eine einzelne Integralgleichung zu. Man hat weiter

$$\frac{d\varphi}{dz} = -2R = 2c\sqrt{\varphi - 1}\,;$$

Hieraus folgt

$$cz = \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi - 1}} = \sqrt{\varphi - 1} + c_1\,,$$

wenn c_1 eine willkürliche Constante ist. Dies ergiebt

$$\varphi = (cz - c_1)^2 + 1\,.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist sonach

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (cz - c_1)^2 = 1\,.\text{*)}$$

4. Wenn in der Gleichung

1. $$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

die Functionen P, Q, R die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

nicht erfüllen, wenn es also keine Flächenfamilie $f(x, y, z, c) = 0$ giebt derart, dass jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs irgend einer dieser Flächen der Differentialgleichung genügt, so lassen sich doch auf jeder beliebigen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ unzählige Linien so ziehen, dass jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs jeder solchen Curve die Differentialgleichung erfüllt.

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ möge hervorgehen

2. $$z = f(x, y);$$

hieraus folgt für jede Verschiebung entlang der Fläche φ

3. $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,.$$

Setzt man 2. und 3. in 1. ein, so bleibt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y; das allgemeine Integral derselben sei

4. $$\psi(x, y, C) = 0\,,$$

wobei C eine willkürliche Constante bezeichnet; diese Gleichung ergiebt eine Schaar von Cylinderflächen, deren Mantellinien der Z-Achse parallel sind; der Schnitt jedes dieser Cylinder mit der Fläche $\varphi = 0$ befriedigt die Gleichung 1.

Man kann nun sagen, die Gleichung 1. sei durch den Verein der beiden Gleichungen 2. und 4. integrirt.

Man kann in diesem Falle die Integralgleichungen auch in folgender Weise darstellen. Ist

$$V(x, y, z) = c$$

das Integral von $Pdx + Qdy = 0$ unter Voraussetzung eines constanten z, so ist

5. $$V(x, y, z) = \varphi(z)\,,$$

worin z eine ganz willkürliche Function von z bedeutet, ein Integral der gegebenen Differentialgleichung für alle Werthe der Variabeln x, y, z, welche der Gleichung genügen (No. 3, 8)

6. $$\frac{\partial V}{\partial z} - vR - \frac{d\varphi}{dz} = 0\,.$$

*) Weitere Beispiele siehe BOOLE, A treatise etc., Ch. XII.

Somit ist die Gleichung durch zwei Gleichungen (5. und 6.) integrirt, die eine willkürliche Function (φ) enthalten.

5. Um die Bedingungen zu erhalten, unter denen die Differentialgleichung zwischen vier Variabeln

1. $$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch eine einzige Gleichung

2. $$t = \varphi(x, y, z)$$

integrirt werden kann, leiten wir aus 1. ab

3. $$dt = -\frac{P}{S}\,dx - \frac{Q}{S}\,dy - \frac{R}{S}\,dz\,.$$

Die gesuchten Bedingungen ergeben sich zunächst in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S}\,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S}\,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S}\,.$$

Führt man die Differentiationen aus, und bezeichnet partiale Differentialquotienten nach x, y, z, t durch entsprechende Indices, so erhält man, wenn man die partialen Differentialquotienten von t aus 3. substituirt,

4 $$S(Q_x - P_y) + P(S_y - Q_t) + Q(P_t - S_x) = 0\,,$$

5. $$S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0\,,$$

6. $$S(Q_z - R_y) + Q(R_t - S_z) + R(S_y - Q_t) = 0\,.$$

Reducirt man 1. auf das Differential einer anderen Variabeln, als auf dt, so erhält man ausser den Gleichungen 4., 5., 6. noch die Gleichung

7. $$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0\,.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist diese Gleichung eine Folge der Gleichungen 4., 5., und 6. enthält also keine neue Bedingung für P, Q, R, S.

6. Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 erfüllt sind, so wird der Gleichung

1. $$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch ein einziges Integral genügt. Nimmt man zunächst t als constant an, so geht die Differentialgleichung über in

2. $$Pdx + Qdy + Rdz = 0\,.$$

Da No. 5, 7 erfüllt ist, so lässt diese Gleichung ein einziges Integral zu

3. $$f(x, y, z, t) = c\,,$$

wobei t als Parameter auftritt, sofern es in P, Q, R enthalten ist, und c die Integrationsconstante bezeichnet. Man kann nun c als Function der Variabeln t so bestimmen, dass 3. der gegebenen Differentialgleichung genügt. Denn aus 3. folgt

4. $$f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_t dt - \frac{dc}{dt}\,dt = 0\,.$$

Da nun 3. das Integral von 2. ist, so ist für einen bestimmten Faktor v

5. $$f_x = vP\,, \quad f_y = vQ\,, \quad f_z = vR\,;$$

ferner ist zufolge 1.

$$Pdx + Qdy + Rdz = -Sdt\,.$$

Führt man dies in 4. ein, so erhält man

$$-vS + f_t - \frac{dc}{dt} = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dc}{dt} = -vS + f_t\,.$$

Soll nun c als Function von t allein bestimmbar sein, so muss die rechte Seite dieser Gleichung eine Function von t und c allein sein, sobald man in derselben z gemäss 3. durch x, y, c, t ausgedrückt substituirt. Dies tritt ein, wenn nach der Substitution die Differentialquotienten der rechten Seite, genommen nach x und y, verschwinden.

Daher hat man, wenn man den Erfolg der Substitution durch die Buchstaben f, v, S andeutet, die Bedingungen

6. $$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{vS} - \mathrm{f}_t) = 0,$$

7. $$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{vS} - \mathrm{f}_t) = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation in 6. ergiebt

8. $$v_x S + v S_x + (v_z S + v S_z) z_x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z_x = 0.$$

Nun ist zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = v P_t + v_t P, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = v R_t + v_t R,$$
$$z_x = - P : R.$$

Führt man dies in 8. ein und multiplicirt mit R, so erhält man

$$S(Rv_x - Pv_z) + v(RS_x - PS_z - RP_t + PR_t) = 0.$$

Aus $\dfrac{\partial v R}{\partial x} = \dfrac{\partial v P}{\partial z}$ folgt

$$Rv_x - Pv_z = v(P_z - R_x);$$

benutzt man dies, so erhält man schliesslich

$$S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0,$$

d. i. die Gleichung No. 5, 5. Als ausreichende Bedingung für 7. erhält man ebenso die Gleichung No. 5, 6.

Wenn daher die Bedingungen No. 5, 4. bis 7 erfüllt sind, so ermittele man das Integral

9. $$f(x, y, z, t) = c$$

der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

und bestimme hierauf c als Function von z aus der Differentialgleichung I. O.

$$\frac{dc}{dt} = \mathrm{vS} - \mathrm{f}_t;$$

führt man diese Function in 9. ein, so ist 9. das Integral der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0.$$

7. Bestimmte Systeme simultaner Differentialgleichungen. Unter einem bestimmten Systeme simultaner Differentialgleichungen versteht man ein System von n Gleichungen welche $(n+1)$ Variable und Differentialquotienten von n derselben in Bezug auf eine — die unabhängige Variable — enthalten.

Wir werden zeigen, wie ein solches System durch Differentiation und successive Elimination auf ein System von n Differentialgleichungen reducirt wird, deren jede ausser der unabhängigen Variabeln nur eine abhängige und ihre Differentialquotienten enthält.

Sind sämmtliche Gleichungen von der ersten Ordnung, so können sie auf die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \frac{dx_3}{dx} \cdots \frac{dx_n}{dx}$$

der abhängigen Variabeln $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ reducirt werden; bringt man diese Gleichungen in die Form

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X},$$

so kann man sie durch die Proportion ersetzen

1. $$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots : dx = X_1 : X_2 : X_3 : \ldots : X,$$

wo nun keine der n Variabeln vor der andern bevorzugt erscheint.

Nach Jacobi werden die Integralgleichungen dieses Systems auf folgendem Wege erhalten:

Man differenzire die Gleichung

2. $$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}$$

$(n-1)$ mal nach x und ersetze nach jeder Differentiation die Differentialquotienten $dx_k : dx$ durch $X_k : X$; alsdann erhält man mit 2. zusammen n Gleichungen, welche die n Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3x_1}{dx_3} \cdots \frac{d^nx_1}{dx^n}$$

durch die Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ ausdrücken. Eliminirt man hieraus die Variabeln $x_2, x_3 \ldots x_n$, so bleibt eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche nur die Variabeln x_1 und x enthält,

$$\varphi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right).$$

Die n ersten Integrale dieser Gleichung seien

$$F_1\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_1,$$
$$F_2\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_n.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der $(n-1)$ Differentialquotienten von x_1 ausgedrückt durch $x, x_1 \ldots x_n$, ein, so erhält man n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten $C_1, C_2 \ldots C_n$, die Integralgleichungen des Problems.

8. Ehe wir die Betrachtung bestimmter Systeme fortsetzen, ergänzen wir, gestützt auf das in No. 7 Entwickelte, die in No. 1 bis 6 enthaltenen Untersuchungen, indem wir nachweisen:

Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind, so wird der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch den Verein zweier Gleichungen genügt, welche eine willkürliche Function enthalten.

Werden die linken Seiten der Gleichungen No. 5, 4 bis 7 der Reihe nach mit $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{S}$ bezeichnet, so erkennt man die Identität

1. $$-P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S} = 0;$$

daher wird der gegebenen Differentialgleichung durch die Proportion genügt

$$dx : dy : dz : dt = -\mathfrak{P} : \mathfrak{Q} : \mathfrak{R} : \mathfrak{S}.$$

Diese Proportion ist gleichbedeutend mit dem simultanen Systeme

2. $$\frac{dx}{\mathfrak{P}} = -\frac{dt}{\mathfrak{S}}, \quad \frac{dy}{\mathfrak{Q}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}}, \quad \frac{dz}{\mathfrak{R}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}}.$$

Die Integrale dieser drei Gleichungen seien

$$3.\qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t, a, b, c), \\ y &= \psi(t, a, b, c), \\ z &= \chi(t, a, b, c), \end{aligned}$$

wobei a, b, c die Integrationsconstanten bezeichnen.

Durch 3. wird die gegebene Gleichung integrirt; diese Lösung des Problems ist aber nur eine particuläre; wir werden zeigen, wie man von ihr zur allgemeinen Lösung übergehen kann, indem man statt der Constanten a, b, c geeignet gewählte Functionen der Variabeln setzt.

9. Differenzirt man No. 8, 3. nach allen darin enthaltenen Grössen, so erhält man

$$1.\qquad \begin{aligned} dx &= \varphi_t\, dt + \varphi_a\, da + \varphi_b\, db + \varphi_c\, dc, \\ dy &= \psi_t\, dt + \psi_a\, da + \psi_b\, db + \psi_c\, dc, \\ dz &= \chi_t\, dt + \chi_a\, da + \chi_b\, db + \chi_c\, dc. \end{aligned}$$

Führt man dies in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2.\qquad (P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S)\,dt + \alpha\, da + \beta\, db + \gamma\, dc = 0,$$

wobei

$$3.\qquad \begin{aligned} \alpha &= P\varphi_a + Q\psi_a + R\chi_a, \\ \beta &= P\varphi_b + Q\psi_b + R\chi_b, \\ \gamma &= P\varphi_c + Q\psi_c + R\chi_c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen No. 8, 3 genügen unter Voraussetzung constanter a, b, c den Gleichungen No. 8, 2; folglich ist

$$4.\qquad \varphi_t = -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{S}}, \qquad \psi_t = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}}, \qquad \chi_t = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}},$$

$$P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S = \frac{1}{\mathfrak{S}}(-P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S}) = 0.$$

Die Gleichung 2. reducirt sich hiernach auf

$$5.\qquad \alpha da + \beta db + \gamma dc = 0.$$

Ersetzt man in P, Q, R die Variabeln x, y, z gemäss der Gleichungen No. 8, 3 durch t, a, b, c, so enthalten α, β, γ nur noch die Variable t; diese Variable kommt in α, β, γ nur in einem gemeinsamen Faktor vor.

Wenn in P, Q, R, S die Variabeln x, y, z durch t, a, b, c ersetzt sind, so deuten wir dies durch die Buchstaben P, Q, R, S an. Alsdann ist

$$6.\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{P}\varphi_a + \mathrm{Q}\psi_a + \mathrm{R}\chi_a). \\ &= \mathrm{P}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} \\ &\quad + (P_t + P_x\varphi_t + P_y\psi_t + P_z\chi_t)\,\varphi_a \\ &\quad + (Q_t + Q_x\varphi_t + Q_y\psi_t + Q_z\chi_t)\,\psi_a \\ &\quad + (R_t + R_x\varphi_t + R_y\psi_t + R_z\chi_t)\,\chi_a. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

wird identisch erfüllt, wenn die Gleichungen gelten

$$x = \varphi, \quad y = \psi, \quad z = \chi,$$
$$dx : dy : dz : dt = \varphi_t : \psi_t : \chi_t : 1.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen x, y, z durch t, a, b, c ausdrückt und in die Differentialgleichung substituirt, so erhält man daher die Identität

$$\mathrm{P}\varphi_t + \mathrm{Q}\psi_t + \mathrm{R}\chi_t = -\mathrm{S}.$$

Diese Gleichung ergiebt

$$7.\qquad \begin{aligned} \mathrm{P}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} &= -\mathrm{S}_a - \mathrm{P}_a\varphi_t - \mathrm{Q}_a\psi_t - \mathrm{R}_a\chi_t \\ &= -\mathrm{S}_a - \varphi_t(P_x\varphi_a + P_y\psi_a + Q_z\chi_a) \\ &\quad - \psi_t(Q_x\varphi_a + Q_y\psi_a + Q_z\chi_a) \\ &\quad - \chi_t(R_x\varphi_a + R_y\psi_a + R_z\chi_a). \end{aligned}$$

Durch Addition von 6. und 7. folgt

$$8.\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\mathrm{S}_a &+ \varphi_a[P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x)] \\ &+ \psi_a[Q_t + \chi_t(Q_z - R_y) + \varphi_t(Q_x - P_y)] \\ &+ \chi_a[R_t + \varphi_t(R_x - P_z) + \psi_t(R_y - Q_z)]. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man 4., sowie die Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$, so erhält man

$$\begin{aligned} P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x) &= \frac{1}{\mathfrak{S}}[\mathfrak{S}P_t + \mathfrak{Q}(P_y - Q_x) + \mathfrak{R}(P_z - R_x)] \\ &= \frac{1}{\mathfrak{S}}\big(\mathfrak{S}P_t + (S_x - P_t)[R(P_y - Q_x) + Q(R_x - P_z)] \\ &\quad + P[(R_t - R_z)(P_y - Q_x) + (S_y - Q_t)(P_z - R_x)]\big). \end{aligned}$$

Benutzt man hierin

$$R(P_y - Q_x) + Q(R_x - P_z) = \mathfrak{S} - P(Q_z - R_y),$$

und setzt zur Abkürzung

$$(P_y - Q_x)(R_t - S_z) + (P_z - R_x)(S_y - Q_t) + (Q_z - R_y)(P_t - S_x) = \Delta,$$

so erhält man

$$P_t + \psi_t(P_y - Q_x) + \chi_t(P_z - R_x) = S_x + \frac{P}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

Ebenso folgt

$$Q_t + \chi_t(Q_z - R_y) + \varphi_t(Q_x - P_y) = S_y + \frac{Q}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

$$R_t + \varphi_t(R_x - P_z) + \psi_t(R_y - Q_z) = S_z + \frac{R}{\mathfrak{S}}\Delta.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ergiebt sich aus 8.

$$9.\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\mathrm{S}_a + S_x\varphi_a + S_y\psi_a + S_z\chi_a + \frac{\Delta}{\mathfrak{S}}\alpha.$$

Da nun

$$\mathrm{S}_a = S_x\varphi_a + S_y\psi_a + S_z\chi_a,$$

wobei man ebenso wie in 9. nach erfolgter Differentiation x, y, z durch t, a, b, c zu ersetzen hat, so erhält man schliesslich

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\Delta}{\mathfrak{S}}.$$

Integrirt man diese Gleichung nach t, so folgt

$$\alpha = \mathfrak{A}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{A}$ die von t freie Integrationsconstante.

In derselben Weise ergiebt sich

$$\beta = \mathfrak{B}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}, \qquad \gamma = \mathfrak{C}e^{\int\frac{\Delta}{\mathfrak{S}}dt}.$$

Setzt man diese Werthe für α, β, γ in die Differentialgleichung 5, und unterdrückt den gemeinschaftlichen die Variable t enthaltenden Faktor, so bleibt die Gleichung

$$10.\qquad \mathfrak{A}da + \mathfrak{B}db + \mathfrak{C}dc = 0,$$

welche nur a, b, c enthält.

Diese Gleichung lässt nicht ein einziges Integral zu; denn wenn dies der Fall wäre, so könnte man a, b, c aus den Gleichungen

$$x = \varphi(t, a, b, c),$$
$$y = \psi(t, a, b, c),$$
$$z = \chi(t, a, b, c),$$

als Functionen von x, y, z, t berechnen und in das Integral substituiren; man hätte dann die gegebene Differentialgleichung durch ein einziges Integral integrirt, entgegen der Voraussetzung, dass die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind.

Hat man 10. durch zwei Gleichungen integrirt, die eine willkürliche Function enthalten, und substituirt darin a, b, c als Functionen der Variabeln, so erhält man die Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichung*).

10. Die in No. 7 entwickelte allgemeine Methode kann man in besonderen Fällen durch einfachere, den besonderen Umständen angepasste Wege ersetzen; es gelingt mitunter die Integration einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch Integrationen von Gleichungen niederer Ordnung zu ersetzen.

Die Differentialgleichungen

$$1.\quad \frac{dx}{dt} = ax + by + cz + d,\quad \frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + d_1,\quad \frac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

multipliciren wir der Reihe nach mit 1, m, n und addiren; wir erhalten dadurch

$$2.\quad \frac{dx + m\,dy + n\,dz}{dt} = Ax + By + Cz + D,$$

worin $A = a + ma_1 + na_2$, $B = b + mb_1 + nb_2$,
$C = c + mc_1 + nc_2$, $D = d + md_1 + nd_2$.

Wir bestimmen nun m und n so, dass

$$A:B:C = 1:m:n.$$

Alsdann giebt es eine Zahl λ, so dass

$$3.\quad A = \lambda,\quad B = m\lambda,\quad C = n\lambda.$$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1-\lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln dieser cubischen Gleichung, so erhält man aus 3. drei zusammengehörige Werthepaare m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3. Jedes dieser Paare führen wir in 2. ein und erhalten z. B. für m_1, n_1

$$\frac{dx + m_1\,dy + n_1\,dz}{dt} = \lambda_1\left(x + m_1y + n_1z + \frac{d + m_1d_1 + n_1d_2}{\lambda_1}\right).$$

Hieraus folgt sofort die Integralgleichung

$$l\left(x + m_1y + n_1z + \frac{d + m_1d_1 + n_1d_2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1 t + C_1.$$

*) RAABE, Ueber die Integration der Differentialgleichungen von der Form $dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr$ u. s. w. CRELLE's Journal, Bd. 14, pag. 123, 1825. Die allgemeine Auflösung des Problems gab PFAFF in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 und 1815.

Vertauscht man hier m_1, n_1, λ_1, C_1 mit m_2, n_2, λ_2, C_2, bez. m_3, n_3, λ_3, C_3, so erhält man die drei Integralgleichungen des Problems.

Wenn zwei Wurzeln λ gleich sind, so erhält man auf diesem Wege nicht alle Integralgleichungen; man kann sich in diesem Falle der allgemeinen Methode bedienen.

11. Das Problem, die Gleichungen zu integriren

$$1.\quad dx:dy:dz = (ax + by + cz + d):(a_1x + b_1y + c_1z + d_1):(a_2x + b_2y + c_2z + d_2),$$

lässt sich auf das soeben behandelte zurückführen. Bezeichnet man die rechts stehenden Polynome der Reihe nach mit M, M_1, M_2 und fügt eine neue Variable t hinzu, welche der Proportion genügt

$$dx:dy:dz:dt = M:M_1:M_2:1,$$

so hat man für x, y, z, t dieselben Gleichungen, wie in No. 10. Hat man diese integrirt, und eliminirt dann aus zwei Paaren der drei Integralgleichungen die Hülfsvariable t, so erhält man die beiden Integralgleichungen des Problems.

Macht man in den Gleichungen

$$2.\quad \frac{a\xi}{a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau} = \frac{d\eta}{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau} = \frac{d\zeta}{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau} = \frac{d\tau}{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau}$$

die Substitutionen

$$\xi = x\tau,\quad \eta = y\tau,\quad \zeta = z\tau,$$

worin x, y, z neue Variable sind, so erhält man zunächst

$$\frac{\tau dx + x d\tau}{A} = \frac{\tau dy + y d\tau}{B} = \frac{\tau dz + z d\tau}{C} = \frac{d\tau}{D},$$

wobei $A = ax + by + cz + d$, $B = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$,
$C = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$, $D = a_3x + b_3y + c_3z + d_3$.

Aus den vorigen Gleichungen erhält man

$$\frac{\tau dx}{A - xD} = \frac{\tau dy}{B - yD} = \frac{\tau dz}{C - zD},$$

und hieraus durch Division mit τ das System

$$3.\quad \frac{dx}{A - xD} = \frac{dy}{B - yD} = \frac{dz}{C - zD}.$$

Die Integralgleichungen dieses Systems werden somit erhalten, indem man das System 2. integrirt und alsdann ξ, η, ζ durch $x\tau$, $y\tau$, $z\tau$ ersetzt, und τ zwischen zwei unabhängigen Paaren der drei Integralgleichungen von 2. eliminirt.

Auf demselben Wege kommt man zum Ziele, wenn die Differentialgleichungen ebenso gebaut sind, wie in No. 6 und 7, aber mehr Variable enthalten.

12. Um die Gleichungen zu integriren*)

$$\frac{dx}{dt} + Px + Qy = V,$$
$$\frac{dy}{dt} + P'x + Q'y = V',$$

in denen P, P', Q, Q', V, V' nur die unabhängige Variable t enthalten, multipliciren wir die zweite mit einer noch unbestimmten Function z der unabhängigen Variabeln und addiren dann beide Gleichungen; dies ergiebt

$$1.\quad \frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} + (P + zP')x + (Q + zQ')y = V + zV'.$$

*) STURM, Cours d'Analyse, No. 633; LACROIX, Traité, Bd. II. pag. 383.

Setzen wir nun $r = x + zy$, so ist

$$\frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt},$$

und aus 1. wird

2. $$\frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt} + (P + zP')(r - zy) + (Q + zQ')y = V + zV'.$$

Bestimmen wir nun z so, dass

3. $$\frac{dz}{dt} + (P + zP')z - Q - zQ' = 0,$$

so geht die Gleichung 2. über in

4. $$\frac{dr}{dt} + (P + zP')r - V - zV' = 0.$$

Die Gleichung 3. enthält nur z und t und ist erster Ordnung. Sind z_1 und z_2 zwei particuläre Integrale dieser Gleichung, so setze man jedes derselben in 4. ein; man erhält dann zwei lineare Differentialgleichungen I. O. für r, und gewinnt daraus zwei Integrale $r = r_1$ und $r = r_2$, jede mit einer willkürlichen Constanten; hieraus ergeben sich schliesslich die Integralgleichungen des Problems

$$x + z_1 y = r_1, \quad x + z_2 y = r_2.$$

Beispiel.

$$x' + 5x + y = t,$$
$$y' - x + 3y = t^2.$$

Die Gleichung für z ist

$$z' + 2z - z^2 - 1 = 0,$$

und ergiebt das allgemeine Integral

$$z = \frac{1}{c - t} + 1.$$

Für $c = \infty$ und $c = 0$ erhält man die particulären Integrale

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{t - 1}{t};$$

daher ergeben sich für die zugehörigen r_1 und r_2

$$r'_1 + 4r_1 = t + t^2,$$
$$r'_2 + \frac{4t + 1}{t} r_2 = t^2.$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind

$$r_1 = e^{-4t}[C_1 + \int (t + t^2) e^{4t}\, dt,$$
$$r_2 = \frac{1}{t} e^{-4t}(C_2 + \int t^3 e^{4t}\, dt).$$

Beide Integrale lassen sich nach früher mitgetheilten Regeln (§ 5, No. 2) leicht ausführen.

Die Endgleichungen des Problems sind

$$x + y = r_1, \quad tx + (t - 1)y = tr_2,$$

aus welcher man noch, wenn erwünscht, jede der beiden abhängigen Variabeln x und y durch t allein ausdrücken kann.

---

13. Simultane Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung werden durch einen sehr einfachen Kunstgriff auf Systeme von Gleichungen erster Ordnung reducirt.

Um die höheren Differentialquotienten z. B. der abhängigen Variabeln x in Bezug auf die unabhängige t zu beseitigen, fügt man neue Variable $x_1, x_2, x_3 \ldots$ durch die Gleichungen erster Ordnung hinzu

1. $$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^3x}{dt^3} = x_3, \ldots$$

Statt der Differentialquotienten x'', x''', ... $x^{(n)}$ des ursprünglichen Systems hat man in dem neuen Systeme, das aus den durch die Substitutionen 1. modificirten gegebenen Gleichungen und den Gleichungen 1. besteht, die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und deren erste Differentialquotienten. In gleicher Weise beseitigt man die höheren Differentialquotienten der übrigen abhängigen Variabeln.

Hierauf integrirt man das neue System, und eliminirt dann die neu eingeführten Variabeln.

Hat man z. B. zwei Gleichungen zwischen den abhängigen Variabeln x, y und der unabhängigen t, und sind die höchsten Differentialquotienten die in beiden Gleichungen vorkommen

$$\frac{d^m x}{dt^m} \quad \text{und} \quad \frac{d^n y}{dt^n},$$

so erhält man auf dem angegebenen Wege

$$2 + (m - 1) + (n - 1) = m + n$$

Gleichungen erster Ordnung zwischen $(m + n + 1)$ Variabeln; hieraus erhält man $(m + n)$ Integralgleichungen, mit zusammen $(m + n)$ willkürlichen Constanten. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die neu eingeführten Variabeln, deren Anzahl $(m + n - 2)$ ist, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y, und t, die Lösungen des Problems.

Wie immer, wird man auch hier in jedem gegebenen Falle die allgemeine Methode zu vermeiden und kürzere Wege zu entdecken suchen. Man wird sich bemühen, durch geschickte Combination der Differentialgleichungen neue Gleichungen zu erhalten, deren Integrale bekannt sind.

14. Wir geben hierzu ein Beispiel aus der theoretischen Mechanik. Die Theorie der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten (z. B. eines starren Körpers) ist nur ein Theil der Theorie simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung; und umgekehrt hat die Theorie von Systemen gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch das Interesse, welches die theoretische Mechanik an ihnen nahm, wesentlich an Ausbau gewonnen. Wir ziehen es vor, ohne auf die Feststellung der mechanischen Begriffe und die Begründung der Differentialgleichungen an dieser Stelle einzugehen, letzteren ihre mechanische Einkleidung vollständig zu belassen; losgelöst von derselben würden die Untersuchungen und Resultate an Anschaulichkeit sehr verlieren und zu abstract erscheinen.

Wenn ein freibeweglicher Massenpunkt P, dessen Coordinaten x, y, z sind, von einem festen Centrum O, dem Nullpunkte des Coordinatensystems, angezogen oder abgestossen wird, und zwar so, dass die Anziehungskraft nur von der Entfernung $OP = r$ abhängt, und wenn dieselbe beim Abstande r die Grösse $f(r)$ hat, so gelten für die Coordinaten des Punktes die Differentialgleichungen

1. $$\frac{d^2x}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{x}{r},$$

2. $$\frac{d^2y}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

3. $$\frac{d^2z}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{z}{r}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz, so erhält man, wenn man $dx : dt$, $dy : dt$, $dz : dt$, die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes, mit x', y', z' bezeichnet,

$$\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right)dt = \frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

die rechte Seite ist ebenfalls ein vollständiges Differential, denn man hat

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{also} \quad x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr.$$

Hieraus erhält man folgendes erste Integral des Systems

4. $$(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\int f(r)\,dr + h,$$

wobei h die willkürliche Constante ist.

Bezeichnen v die Geschwindigkeit des Punktes und φ, ψ, χ die Winkel, die sie augenblicklich mit den Achsen bildet, so ist

$$x' = v\cos\varphi, \quad y' = v\cos\psi, \quad z' = v\cos\chi, \quad \text{also} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2;$$

daher kann man 4. ersetzen durch

5. $$v = 2\int f(r)\,dr + h.$$

Nach welchem Gesetze daher auch die Einwirkung des Centrums auf den bewegten Punkt P erfolgen, und in welcher Richtung und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit derselbe seinen Lauf beginnen mag, immer ist die Geschwindigkeit nur eine Function des Radius vector r; wenn sich der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in demselben Abstande von O befindet, so hat er in allen diesen Momenten dieselbe Geschwindigkeit.

Man kann noch auf anderem Wege zu ersten Integralen des Systems gelangen. Multiplicirt man 1. mit y, 2. mit x und subtrahirt, so ergiebt sich

6 $$xy'' - yx'' = 0.$$

Da nun

$$\frac{d}{dt}(xy' - yx') = xy'' + x'y' - yx'' - y'x' = xy'' - yx'',$$

so folgt aus 6. durch Integration

7. $$xy' - yx' = c;$$

ebenso erhält man die Integrale

8. $$yz' - zy' = c_1,$$

9. $$zx' - xz' = c_2,$$

wobei c, c_1, c_2 willkürliche Constante sind.

Multiplicirt man die Gleichungen 7., 8., 9. der Reihe nach z, x, y und addirt, so erhält man links identisch Null; daher folgt die Gleichung

$$c_1 x + c_2 y + cz = 0.$$

Dies ergiebt: Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch das Anziehungscentrum geht.

Wählt man diese Ebene zur XY-Ebene, so bleiben für das Problem nur die beiden Differentialgleichungen

10. $$x'' = f(r)\cdot\frac{x}{r}, \quad y'' = f(r)\cdot\frac{y}{r},$$

wobei $$r^2 = x^2 + y^2,$$

und die beiden ersten Integrale

11. $$v^2 = 2\int f(r)\,dr + h,$$

12. $$xy' - yx' = c.$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich durch Einführung von Polarcoordinaten. Man hat

$$x = r\cos\varphi, \quad x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi'$$
$$y = r\sin\varphi, \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'.$$

Daher ist

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2,$$
$$xy' - yx' = r^2\varphi'.$$

Ist df der verschwindend kleine Sector, den der Radius r in der Zeit dt beschreibt, so ist $2df = r^2 d\varphi$, daher folgt aus 13.

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{2}, \quad f = \frac{c}{2}t + C.$$

Die vom Radius vector des Punktes beschriebenen Flächen sind daher den hierbei verflossenen Zeiten proportional.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int f(r)\,dr = U,$$

und führt auch in 11. Polarcoordinaten ein, so entsteht

13. $$r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2U + h.$$

Nach 12. hat man $r^2\varphi'^2 = c^2 : r^2$, daher folgt aus 12.

$$r'^2 = 2U + h - \frac{c^2}{r^2};$$

hieraus ergiebt sich

14. $$dt = \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad t = \int\frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_1,$$

und aus 14. und 12,

15. $$d\varphi = \frac{c\,dt}{r^2} = \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad \varphi = c\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_2.$$

Durch diese Gleichungen ist das Problem vollständig gelost; insbesondere giebt die letzte Gleichung die Bahn, welche der Punkt beschreibt; die Constanten h, c, γ_1 und γ_2 bestimmen sich in jedem gegebenen Falle aus der Anfangslage, der Anfangsgeschwindigkeit und der Anfangsrichtung des Punktes, Setzt man nämlich fest, dass zur Zeit $t = 0$ die Grössen r, φ, v die Werthe r_0, φ_0, v_0 haben sollen, und dass zu dieser Zeit die Bahn mit dem Radius r_0 den Winkel α bilden soll, so erhält man durch Einführung der Werthe r_0 und v_0 in 11. und 14. die Constanten h und γ_1. Berechnet man aus der Bahngleichung 15. den Winkel σ der Bahntangente gegen den Radius vector, für welchen man hat

16. $$\tan g\,\sigma = r : \frac{dr}{d\varphi},$$

und setzt in 15. und 16. $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\sigma = \alpha$, sowie den vorher gefundenen Werth von h, so erhält man c und γ_2 durch die Anfangszustände ausgedrückt.

§ 27. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Unter einer partialen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen unabhängigen Variabeln, abhängigen Variabeln und den partialen Differentialquotienten der letzteren. Wir beschränken uns auf Gleichungen mit einer abhängigen Variabeln.

2. Wenn eine partiale Differentialgleichung nur partiale Differentialquotienten rücksichtlich einer unabhängigen Veränderlichen enthält, so bietet sie nichts wesentlich Neues; sie ist zu integriren, als ob die übrigen Variabeln Constante wären; die Integrationsconstanten sind durch willkürliche Functionen der übrigen unabhängigen Variabeln zu ersetzen.

Beispiele. A.

Die Gleichung $$3ax^2 + 2byz\frac{\partial z}{\partial x} = c$$
liefert $$ax^3 + byz^2 = cx + f(y),$$
wobei die Function f unbestimmt bleibt.

B. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3y\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\,z = 0.$$

Setzt man hier $z = e^{mx}$, so erhält man die Gleichung
$$m^2 - 3ym + 2y^2 = 0,$$
welche die Wurzeln $m_1 = y$ und $m_2 = 2y$ hat; das Integral ist daher
$$z = f(y)\cdot e^{yx} + g(y)\cdot e^{2yx};$$
es enthält zwei willkürliche Functionen f und g.

3. Ehe wir an die Integration partialer Gleichungen der ersten Ordnung herantreten, werfen wir einen Blick auf ihre Erzeugung. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, eine Gleichung zwischen drei Variabeln, x, y, z, von denen wir x und y als unabhängige Variable ansehen.

Eine partiale Differentialgleichung I. O. entsteht durch Elimination zweier willkürlichen Constanten a, b aus einer Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ und ihren partialen Ableitungen.

Eliminirt man a und b aus den Gleichungen
$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
so erhält man in der That eine Gleichung, die ausser den Variabeln auch $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ enthält.

Enthält eine Gleichung $f = 0$ drei Constante, die durch eine Gleichung $g(a, b, c) = 0$ verbunden sind, so erhält man eine partiale Differentialgleichung, indem man a, b, c aus den Gleichungen
$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad g = 0$$
eliminirt.

Beispiele: A. Eine Ebene, die einer gegebenen Richtung α, β, γ parallel ist, hat die Gleichung
$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0,$$
wobei die Constanten A, B, C die Bedingung erfüllen
$$g \equiv A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0.$$

Um die zugehörige partiale Differentialgleichung zu erhalten, hat man A, B, C aus den Gleichungen zu eliminiren
$$\begin{aligned} Ax \;&+ By &+ Cz - 1 &= 0, \\ A\cos\alpha \;&+ B\cos\beta &+ C\cos\gamma &= 0, \\ A \;& &+ Cp &= 0, \\ & B &+ Cq &= 0, \end{aligned}$$
wenn zur Abkürzung
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$
gesetzt wird.

Die Elimination ergiebt die Gleichung
$$\cos\alpha\cdot p + \cos\beta\cdot q - \cos\gamma = 0.$$

B. Eine Ebene, die einen gegebenen Punkt l, m, n enthält, hat die Gleichung
$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0,$$
wobei für die Constanten A, B, C die Gleichung besteht
$$g \equiv Al + Bm + Cn - 1 = 0.$$

Die Elimination erfolgt aus diesen beiden Gleichungen und aus
$$A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0.$$

Da $\quad f - g \equiv A(x - l) + B(y - m) + C(z - n) = 0,$
so hat man, um die resultirende Gleichung zu gewinnen, nur in der Schlussgleichung des vorigen Beispiels $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Reihe nach durch $x - l$, $y - m$, $z - n$ zu ersetzen; man erhält
$$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

C. Für Ebenen, die eine Kugel berühren, deren Halbmesser e ist, und dessen Centrum die Coordinaten a, b, c hat, erhält man das System
$$Ax + By + Cz - 1 = 0, \quad A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0;$$
$$Aa + Bb + Cc - 1 = e\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt
$$C = 1 : (z - xp - yq), \quad A = -p : (z - xp - yq), \quad B = -q : (z - xp - yz).$$

Setzt man dies in die letzte ein, so entsteht
$$(x - a)p + (y - b)q - (z - c) = e\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

D. Die Gleichung einer Kugel

1. $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

enthält vier Constante a, b, c, r. Liegt das Centrum auf einer gegebenen Geraden, so sind a, b, c durch zwei lineare Gleichungen verbunden

2. $$a = mc + n, \quad b = \mu c + \nu.$$

Durch Differentiation der Kugelgleichung folgt

3. $$\begin{aligned} x - a + (z - c)p &= 0, \\ y - b + (z - c)q &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man hier für a und b die Werthe aus 3. ein und vergleicht die resultirenden Werthe für c, so erhält man schliesslich
$$(\mu z - y + \nu)p - (mz - x + n)q + \mu(x - \nu) - m(y - \nu) = 0.$$

4. **Eine partiale Differentialgleichung I. O. entsteht ferner, wenn man aus einer Gleichung $F[x, y, z, \varphi(\psi)] = 0$,** — worin F und ψ bekannte Functionen sind und φ eine willkürliche Function von ψ bezeichnet, — **sowie aus ihren partialen Ableitungen die willkürliche Function φ eliminirt.**

Durch Differentiation erhält man
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)q = 0,$$
oder besser geordnet
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}p\right) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}q\right) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\partial F : \partial\varphi$, so erhält man
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)q + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$
oder in Determinantenform

1. $$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Gleichung in Bezug auf p und q linear ist.

5. Die willkürliche Function kann auch in anderer Verbindung auftreten. Aus der Gleichung

$$\Phi(f, g) = 0,$$

worin f und g bekannte Functionen von x, y und z sind, während Φ eine willkürliche Function ist, folgt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}p\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}q\right) = 0.$$

Die Elimination von Φ ergiebt die partiale Differentialgleichung

2.
$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die gegebene Function g einer willkürlichen Function φ der gegebenen f gleich, so dass also $g = \varphi(f)$, so kommt man zu dem vorigen Falle zurück; denn aus $\Phi(f, g) = 0$ folgt, dass g eine willkürliche Function von f ist.

6. **Partiale Differentialgleichung der Cylinderflächen.** Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Mantellinien, so ist die Gleichung des Cylinders von der Form (Differentialrechn. § 6, 2)

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha,\quad y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0.$$

Setzt man in No. 5, 2.

$$f = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \quad g = y\cos\gamma - z\cos\beta,$$

so erhält man

$$\frac{1}{\cos\gamma}\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \cos\gamma & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\gamma & -\cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot p + \cos\beta\cdot q - \cos\gamma = 0.$$

7. **Partiale Differentialgleichung der Kegelflächen.** Es seien l, m, n die Coordinaten der Kegelspitze, so ist die allgemeine Form der Kegelgleichung (Differentialrechnung § 6, 3)

$$\Phi\left(\frac{lz - nx}{z - n},\quad \frac{mz - ny}{z - n}\right) = 0.$$

Setzt man in 2.

$$f = \frac{lz - nx}{z - n}, \quad g = \frac{mz - ny}{z - n},$$

also $\frac{\partial f}{\partial z} = n\frac{x - l}{(z - n)^2}$, $\frac{\partial g}{\partial z} = n\frac{y - m}{(z - n)^2}$, so entsteht

$$\frac{(z-n)^3}{n^2}\cdot\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ -\frac{n}{z-n} & 0 & \frac{n(x-l)}{(z-n)^2} \\ 0 & -\frac{n}{z-n} & \frac{n(y-m)}{(z-n)^2} \end{vmatrix} = (x-l)p + (y-m)q - (z-n) = 0.$$

8. **Partiale Differentialgleichung der Rotationsflächen.** Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Achse der Fläche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht. Construirt man um den Nullpunkt Kugeln, und normal zur Rotationsachse Ebenen, und setzt irgend eine Abhängigkeit zwischen dem Kugelradius a und dem Abstande b einer Normalebene zur Achse vom Nullpunkte voraus, so erfüllen die gemeinsamen Punkte der Kugeln und der zugehörigen

Ebenen eine Rotationsfläche. Die Gleichung einer Kugel um den Nullpunkt ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, und die Gleichung einer Normalebene zur Achse $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = b$, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Achse sind; daher ist die allgemeinste Form der Gleichung einer Rotationsfläche

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2,\quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

Wir haben daher in No. 5, 2.

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \quad g = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

zu setzen und erhalten

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

9. Wenn eine Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ zwei willkürliche Constante enthält, und wenn diese Gleichung im Verein mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q = 0$$

durch Elimination von a und b auf die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

führt, so wird $f = 0$ als **vollständiges Integral der partialen Differentialgleichung I. O.** $F = 0$ bezeichnet.

Wir wollen nun zunächst sehen, ob ähnlich wie die singulären Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen so auch neue Lösungen der Gleichung $F = 0$ dadurch erhalten werden, dass man die Constanten a und b durch passend gewählte Functionen von x und y ersetzt.

Wir denken uns für diese Untersuchung das vollständige Integral auf z reducirt, also von der Form

1.
$$z = f(x, y, a, b).$$

Sind a und b variabel, so erhält man durch Differentiation

2.
$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x},$$
$$q = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Sollen diese Gleichungen mit denen übereinstimmen, die aus 1. unter Voraussetzung constanter a und b hervorgehen, so müssen a und b den Bedingungen genügen

3.
$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

Hieraus erhält man

4.
$$\frac{\partial f}{\partial a}\cdot D = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}\cdot D = 0,$$

wobei
$$D = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}.$$

Um den Gleichungen 3. zu genügen, hat man zu setzen: entweder

5.
$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

oder

6.
$$D = 0,$$

wobei die Gleichungen 3. sich auf eine reduciren, die mit 6. zu combiniren ist; oder

7. $$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Die Annahme 5. führt auf constante Werthe von a und b, also auf das vollständige Integral zurück.

Wenn die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist, so ist b eine Function von a; setzen wir $b = \varphi(a)$, so ist
$$\frac{\partial b}{\partial x} = \varphi'(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \varphi'(a) \frac{\partial a}{\partial y},$$
daher gehen beide Gleichungen 3. in die Gleichung über

8. $$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0,$$

in welcher b durch $\varphi(a)$ zu ersetzen ist.

Die Elimination von a aus den Gleichungen 8. und 1. kann nur in seltenen Fällen ohne eine bestimmte Annahme über die willkürliche Function φ erfolgen.

Das Integral der partialen Differentialgleichung, welches aus dem Verein der Gleichungen 1., $b = \varphi(a)$ und 8. besteht, und welches durch das Auftreten einer willkürlichen Function φ charakterisirt ist, heisst das allgemeine Integral der Gleichung.

Durch Elimination von a und b aus den Gleichungen 1. und 7. erhält man ein singuläres Integral der Differentialgleichung

Beispiel. Nach No. 6 hat die Gleichung

9. $$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$

das vollständige Integral

10. $$Ax + By + Cz - 1 = 0,$$

wobei die Constanten A, B, C durch die Gleichung verbunden sind

11. $$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0.$$

Durch Elimination von C aus 10. und 11. entsteht

12. $$(Ax + By)\cos\gamma - (A\cos\alpha + B\cos\beta)z - \cos\gamma = 0,$$

also ist
$$z = \frac{Ax + By - 1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} \cdot \cos\gamma.$$

Setzt man hier
$$\frac{1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = a, \quad \frac{A}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = b,$$
so erhält man
$$\frac{B}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta},$$
und daher
$$\frac{1}{\cos\gamma} \cdot z = -a + bx + \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta} y.$$

Für die Gleichung 8. erhält man hier
$$-1 + \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{\cos\beta} \varphi'(a) = 0.$$

Denkt man sich für φ irgend eine Function gesetzt und die Gleichung nach a aufgelöst, so erhält man jedenfalls a in der Form
$$a = \psi(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$
wo nun ψ ebenso willkürlich ist wie φ; setzt man dies in $\varphi(a)$ ein, so erfolgt für b
$$b = \chi(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$
wobei aber χ durch ψ bestimmt ist. Beide Werthe für a und b setzen wir in das vollständige Integral und erhalten

$$\frac{z}{\cos\gamma} = -\psi + \frac{1}{\cos\beta}(x\cos\beta - y\cos\alpha)\chi + \frac{y}{\cos\beta}.$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind zusammen eine willkürliche Function von $(x\cos\beta - y\cos\alpha)$; daher hat man

13. $$z\cos\beta - y\cos\gamma = f(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

wobei f eine willkürliche Function bezeichnet. Aus
$$x\cos\beta - y\cos\alpha = \frac{1}{\cos\gamma}[(x\cos\gamma - z\cos\alpha)\cos\beta + (z\cos\beta - y\cos\gamma)\cos\alpha]$$
erkennt man, dass man 13 ersetzen kann durch
$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha,\ z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$$
wobei Φ eine willkürliche Function ist, in Uebereinstimmung mit No. 6.

Da in unserm Beispiele
$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\cos\gamma,$$
so kann es kein singuläres Integral geben.

10. Wenn eine Gleichung $z = g(x, y)$ die partiale Differentialgleichung I. O. $F(x, y, z, p, q) = 0$ befriedigt, und nicht durch besondere Werthe für a und b aus einem vollständigen Integrale $z = f(x, y, a, b)$ hervorgeht, so gehört diese Gleichung zu dem vollständigen Integrale entweder als allgemeines oder als singuläres Integral.

Denn wenn man $f(x, y, a, b)$ nicht durch Specialisirung der Constanten a und b in $g(x, y)$ verwandeln kann, so kann man doch jedenfalls für a und b solche Functionen von x und y setzen, dass $f(x, y, a, b) \equiv g(x, y)$ wird.

Aus den Untersuchungen in No. 5. folgt hieraus sofort, dass $g(x, y)$ entweder ein zu f gehöriges allgemeines oder singuläres Integral ist.

Ein vollständiges Integral, das dazu gehörige allgemeine sowie das zugehörige singuläre Integral bilden also ein vollständiges Lösungs-System einer partialen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

11. Wir wenden uns nun zur Integration der linearen partialen Differentialgleichungen I. O.; und zwar zunächst zu Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln. Unter einer linearen Gleichung versteht man eine solche, in welcher die partialen Differentialquotienten der abhängigen Variabeln nur in der ersten Potenz vorkommen; bei drei Variabeln also eine Gleichung von der Form

1. $$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

wobei P, Q, R constant oder Functionen von x, y, z sind.

Die Integration dieser Gleichung hängt auf's Engste mit der Integration de Systems zusammen

2. $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Hat man nämlich ein Integral $f(x, y, z) = a$ dieses Systems gefunden, wobei a eine willkürliche Constante bezeichnet, so ist für alle Werthe, die dieser Gleichung genügen

3. $$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Da nun f ein Integral von 2. ist, so erfüllen die x, y, z, dx, dy, dz, die der Gleichung 3. genügen, auch die Gleichungen 2., man kann daher in 3. die Differentiale dx, dy, dz der Reihe nach durch die Functionen P, Q, R, ersetzen, denen sie nach 2. proportional sind; folglich hat man

4. $$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Da nun
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z},$$
so kann man 4. ersetzen durch
$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0.$$

Hieraus folgt, dass $f(x, y, z) = a$ ein particuläres Integral von 1 ist.

Dieselbe Schlussweise kann auch rückwärts durchlaufen werden: Ist $f(x, y, z) = a$ ein Integral der Gleichung $Pp + Qq - R = 0$, so ist es auch ein Integral des Systems 2.

Sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale des Systems 2., so ist das allgemeine Integral der Gleichung 1.
$$\Phi(f, g) = 0,$$
wobei Φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass Φ der Differentialgleichung genügt

5. $$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

die an die Stelle von 1. tritt, wenn z durch die Gleichung $\Phi = 0$ als unentwickelte Function von y und x bestimmt ist. Nun ist
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial z},$$
folglich hat man
$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} =$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Da nun nach der Voraussetzung die beiden rechts stehenden eingeklammerten Polynome verschwinden, so folgt, dass in der That die Gleichung 5. erfüllt ist.

Wir haben somit folgende Regel: Um die Gleichung zu integriren
$$Pp + Qq = R,$$
bilde man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$
sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale dieses Systems, so ist
$$\Phi(f, g) = 0$$
das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

12. Sind $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$, und $h(x, y, z) = c$ particuläre Integrale von
$$Pp + Qq = R,$$
so ist h eine Function von f und g.

Nach der Voraussetzung gelten die Gleichungen
$$P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
$$P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} = 0;$$
daher verschwindet die Determinante derselben

1. $$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

folglich ist h eine Function von f und g (Differentialrechnung § 4, No. 5).

Die Gleichung $h(f, g) = c$ fällt unter $\Phi(f, g) = 0$; es ist also jede Lösung der partialen linearen Differentialgleichung in der Form $\Phi(f, g) = 0$ enthalten.

13. Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Um die Gleichung zu integriren
$$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$
bilde man das System
$$dx : dy : dz = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

Zwei Integralgleichungen desselben sind
$$x\cos\gamma - z\cos\alpha = c_1, \quad y\cos\gamma - z\cos\beta = c_2;$$
daher ist das allgemeine Integral der partialen Gleichung
$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha, \; y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0.$$

B. $$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

Hierzu gehört das System
$$dx : dy : dz = (x - l) : (y - m) : (z - n),$$
mit den Integralgleichungen
$$\frac{x - l}{z - n} = c_1, \quad \frac{y - m}{z - n} = c_2.$$

Das allgemeine Integral ist daher
$$\Psi\left(\frac{x - l}{z - n}, \frac{y - m}{z - n}\right) = 0.$$

Aus den Identitäten
$$n\frac{x - l}{z - n} - l = \frac{nx - lz}{z - n}, \quad n\frac{y - m}{z - n} - m = \frac{ny - mz}{z - n}$$
folgt, dass man dafür auch schreiben kann
$$\Phi\left(\frac{nx - lz}{z - n}, \frac{ny - mz}{z - n}\right) = 0,$$
in Uebereinstimmung mit No. 7.

C. Integration von
$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Das Hülfssystem ist hier
$$\frac{dx}{y\cos\gamma - z\cos\beta} = \frac{dy}{z\cos\alpha - x\cos\gamma} = \frac{dz}{x\cos\beta - y\cos\alpha}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth dieser drei Verhältnisse mit dt, so erhält man

$$dx = (y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dt\,,$$
$$dy = (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,dt\,,$$
$$dz = (x\cos\beta - y\cos\alpha)\,dt\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen zunächst nacheinander mit x, y, z, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und addirt, so erhält man

$$xdx + ydy + zdz = 0\,, \quad \cos\alpha\cdot dx + \cos\beta\cdot dy + \cos\gamma\cdot dz = 0;$$

hieraus folgen die beiden Integrale des Systems

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1\,, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = c_2\,.$$

Das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2\,,\; x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

14. Um die lineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Variabeln zu integriren

1. $$X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = X,$$

bilde man das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

2. $$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n\,.$$

Sind die Integralgleichungen dieses Systems

3. $$\begin{aligned} f_1(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_1\,,\\ f_2(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_2\,,\\ &\ldots\ldots\\ f_n(x, x_1, \ldots, x_n) &= c_n\,,\end{aligned}$$

so ist das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung

4. $$\Phi(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n) = 0\,.$$

Beweis. Durch Differentiation gewinnt man aus 3.

5. $$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_i}{\partial x}dx = 0\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots n\,.$$

Setzt man für $dx_1, \ldots, dx_n, dx$ nach 2. die proportionalen Werthe $X_1 \ldots X_n$, X ein, so entsteht

6. $$X_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X\frac{\partial f_i}{\partial x} = 0\,.$$

Um nun zu sehen, ob 4. die Gleichung 1. integrirt, ziehen wir aus 4. die Werthe

$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} : \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,$$

und setzen sie in 1. ein; dadurch entsteht

7. $$X_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} + X\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0;$$

soll 1. durch 4. integrirt werden, so muss diese Gleichung identisch sein. Nun ist nach 4.

8. $$\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial f_n}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\,.$$

Setzt man dies in 7. ein, so entsteht

$$\sum_1^n{}_i\,\frac{\partial\Phi}{\partial f_i}\left(X_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Da nun links nach 4. der Klammerinhalt für jeden Werth $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ verschwindet, so ist diese Gleichung identisch erfüllt, w. z. b. w.

Wir wollen die Ausführung eines Beispiels unterlassen; es genüge, darauf hinzuweisen, dass jedes integrable System

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

sogleich eine integrable lineare partiale Differentialgleichung liefert.

---

15. Integration nicht linearer partialer Differentialgleichungen I. O. Die Differentialgleichung sei

1. $$F(x, y, z, p, q) = 0\,.$$

Die Grösse p ist eine Function von x und y; sie kann indess auch als Function von x, y und z aufgefasst werden, wobei z als unbekannte Function von x und y zu betrachten ist; q wird durch 1. als Function von x, y, z, p definirt.

Sucht man nun unter diesen Voraussetzungen p und q als Functionen von x, y, z, so zu bestimmen, dass

2. $$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

wobei durch die Klammern angedeutet wird, dass die Differentialquotienten unter der Voraussetzung gebildet sind, dass z durch x und y ersetzt ist, so wird der Ausdruck

$$dz = pdx + qdy$$

integrabel und liefert durch Integration z als Function von x und y. Nun ist

3. $$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}\,,\\ \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) &= \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}p\right).\end{aligned}$$

Setzt man dies in 2. ein, so entsteht

4. $$-\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(q - \frac{\partial q}{\partial p}p\right)\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p\,.$$

Ersetzt man hierin q aus 1. durch p, so enthält diese Gleichung nur x, y, z, p, ist also eine lineare partiale Differentialgleichung für p als abhängige und x, y, z als unabhängige Variable. Gelingt es, ein particuläres Integral herzustellen, durch welches p von x, y, z abhängig gemacht wird und das eine willkürliche Constante a enthält, so hat man dies in 1. einzusetzen, und erhält dann aus 1. q durch x, y, z, a ausgedrückt. Beide Werthe hat man in $z = pdx + qdy$ einzusetzen und dann zu integriren. Das Integral enthält ausser a noch eine willkürliche Constante, ist also ein vollständiges Integral; in bekannter Weise kann man dann das zugehörige allgemeine und das singuläre Integral herstellen.

16. Beispiele. A. Aus der Gleichung

$$pq - z = 0$$

folgt

$$q = \frac{z}{p}\,,$$

daher ist

$$-\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{z}{p^2}\,, \quad q - \frac{\partial q}{\partial p}p = \frac{2z}{p}\,, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p = 1\,.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ergiebt sich zu

$$\frac{z}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2z}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = 1\,.$$

Dieselbe hat die particuläre Lösung

$$p = y + a\,.$$

Substituirt man dies in die Differentialgleichung, so folgt

$$q = \frac{z}{y + a}\,.$$

Wenn man diese Werthe für p und q in $z = pdx + qdy$ einsetzt, so erhält man

$$dz = (y + a)dx + \frac{z}{y + a}dy.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a,$$

$$z = (y + a)x + f(y),$$

wobei $f(y)$ eine unbestimmte Function von y bezeichnet. Führt man diesen Werth von z ein in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y + a},$$

so ergiebt sich

$$f'(y) = \frac{f(y)}{y + a},$$

woraus durch Integration hervorgeht

$$f(y) = b(y + a).$$

Das vollständige Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$z = (y + a)(x + b);$$

das allgemeine Integral geht durch Elimination von a aus den Gleichungen hervor

$$z = (y + a)(x + \varphi[a])$$

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0,$$

worin φ eine willkürliche Function bezeichnet.

B. $$px + qy + pq - z = 0.$$

Hieraus folgt

$$q = \frac{z - px}{y + p}, \quad \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{xy + z}{(y + p)^2},$$

$$q - \frac{\partial q}{\partial p}p = \frac{1}{(y + p)^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}dp = 0.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ist

$$\frac{xy + z}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Derselben wird durch die Annahme $p = a$ genügt; hieraus folgt

$$q = (z - ax) : (y + a),$$

und aus beiden Werthen

$$dz = adx + \frac{z - ax}{y + a}dy.$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \text{also} \quad z = ax + f(y),$$

wobei f eine noch unbestimmte Function bezeichnet. Aus diesem Werthe von z ergiebt sich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(y);$$

und daher zur Bestimmung von f

$$f'(y) = \frac{(ax + f) - ax}{y + a} = \frac{f}{y + a},$$

also

$$f = b(y + a).$$

Daher ergiebt sich das vollständige Integral

$$z = ax + by + ab.$$

Das allgemeine Integral besteht aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + (y + a)\varphi(a),$$

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0,$$

worin φ willkürlich ist.

Für ein singuläres Integral hat man die Gleichungen

$$x + b = 0, \quad y + a = 0;$$

werden die hieraus folgenden Werthe von a und b in das vollständige Integral eingesetzt, so erhält man das singuläre Integral

$$z = -xy,$$

das, wie man sich leicht überzeugt, der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Das singuläre Integral stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar; das vollständige für bestimmte Werthe von a und b eine Tangentenebene dieser Fläche; das allgemeine irgend eine abwickelbare Fläche, die der singulären Lösung umgeschrieben ist, deren Tangentenebenen also eine Auswahl aus den dem vollständigen Integrale entspringenden bilden.

17. Die Integration einer nicht linearen Differentialgleichung mit drei Variabeln kann auch mit der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form

1. $$Pdx + Qdy + Rdz + Sdp = 0$$

in Zusammenhang gebracht werden.

Der gegebenen Differentialgleichung entnimmt man den Werth von q und substituirt ihn in

2. $$dz = pdx + qdy.$$

Die Gleichung 2. geht hierdurch in eine Gleichung von der Form 1. über. Man integrirt dieselbe durch zwei Gleichungen, die eine willkürliche Function enthalten und eliminirt dann p aus diesen Gleichungen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$pq - z = 0$$

giebt

$$p^2dx + zdy - pdz = 0.$$

Daher ist, wenn man in § 26, No. 8 t durch p ersetzt,

$$\begin{array}{llll}
P = p^2, & Q = z, & R = p, & S = 0, \\
P_x = 0, & Q_x = 0, & R_x = 0, & S_x = 0, \\
P_y = 0, & Q_y = 0, & R_y = 0, & S_y = 0, \\
P_z = 0, & Q_z = 1, & R_z = 0, & S_z = 0, \\
P_p = 2p, & Q_p = 0, & R_p = -1, & S_p = 0.
\end{array}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{P} = -z, \quad \mathfrak{Q} = p^2, \quad \mathfrak{R} = 2pz, \quad \mathfrak{S} = p^2.$$

Das System simultaner Gleichungen § 26, No. 8, 2 ist daher

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{p^2} = \frac{dz}{2pz} = \frac{dp}{p^2}.$$

Die Integralgleichungen hierzu sind

$$z = ap^2, \quad x = ap + b, \quad y = p + c.$$

Aus denselben folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = p^2, \quad \gamma = ap^2.$$

Unterdrückt man den Faktor p^2, so erhält man daher für a, b, c die Differentialgleichung (§ 26, No. 9, 10)

$$db + adc = 0.$$

Diese wird durch das System integrirt

$$b + ac = \varphi(a),$$

$$c = \varphi'(a).$$

Ersetzt man hierin a, b, c durch die Variabeln, so erhält man

$$x + zy - \frac{2z}{p} = \varphi\left(\frac{z}{p^2}\right),$$
$$y - p = \varphi'\left(\frac{z}{p^2}\right).$$

Durch Elimination von p aus beiden Gleichungen ergiebt sich das allgemeine Integral der gegebenen partialen Differentialgleichung.

Denselben Gedankengang kann man befolgen, um eine nichtlineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Variabeln zu integriren. Man wird von einer partialen Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der abhängigen x auf eine Differentialgleichung von der Form geführt

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + \ldots + p_n dx_n,$$

wobei $p_i = \partial x : \partial x_i$, und für einen dieser Differentialquotienten sein aus der Differentialgleichung folgender Werth zu substituiren ist*).

§ 28. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. In der Differentialgleichung

1. $$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

substituiren wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Hierdurch geht dieselbe über in

2. $$\frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Da nun

3. $$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

so erhält man anstatt 2.

4. $$\frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Hieraus folgt (Differentialrechnung § 4, No. 5), dass q eine Function von p ist; und umgekehrt, sobald dies der Fall ist, ist 3. und daher auch 1. erfüllt. Wir setzen daher

5. $$q = \varphi(p),$$

wobei φ eine willkürliche Function bezeichnet. Durch Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x},$$

folglich nach 3.

6. $$\frac{\partial p}{\partial y} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dies ist eine lineare partiale Differentialgleichung I. O. für p. Der Vergleich mit § 27, No. 11. ergiebt

$$P = \varphi'(p), \quad Q = -1, \quad R = 0.$$

Folglich ist das System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integriren

$$dx + \varphi'(p)\, dy = 0, \quad dp = 0.$$

*) Eine Zusammenstellung der Integrationsmethoden für partiale Differentialgleichungen I. O. mit ausführlichen Literaturnachweisen enthält MANSION, Théorie des équations aux derivées partielles du premier ordre. Paris, 1875.

Aus der letzten Gleichung folgt das Integral

$$p = a,$$

und mit Hülfe dessen aus der ersten

$$x + \varphi'(p) y = b,$$

wobei a und b willkürliche Constante bezeichnen. Das Integral von 6. ist daher

7. $$x + \varphi'(p) \cdot y = \psi(p),$$

wobei ψ eine willkürliche Function ist. Ersetzt man in dieser Gleichung

$$\varphi'(p) dp = dq,$$

so erhält man

8. $$x dp + y dq = \psi(p) dp.$$

Da nun

$$d(xp + yq - z) = x dp + p dx + y dq + q dy - \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$
$$= x dp + y dq,$$

so folgt aus 8. durch Integration

9. $$xp + yq - z = \int \psi(p) dp.$$

Setzt man

$$\int \psi(p) dp = \chi(p),$$

wobei χ ebenso willkürlich ist, wie ψ, so erhält man das Integral der vorgelegten Differentialgleichung durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

10. $$q = \varphi(p),\quad xp + yq - z = \chi(p),\quad x + \varphi'(p) y = \chi'(p).$$

Das Integral enthält zwei willkürliche Functionen.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass das Integral eine abwickelbare Fläche darstellt. Denn aus der Gleichung der Tangentenebene

$$T = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

folgen die Coordinaten von T

$$u = \frac{p}{xp + yq - z}, \quad v = \frac{q}{xp + yq - z},$$
$$w = \frac{1}{xp + yq - z}.$$

Daher ist

$$p = \frac{u}{w}, \quad q = \frac{v}{w}, \quad xp + yq - z = \frac{1}{w}.$$

Setzt man dies in die ersten beiden Gleichungen 10., so erhält man für die Ebenencoordinaten der eine Integralfläche berührenden Tangentenebenen die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

11. $$\frac{v}{w} = \varphi\left(\frac{u}{w}\right),$$

12. $$\frac{1}{u} = \chi\left(\frac{u}{w}\right).$$

Die Tangentenebenen der den willkürlichen Functionen φ und χ zugehörigen Integralfläche berühren daher die beiden Flächen 11. und 12.; hierdurch ist die Integralfläche als abwickelbare Fläche charakterisirt (Analyt. Geom. des Raumes, § 10, No. 1 u. f.).

2. Um u als Function der unabhängigen Variabeln x und t so zu bestimmen, dass

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{*)},$$

setzen wir

2. $$u = F(w)$$

wobei F eine willkürliche, w eine noch zu bestimmende Function von x und t bezeichnet. Substituirt man 2. in 1. so erhält man

$$F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + a^2 F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Dieser Gleichung wird unabhängig von der willkürlichen Function F genügt, wenn man w so bestimmt, dass

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

4. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial t} = \pm a \frac{\partial w}{\partial x},$$

Aus 3. folgt

$$w = \mu t + \nu,$$

wobei μ und ν die Variable x enthalten können.

Setzt man dies in 4. ein, so erhält man

$$\mu'' t + \nu'' = 0,$$

woraus folgt

$$\mu'' = \nu'' = 0;$$

also ist

$$\mu = \alpha x + \beta, \quad \nu = \gamma x + \delta,$$

wobei α, β, γ, δ Constante bezeichnen. Hiernach ergiebt sich

$$w = \alpha x t + \beta t + \gamma x + \delta.$$

Substituirt man dies in 5., so erhält man

$$\alpha x + \beta = \pm a(\alpha t + \gamma).$$

Da diese Gleichung unabhängig von x und t erfüllt sein soll, so folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm a\gamma.$$

Man erhält daher

$$w = \beta(x \pm at) + \delta.$$

Man kann wegen der Unbestimmtheit der Function F den Faktor β und das Glied δ in w unterdrücken. Bedenkt man ferner, dass, wenn

$$u = u_0 \text{ und } u = u_1$$

particuläre Lösungen von 1. sind, alsdann auch 1. durch

$$u = u_0 + u_1$$

genügt wird, so erkennt man, dass das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung durch die Gleichung dargestellt wird

$$u = F(x + at) + G(x - at).$$

Man kann die willkürlichen Functionen F und G immer so bestimmen, dass für $t = 0$ die Functionen u und $\partial u : \partial t$ sich in gegebene Functionen von x verwandeln.**)

Verlangt man, dass

*) In der mathematischen Physik wird gezeigt, dass dies die Differentialgleichung ist, welche die Gestalt einer schwingenden elastischen Linie bestimmt, wobei x die Abscisse, u die Ordinate eines Punkts der Linie und t die Zeit bezeichnet.

**) d. i. so, dass für den Anfang der Bewegung die Form der gespannten Linie sowie die Anfangsgeschwindigkeiten aller ihrer Punkte gegebene Werthe haben.

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x), \quad \text{für } t = 0.$$

so kann man zunächst u_0 so bestimmen, dass es der ersteren, und u_1 so, dass es der anderen dieser beiden Bedingungen genügt, und dass

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad u_1 = 0, \quad \text{für } t = 0.$$

Man sieht sofort, dass man für u_0 zu nehmen hat

$$u_0 = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

Denn es ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \tfrac{1}{2} a[f'(x + at) - f'(x - at)],$$

für $t = 0$ hat man daher

$$u_0 = f(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0.$$

Ebenso erkennt man sogleich, dass die für u_1 gegebenen Bedingungen von der Function erfüllt werden

$$u_1 = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda.$$

Durch Addition von u_0 und u_1 erhält man das allgemeine, den gegebenen Bedingungen genügende Integral

$$u = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda,$$

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

geht aus der soeben integrirten hervor, wenn man in der letzteren t, x, a der Reihe nach durch x, y, i ersetzt; das allgemeine Integral derselben ist daher

$$u = F(x + iy) + G(x - iy).$$

5. In die Differentialgleichung

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{*)}$$

substituiren wir versuchsweise

$$u = e^{\alpha x + \beta t};$$

wir erhalten für α und β die Bedingung

$$\beta = a^2 \alpha^2.$$

Daher hat 1. das particuläre Integral

$$u = e^{\alpha x + a^2 \alpha^2 t}.$$

Ersetzen wir hierin α durch $\pm i\alpha$, so entstehen die beiden Lösungen

$$e^{-a^2\alpha^2 t + i\cdot\alpha x}, \quad e^{-a^2\alpha^2 t - i\cdot\alpha x}.$$

Man erhält hieraus neue Lösungen, wenn man diese Grössen mit beliebigen Faktoren multiplicirt und addirt. Nimmt man die Faktoren $\frac{1}{2}e^{-i\cdot\alpha\lambda}$ und $\frac{1}{2}e^{i\cdot\alpha\lambda}$, so erhält man

$$e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x - \lambda).$$

Ertheilt man hierin α und λ der Reihe nach alle möglichen Werthe, multi-

*) Von dieser Gleichung hängt die Temperatur u der Punkte eines Körpers ab, wenn vorausgesetzt wird, dass dieselbe sich nur parallel der X-Achse ändert; t ist die Zeit.

plicirt jedes so entstehende particuläre Integral mit einer von x und t unabhängigen Grösse μ und addirt alle diese doppelt unendlich vielen Produkte, so ist diese Summe ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Um eine unendlich grosse Summe zu vermeiden, nehmen wir μ unendlich klein, und setzen

$$\mu = A\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda\,.$$

Alsdann geht die Summe in ein Doppelintegral über, und man erhält

2. $$u = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha\,(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda\,.$$

Für die untere Grenze der Integration nach α ist 0 und nicht $-\infty$ gewählt worden, weil die zu integrirende Function eine gerade Function für α ist; A bezeichnet eine willkürliche Constante.

5. Man kann die willkürliche Function $\psi(\lambda)$ so bestimmen, dass u für $t = 0$ sich in eine gegebene Function verwandelt. Nach § 11 No. 15, 4 ist

1. $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha\,d\lambda\,.$$

Setzt man in No. 4, 2 $t = 0$, $u = F(x)$ so erhält man

$$F(x) = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \cos\alpha\,(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda\,.$$

Dies wird mit 1. identisch, wenn

$$A = \frac{1}{\pi}\,,\quad \psi(\lambda) = F(\lambda)\,.$$

Die Function u, welche der Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

und die sich für $t = 0$ auf die Function reducirt

$$u = F(x)\,,$$

ist daher

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha\,(x-\lambda)\cdot F(\lambda)\cdot d\alpha\,d\lambda\,^{*)}\,.$$

*) Weiteres findet man in RIEMANN's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, hrsg. von HATTENDORF, Braunschweig 1869.

Ausgleichungsrechnung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Einleitung.

1. Zu zwei gegebenen realen Zahlen a und b kann man die Zahl μ suchen, die a und b möglichst nahe liegt. Als Lösung dieser Aufgabe betrachten wir das arithmetische Mittel von a und b

1. $$\mu = \tfrac{1}{2}(a + b),$$

weil dasselbe um Differenzen von gleichem absoluten Werthe von a und b abweicht. Ebenso wird das arithmetische Mittel μ von n gegebenen Zahlen a_1, $a_2 \ldots a_n$ allgemein als die Zahl betrachtet, die den Zahlen a_1, $a_2 \ldots a_n$ möglichst nahe liegt, denn bei der Gleichung

2. $$\mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

sind die gegebenen Zahlen gleichmässig betheiligt und für den Fall $n = 2$ kommt man auf 1. zurück.

Sollen die gegebenen Zahlen einen verschieden grossen Einfluss auf die Zahl μ haben, so kann man denselben derart abschätzen, dass man sich in den Zahlpunkten a_1, a_2, $a_3 \ldots$ der Reihe nach p_1, p_2, $p_3 \ldots$ Zahlpunkte von gleichem Einflusse vereinigt denkt; alsdann erhält man

3. $$\mu = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}\,.$$

Wirken an einem Hebel gleiche Gewichte in den Abständen a_1, a_2, $a_3 \ldots$ vom Unterstützungspunkte, so können dieselben durch ein Gewicht von $n$facher Grösse ersetzt werden, das am Hebelarme 2. wirkt. Sind die Gewichte ungleich p_1, p_2, $p_3 \ldots$, so werden sie durch ein Gewicht ersetzt, das ihrer Summe gleich ist und den Hebelarm 3. hat

In Rücksicht auf diese mechanische Anwendung bezeichnet man die Faktoren p_1, p_2, $p_3 \ldots$ als die Gewichte der Zahlen a_1, a_2, $a_3 \ldots$

2. Um die Gerade

$$y = ax + b$$

zu bestimmen, die n willkürlich gegebenen Punkten P_1, P_2, $\ldots P_n$ möglichst nahe liegt, bilden wir die Differenzen λ_1, λ_2 der zu den Abscissen x_1, $x_2 \ldots$ der gegebenen Punkte gehörigen Ordinaten der Geraden und der Ordinaten y_1, $y_2 \ldots$

Die Forderung, dass die Gerade den Punkten möglichst nahe liegen soll, wird ihren mathematischen Ausdruck darin finden, dass eine bestimmte Function F

der Differenzen λ_1, $\lambda_2 \ldots$, die zur Abschätzung der Abweichung der Geraden von P_1, $P_2 \ldots$ dient, einen möglichst kleinen Werth erreichen soll. Wenn, wie wir zunächst voraussetzen, die Punkte alle dasselbe Gewicht haben, so wird für F eine symmetrische Function der λ zu wählen sein. Nehmen wir ferner den Grundsatz an, dass nur der absolute Werth, nicht das Vorzeichen der λ entscheidend sein soll, so darf F nur gerade Potenzen der λ enthalten.

Die Bedingungen für das Minimum von

$$F(\lambda_1, \lambda_2 \ldots), \quad \lambda_r = ax_r + b - y_r$$

sind

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \text{d. i.}$$

1. $$\sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot x_r = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = 0.$$

Wir stellen nun noch die Forderung, dass die Coefficienten a und b durch die Gleichungen 1. linear bestimmt sein sollen.

Hieraus folgt, dass $\partial F : \partial \lambda_r$ eine lineare Function der λ_r sein muss.

Wir erhalten daher für F eine symmetrische quadratische Function der λ_r, die nur die Quadrate der λ_r enthält. Da ein gemeinsamer Faktor oder ein von den λ_r unabhängiges Glied ohne Einfluss auf den Eintritt eines Minimums sind, so ergiebt sich für F die Function

2. $$F = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n.$$

Bezeichnen wir λ_r als die Abweichung der Geraden vom Punkte P_r, so liegt hiernach diejenige Gerade den Punkten P_1, $P_2 \ldots P_n$ möglichst nahe, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Punkten P_1, $P_2 \ldots$ ein Minimum wird.

Aus 2. folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = \lambda_r = ax_r + b - y_r.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n = [pq],$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p],$$

so ergeben sich zur Bestimmung von a und b die Gleichungen

3. $$[xx]\, a + [x]\, b = [xy],$$
4. $$[x]\, a + nb = [y].$$

Aus 4. folgt, dass die durch 3. und 4. bestimmte Gerade den Punkt enthält, der die Coordinaten hat

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots), \quad y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots);$$

dies ist der Schwerpunkt der gegebenen Punkte.

3. Zur Bestimmung der Ebene T, welche n gegebenen Punkten P_1, $P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe liegt, genügen die zur Lösung der vorigen Aufgabe getroffenen Bestimmungen. Die Ebene T wird durch die Forderung definirt

1. $$F = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \textit{Minimum},$$
$$\lambda_r = ax_r + by_r + c - z_r,$$

wenn T die Gleichung hat

$$z = ax + by + c.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial a} = \sum \lambda_r x_r = 0,$$
$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial b} = \sum \lambda_r y_r = 0,$$
$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial c} = \sum \lambda_r = 0.$$

Zur Bestimmung von a, b, c hat man daher das lineare System

$$[xx]\, a + [xy]\, b + [x]\, c = [xz],$$
$$[xy]\, a + [yy]\, b + [y]\, c = [yz],$$
$$[x]\, a + [y]\, b + nc = [z].$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass T den Schwerpunkt von P_1, $P_2, \ldots P_n$ enthält.

4. Die lineare Function

1. $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m$$

kann für die gegebenen Werthsysteme

2. $$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{21}, & x_{31} & \ldots \\ x_{12}, & x_{22}, & x_{32} & \ldots \\ x_{13}, & x_{23}, & x_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}, & x_{2n}, & x_{3n} & \ldots \end{array}$$
$$n > m$$

im Allgemeinen nicht die gegebenen Werthe

3. $$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$$

annehmen. Die Function 1., welche für das System 2. solche Werthe annimmt, die den Zahlen 3. möglichst nahe liegen, kann durch geeignete Erweiterung der in No. 2 durchgeführten Betrachtungen ohne neue Annahmen bestimmt werden; nämlich aus der Forderung

4. $$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n = \textit{Minimum},$$
$$\lambda_r = a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + \ldots + a_{m-1} x_{m-1,r} + a_m - y_r.$$

Aus 4. ergiebt sich zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten a_1, $a_2, \ldots a_m$ das lineare System

5. $$\begin{array}{l} [x_1 x_1]\, a_1 + [x_1 x_2]\, a_2 + \ldots + [x_1 x_{m-1}]\, a_{m-1} + [x_1]\, a_m = [x_1 y_1], \\ [x_1 x_2]\, a_1 + [x_2 x_2]\, a_2 + \ldots + [x_2 x_{m-1}]\, a_{m-1} + [x_2]\, a_m = [x_2 y_1], \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ [x_1 x_{m-1}]\, a_1 + [x_2 x_{m-1}]\, a_2 + \ldots + [x_{m-1} x_{m-1}]\, a_{m-1} + [x_{m-1}]\, a_m = [x_{m-1} y_1], \\ [x_1]\, a_1 + [x_2]\, a_2 + \ldots + [x_{m-1}]\, a_{m-1} + n a_m = [y_1]. \end{array}$$

Zufolge der letzten dieser Gleichungen wird die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m = y$$

befriedigt, wenn man statt x_1, x_2, $x_3, \ldots y$ die Werthe

$$\frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \ldots), \quad \frac{1}{n}(x_{12} + x_{22} + \ldots), \ldots \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots),$$

d. i. die arithmetischen Mittel der für die x_1, $x_2, \ldots y$ gegebenen Zahlen setzt.

5. Durch $(m + 1)$ Punkte ist eine Curve C von der Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

unzweideutig bestimmt. Sind n Punkte gegeben und ist $n > m + 1$, so kann man nach der Curve C fragen, welcher die gegebenen Punkte möglichst nahe liegen.

Da die Curvengleichung die zu bestimmenden Constanten a_0, $a_1, \ldots a_m$ linear enthält, so wird man die bisher angewandte Methode auch auf den vorliegenden Fall ausdehnen, und die Curve als Lösung der Aufgabe betrachten, für welche

1. $$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = a_0 + a_1 x_r + a_2 x^2_r + \ldots + a_m x_r^m - y_r.$$

Setzt man die Differentialquotienten von 1. in Bezug auf $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ gleich Null, so erhält man zur Bestimmung der a_k das System

$$\begin{aligned} n a_0 + [x]\, a_1 + [x^2]\, a_2 + \ldots + [x^m]\, a_m &= [y], \\ [x]\, a_0 + [x^2]\, a_1 + [x^3]\, a_2 + \ldots + [x^{m+1}]\, a_m &= [xy], \\ [x^2]\, a_0 + [x^3]\, a_1 + [x^4]\, a_2 + \ldots + [x^{m+2}]\, a_m &= [x^2 y], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [x^m]\, a_0 + [x^{m+1}]\, a_1 + [x^{m+2}]\, a_2 + \ldots + [x^{2m}]\, a_m &= [x^m y]. \end{aligned}$$

6. Die periodische Curve C

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_m \sin mx \end{aligned}$$

ist durch $2m + 1$ Punkte bestimmt.

Sind n Punkte gegeben $(n > 2m + 1)$ und bestimmt man eine diesen Punkten möglichst gut sich anschliessende Curve C wieder durch die Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = a_0 + a_1 \cos x_r + \ldots + b_1 \sin x_r \ldots - y_r,$$

so erhält man für die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots b_1, \ldots$ die Gleichungen

1. $$\begin{aligned} [\cos px]\, a_0 + [\cos x \cos px]\, a_1 + [\cos 2x \cos px]\, a_2 + \ldots + [\cos mx \cos px]\, a_m \\ + [\sin x \cos px]\, b_1 + [\sin 2x \cos px]\, b_2 + \ldots + [\sin mx \cos px]\, b_m \\ = [y \cos px], \\ [\sin px]\, a_0 + [\cos x \sin px]\, a_1 + [\cos 2x \sin px]\, a_2 + \ldots + [\cos mx \sin px]\, a_m \\ + [\sin x \sin px]\, b_1 + [\sin 2x \sin px]\, b_2 + \ldots + [\sin mx \sin px]\, b_m \\ = [y \sin px], \end{aligned}$$

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots m.$$

Diese Gleichungen lassen in einem besonderen Falle eine einfache Lösung zu. Sind nämlich die x so gewählt, dass

$$x_{r+1} = r\varphi, \quad \varphi = 2\pi : n,$$

so erhalten die Gleichungen Coefficienten von der Form

$$\begin{aligned} [\cos px \cos qx] &= 1 + \cos p\varphi \cos q\varphi + \cos 2p\varphi \cos 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \cos(n-1)q\varphi, \\ [\cos px \sin qx] &= \cos p\varphi \sin q\varphi + \cos 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi, \\ [\sin px \sin qx] &= \sin p\varphi \sin q\varphi + \sin 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \sin(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi. \end{aligned}$$

In diesen Reihen setzen wir

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad \sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$
$$\cos\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

und erhalten

2. $$\begin{aligned} [\cos px \cos qx] &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p - q)\varphi + \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p + q)\varphi, \\ [\cos px \sin qx] &= \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \sin k(p + q)\varphi - \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \sin k(p - q)\varphi, \\ [\sin px \sin qx] &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p - q)\varphi - \frac{1}{2}\sum_0^{n-1} \cos k(p + q)\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man in

$$(1 - z^n) : (1 - z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$$

für z die complexe Zahl

$$z = \cos(p \pm q)\varphi + i \sin(p \pm q)\varphi,$$

so ist, wenn die ganzen Zahlen p und q nicht gleich sind, $1 - z$ von Null verschieden und $z^n = 1$; daher ist

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0.$$

Die Sonderung des Realen und Imaginären giebt

3. $$\sum_0^{n-1} \cos k(p \pm q)\varphi = 0, \quad \sum_1^{n-1} \sin k(p \pm q)\varphi = 0.$$

Für den Fall $p = q$ erhält man aus 2. unter Rücksicht auf 3.

4. $$[\cos^2 px] = \tfrac{1}{2}n, \quad [\sin^2 px] = \tfrac{1}{2}n.$$

Mit Hülfe von 2., 3., 4. ergeben die Gleichungen 1. die Auflösungen

$$a_0 = \frac{1}{n}[y], \quad a_k = \frac{2}{n}[y \cos kx], \quad b_k = \frac{2}{n}[y \sin kx].\text{*)}$$

6. Die Methode der kleinsten Quadrate (Quadratsummen), die wir in den Abschnitten No. 2 bis 5 angewandt haben, lässt sich auch in den Fällen No. 1 verwenden. Wird zu den gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$ eine Zahl μ so bestimmt, dass

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda^2_n = Minimum,$$
$$\lambda_r = \mu - a_r,$$

so folgt zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$(\mu - a_1) + (\mu - a_2) + (\mu - a_3) + \ldots + (\mu - a_n) = 0,$$

aus welcher man erhält

$$\mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

§ 2. Beobachtungsfehler.

1. Bei keiner Messung kann man mit Sicherheit behaupten, dass das durch sie gewonnene Resultat vollkommen genau sei. Auch das sorgfältigst gearbeitete Instrument hat Fehler; auch der vortrefflichste Beobachter, dessen Sinne und Urtheil auf's Beste beanlagt und geschult sind, gelangt an Grenzen, an welchen sein Urtheil anfängt, unsicher zu werden.

Die Fehler einer Messung theilt man ein in constante und in zufällige Fehler. Unter constanten Fehlern versteht man Fehler, die durch solche Abweichungen vom idealen Baue des Instruments herrühren, welche während einer hinlänglich grossen Zeit sich nicht merklich ändern, sowie die von der Individualität des Beobachters abhängigen Fehler, sofern sie sich immer in einem bestimmten Sinne geltend machen. Alle übrigen Fehler, die von den wechselnden äusseren Umständen (Handhabung, gegenseitiger Lage der Theile des Instruments, Temperatur der Luft, Bestrahlung durch die Sonne u. s. w.) in einer Weise abhängen, dass sich die Bestimmung ihres Einflusses der Beurtheilung entzieht, werden als zufällige bezeichnet.

Die constanten Instrumentfehler, sowie die constanten Fehler des Beobachters müssen zunächst möglichst scharf bestimmt werden; dies erfolgt durch Messungen, die genaue Prüfungen der Resultate zulassen; diese Messungen werden unter möglichst günstigen Umständen und mit der grössten Sorgfalt ausgeführt, so dass man sicher sein kann, dass dabei die zufälligen Fehler auf ein Minimum herab-

*) Weitere Ausführungen, auch in Bezug auf Curven von gegebenem Charakter, die zwischen gegebenen Abscissen einer gegebenen Curve möglichst nahe liegen, sowie historische und kritische Bemerkungen über die verschiedenen Methoden, die Ausgleichungsrechnung zu begründen, findet man bei HENKE, Die Methode der kleinsten Quadrate. Inauguraldissertation. Leigzig 1868.

gedrückt sind. Die zufälligen Instrumentfehler, sowie die zufälligen Fehler des Beobachters fassen wir unter der Bezeichnung zufällige Messungsfehler zusammen.

Wir nehmen in allen folgenden Betrachtungen an, dass die bestimmbaren constanten Fehler ermittelt und die Beobachtungsresultate dementsprechend verbessert worden sind; so dass nur noch die Ausgleichung der zufälligen Messungsfehler erübrigt.

2. Hat man eine Grösse direkt wiederholt gemessen, oder hat man zur Bestimmung mehrerer Unbekannten mehr Gleichungen durch Messung bestimmt, als zur Ermittelung der Unbekannten nöthig sind, so werden die für eine Unbekannte direkt erhaltenen Werthe, bez. die für mehrere Unbekannte aus verschiedenen Combinationen der Gleichungen abgeleiteten Werthe zufolge der zufälligen Messungsfehler nicht vollständig übereinstimmen; es kommt nun darauf an, für die Unbekannten solche Werthe zu ermitteln, die den Messungsresultaten sich möglichst gut anschliessen.

Die Berechnung dieser Werthe führt den Namen Ausgleichungsrechnung.

Dieselben Gründe, welche uns bei den Aufgaben des vorigen Paragraphen auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geführt haben, sind auch für die Ausgleichungsrechnung maassgebend*); wir stellen daher als Princip der Ausgleichungsrechnung den Satz auf: Die ausgeglichenen Werthe der Unbekannten sind so zu wählen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen im Minimum wird, wobei wir unter Abweichung den Unterschied des Werthes einer Function, den sie für die durch die Ausgleichung gefundenen Werthe der Unbekannten annimmt, und des durch Beobachtung gefundenen Betrags der Function verstehen.

§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen.

1. Hat man durch n direkte Messungen für dieselbe unbekannte Grösse die mit den zufälligen Fehlern behafteten Bestimmungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ erhalten, und hat man keine Veranlassung, diesen Beobachtungen ungleiche Gewichte zuzuerkennen, so ist der ausgeglichene Werth der Unbekannten (§ 1, 1)

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n).$$

Die Abweichungen sind

$$\lambda_1 = x - x_1, \quad \lambda_2 = x_2 - x, \ldots.$$

Unter der mittleren Abweichung λ versteht man die Zahl, deren Quadrat das arithmetische Mittel der einzelnen Abweichungen ist. Hiernach ist

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2).$$

Die mittelbare Abweichung dient dazu, die Uebereinstimmung der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots$ abzuschätzen; je kleiner λ bei verschiedenen Beobachtungsreihen für dieselbe Unbekannte sich ergiebt, um so grössere Uebereinstimmung zeigen die Beobachtungen der betreffenden Reihe.

2. Beispiel.

Für die geographische Breite der Ofener Sternwarte fand Littrow folgende 10 Resultate**)

*) Diese Begründung der Ausgleichungsrechnung gab Henke, a. a. O.

**) Liagre, Calcul des probabilités et théorie des erreurs, Bruxelles 1852. pag. 204.

No.	x_k	λ_k	λ^2_k
1	47° 29′ 11″,5	+ 0,5	0,25
2	12″,2	— 0,2	0,04
3	12″,8	— 0,8	0,64
4	11″,2	+ 0,8	0,64
5	11″,7	+ 0,3	0,09
6	12″,3	— 0,3	0,09
7	11″,5	+ 0,5	0,25
8	11″,9	+ 0,1	0,01
9	12″,4	— 0,4	0,16
10	12″,5	— 0,5	0,25
$x =$	47° 29′ 12″,0		

Da die x_k nur in den Sekunden-Einern abweichen, so genügt es, zur Berechnung von x die Einer und Zehntel zu addiren (die Summe beträgt 20) und den zehnten Theil der Summe zu 47° 29′ 10″ zu addiren.

Aus der letzten Columne folgt

$$[\lambda^2] = 2{,}42.$$

Daher ist

$$\lambda = \sqrt{2{,}42 : 10} = \pm 0{,}49.$$

3. Wenn man Grund hat, einzelne Beobachtungen einer Reihe für wesentlich zuverlässiger (oder minder zuverlässig) zu halten als die anderen, so drückt man diesen Unterschied dadurch aus, dass man den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegt.

Haben die Beobachtungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Reihe nach die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, so ist der ausgeglichene Werth

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}.$$

Die aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$$

bestimmte Zahl bezeichnet man in diesem Falle als die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit.

4. Beispiel.

Bei einem Repetitionstheodoliten ist ausser dem Fernrohre auch der horizontale Theilkreis um eine verticale Achse drehbar; man kann daher das Fernrohr für sich allein um die Verticale drehen, während der Theilkreis feststeht, kann aber auch den Theilkreis in fester Verbindung mit dem Fernrohre drehen. Um den Winkel zwischen den Verticalebenen zweier Objecte A und B zu bestimmen, richtet man das Fernrohr auf A und liest die Stellung des Nonius ab; dreht dann auf B, verbindet das Fernrohr mit dem Theilkreise und dreht beide zusammen zurück, bis ersteres auf A gerichtet ist u. s. f. Nachdem die Drehung des Fernrohrs von A nach B genügend oft wiederholt worden ist, liest man die Stellung des Nonius ab und addirt zur Ablesung die Anzahl ganzer Umdrehungen, die der Nonius während der Beobachtungen auf dem horizontalen Theilkreise zurückgelegt hat. Zieht man von der so gewonnenen Zahl die erste Stellung des Nonius ab und dividirt die Differenz durch die Zahl p, welche angiebt, wie oft das Fernrohr von A nach B gedreht worden ist, so erhält man den gesuchten Winkel. Durch eine grössere Anzahl von Repetitionen eliminirt man fast ganz den Einfluss des Theilungsfehlers des Instruments, so dass nur noch der Einfluss der

Visurfehler übrig bleibt; man kann einen durch p Repetitionen gemessenen Winkel als das arithmetische Mittel aus p Einzelmessungen betrachten und setzt daher das Gewicht desselben der Zahl p proportional.

Man hat einen Winkel 14 mal durch Repetition gemessen und betrachtet die Repetitionszahlen p als die Gewichte der Beobachtungen; die Zahlen p, die Messungsresultate, den ausgeglichenen Werth des Winkels, die damit berechneten λ_k, λ_k^2 und $p_k\lambda_k^2$ sind in folgender Tafel zusammengestellt; die mit $p_k x_k$ überschriebene Columne enthält der Kürze wegen nur die Secunden von x_k mit p_k multiplicirt.

No.	p_k	x_k	$p_k x_k$	λ_k	$\lambda^2{}_k$	$p_k\lambda^2{}_k$
1	5	17° 56′ 45″,00	225,00	— 5,22	27,248	136,24
2	4	31,25	125,00	+ 8,53	72,761	291,04
3	5	42,50	212,50	— 2,72	7,398	36,99
4	3	45,00	135,00	— 5,22	27,248	81,74
5	3	37,50	112,50	+ 2,28	5,198	15,59
6	3	38,33	115,00	+ 1,45	2,103	6,31
7	3	27,50	82,50	+ 12,28	150,798	452,39
8	3	43,33	130,00	— 3,55	12,603	37,81
9	4	40,63	162,50	— 0,85	0,723	2,89
10	2	36,25	72,50	+ 3,53	12,461	24,92
11	3	42,50	127,50	— 2,72	7,398	22,19
12	3	39,17	117,50	+ 0,61	0,372	1,12
13	2	45,00	90,00	— 5,22	27,248	54,49
14	3	40,83	122,50	— 1,05	1,103	3,31
	46		1830,00			1167,03

Die letzte Zeile enthält die Summen

$$[p],\ [px],\ [p\lambda^2].$$

Aus derselben ergiebt sich

$$x = 17^\circ\, 56' + \frac{1830'',00}{46} = 17^\circ\, 56'\, 39'',78\,,$$

$$\lambda = \pm\, 5'',037\,.$$

5. Man habe durch direkte Messungen und Ausgleichung für k Zahlen die ausgeglichenen Werthe X_1, X_2, X_3, ... und die zugehörigen mittleren Abweichungen Λ_1, Λ_2, Λ_3, ... erhalten; setzt man eine Grösse X mit Hülfe der X_1, X_2, .. und gegebener Coefficienten a_1, a_2, ... in der Weise linear zusammen

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \ldots,$$

so fragt es sich, wie gross die mittlere Abweichung Δ dieser linearen Function ist, wenn man unter einer einzelnen Abweichung den Unterschied der mit Hülfe der ausgeglichenen Werthe hergestellten Zahl X und der mit Hülfe irgend einer Combination der Beobachtungswerthe hergestellten bezeichnet.

Ist $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, $\lambda_{3\gamma}$, ... eine Combination einzelner Abweichungen der X_1, X_2, X_3, ..., so ist die dazu gehörige einzelne Abweichung der linearen Function

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_1\lambda_{1\alpha} + a_2\lambda_{2\beta} + a_3\lambda_{3\gamma} + \ldots$$

Hieraus folgt

$$\Delta^2_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_1^2\lambda_{1\alpha} + a_2^2\lambda^2_{2\beta} + a_3^2\lambda^2_{3\gamma} + \ldots$$
$$+ 2a_1a_2\lambda_{1\alpha}\lambda_{2\beta} + 2a_1a_3\lambda_{1\alpha}\lambda_{3\gamma} + \ldots.$$

Wir ersetzen hierin $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, ... der Reihe nach durch jede Combination der einzelnen Abweichungen und nehmen das arithmetische Mittel aller so entstehenden Werthe $\Delta^2_{\alpha\beta\gamma\ldots}$.

Sind n_1, n_2, n_3 ... Beobachtungen zur Bestimmung von X_1, X_2, X_3 ... gemacht worden, so ist die Anzahl aller Combinationen

$$m = n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Für das arithmetische Mittel Δ^2 hat man

$$m\Delta^2 = a_1^2\cdot\frac{m}{n_1}\Sigma\lambda^2_{1\alpha} + a_2^2\frac{m}{n_2}\Sigma\lambda^2_{2\beta} + \ldots$$
$$+ 2a_1a_2\cdot\frac{m}{n_1n_2}\Sigma\lambda_{1\alpha}\Sigma\lambda_{2\beta} + 2a_1a_3\cdot\frac{m}{n_1n_3}\Sigma\lambda_{1\alpha}\Sigma\lambda_{3\gamma} + \ldots$$

Aus dem Begriffe des arithmetischen Mittels folgt, dass die algebraische Summe der Abweichungen aller einzelnen Beobachtungen vom Mittel verschwindet, also ist

$$\Sigma\lambda_{1\alpha} = \Sigma\lambda_{2\beta} = \Sigma\lambda_{3\gamma} = \ldots = 0.$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\Sigma\lambda^2_{1\alpha} = n_1\Lambda_1^2,\quad \Sigma\lambda^2_{2\alpha} = n_2\Lambda_2^2\ \ldots,$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\Delta^2 = a_1^2\Lambda_1^2 + a_2^2\Lambda_2^2 + a_3^2\Lambda_3^2 + \ldots$$

6. Ist X keine lineare Function der X_k, so kann man unter den Voraussetzungen, dass der TAYLOR'sche Satz auf X für die Werthe der X_k, welche innerhalb der durch Beobachtung gewonnenen Zahlen liegen, anwendbar ist, und dass man nur die erste Potenz der Abweichungen zu berücksichtigen braucht, setzen

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_1\lambda_{1\alpha} + a_2\lambda_{2\beta} + a_3\lambda_{3\gamma} + \ldots$$

wobei

$$a_i = \frac{\partial X}{\partial X_i},$$

wenn man in diesen Differentialquotienten für X_1, X_2, .. die ausgeglichenen Werthe setzt.

7. Beispiel. Man hat in einem Dreiecke ABC die Seiten $BC = a$ und die Winkel $CBA = \beta$ und $BCA = \gamma$ bestimmt; diese Werthe seien mit den mittleren Abweichungen Λ_α, Λ_β, Λ_γ behaftet. Für den dritten Winkel α, den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises und die beiden andern Seiten b und c hat man

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma,$$

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha},\quad b = 2r\sin\beta,\quad c = 2r\sin\gamma.$$

Die mittlere Abweichung von α ist

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{\Lambda_\beta^2 + \Lambda_\gamma^2}.$$

Da man hat

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{2\sin\alpha},\quad \frac{\partial r}{\partial\alpha} = -\frac{a\cos\alpha}{2\sin^2\alpha},$$

so ist

$$\Lambda_r = \frac{1}{2\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\Lambda_a^2 + a^2\cos^2\alpha\cdot\Lambda_\alpha^2}\,.$$

Ferner ergeben sich

$$\Lambda_b = 2\sqrt{\sin^2\beta\cdot\Lambda_r^2 + r^2\cos^2\beta\cdot\Lambda_\beta^2},$$
$$\Lambda_c = 2\sqrt{\sin^2\gamma\cdot\Lambda_r^2 + r^2\cos^2\gamma\cdot\Lambda_\gamma^2}.$$

§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

1. Für die gegebenen Coefficienten

$$\begin{array}{llll} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots\ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots\ldots \end{array}$$

habe man die Werthe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n$$

der linearen Functionen

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots \end{array}$$

beobachtet; allen Beobachtungen sei dasselbe Gewicht zuerkannt. Die Anzahl der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ sei kleiner als n. Die ausgeglichenen Werthe der Unbekannten erhält man durch die Bedingung (§ 1, No. 4),

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \textit{Minimum}$$

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \ldots - u_r$$

aus dem linearen Systeme

$$\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots = [au], \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots = [bu], \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots = [cu], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Diese Gleichungen werden nach Gauss als die Normalgleichungen bezeichnet. In der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & \ldots \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & \ldots \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & \ldots \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

haben symmetrisch zur Hauptdiagonale stehende Glieder denselben Coefficienten. Bezeichnet man den Coefficienten des $k$ten Gliedes der $i$ten Zeile mit α_{ik}, so folgen aus 1. die ausgeglichenen Werthe

2.
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}([au]\alpha_{11} + [bu]\alpha_{21} + [cu]\alpha_{31} + \ldots), \\ y &= \frac{1}{D}([au]\alpha_{12} + [bu]\alpha_{22} + [cu]\alpha_{32} + \ldots), \\ z &= \frac{1}{D}([au]\alpha_{13} + [bu]\alpha_{23} + [cu]\alpha_{33} + \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2. Mit Hülfe der soeben berechneten Werthe erhält man für die Abweichung einer Beobachtung

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \ldots - u_r.$$

Für die mittlere Abweichung hat man

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2).$$

Ersetzt man in den Lösungen No. 1, 2 die u_r überall durch

$$u'_r = u_r + \lambda_r,$$

so ändern sich die $x, y, z, \ldots$ nicht; denn die ausgeglichenen Werthe erfüllen die Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = u_1', \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = u_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots = u_n', \end{array}$$

folglich sind $x, y, z, \ldots$ die Werthe, welche sich aus diesem Systeme durch die Methode der kleinsten Quadrate ergeben, also die Werthe, welche aus No. 1, 2 hervorgehen, wenn man darin die u_r durch die u_r' ersetzt.

Um die Schärfe der Bestimmung jeder einzelnen Unbekannten abzuschätzen, kann man an jeder Beobachtung u_r eine Correction anbringen, die dem absoluten Werthe nach der mittleren Abweichung λ gleich ist, und die zu diesen corrigirten u gehörigen corrigirten $x, y, z \ldots$ nach No. 1, 2 berechnen. Da man keine Veranlassung hat, positive Correctionen vor den negativen auszuzeichnen, so wird man alle möglichen Vorzeichencombinationen für λ wählen, und aus den resultirenden Correctionen der Unbekannten mittlere Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y \ldots$ berechnen.

In der Gleichung

$$x = \frac{1}{D}([au']\alpha_{11} + [bu']\alpha_{21} + \ldots)$$

ist u_r' das Mittel aus $u_r' + \lambda$ und $u_r' - \lambda$; zur Bestimmung von λ_x kann man daher die Gleichung für Δ § 3, No. 5 benutzen Setzt man in derselben

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \ldots = \lambda,$$

so erhält man

1. $$D^2 \cdot \lambda_x^2 = \lambda^2[(a_1\alpha_{11} + b_1\alpha_{12} + \ldots)^2 + (a_2\alpha_{11} + b_2\alpha_{12} + \ldots)^2 + \ldots].$$

Setzt man

2. $$a_i\alpha_{11} + b_i\alpha_{12} + \ldots = A_i,$$

multiplicirt die hieraus für $i = 1, 2, 3, \ldots$ hervorgehenden Gleichungen der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$, und addirt, so erhält man

3. $$[aA]\alpha_{11} + [bA]\alpha_{12} + \ldots = [AA].$$

Multiplicirt man die Gleichungen 2. mit a_i und addirt, so entsteht

$$[aa]\alpha_{11} + [ab]\alpha_{12} + \ldots = [aA].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Determinante D; daher folgt

$$[aA] = D.$$

Multiplicirt man dagegen 2. mit b_i, bez. $c_i, d_i, \ldots$, so erhält man

$$\begin{array}{l} [ab]\alpha_{11} + [bb]\alpha_{12} + \ldots = [bA], \\ [ac]\alpha_{11} + [bc]\alpha_{12} + \ldots = [cA], \\ [ad]\alpha_{11} + [bd]\alpha_{12} + \ldots = [dA], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen verschwinden identisch. Folglich ergiebt sich aus 3.

$$[AA] = D \cdot \alpha_{11}.$$

Daher hat man schliesslich

4.
$$\begin{aligned} \lambda_x^2 &= \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{11}}{D}, \quad \text{und ebenso} \\ \lambda_y^2 &= \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{22}}{D}, \\ \lambda_z^2 &= \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{33}}{D}, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je schärfer die Bestimmung einer Unbekannten, je kleiner also die auf sie gemäss dieser Gleichungen entfallende mittlere Abweichung ist, ein um so grösseres Gewicht hat man derselben beizulegen.

Wir bezeichnen das Reciprocum vom Quadrate der mittleren Abweichung direkt als Gewicht der Unbekannten und haben daher, wenn die Gewichte mit $p_x, p_y, p_z, \ldots$ bezeichnet werden,

5. $$p_x = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{D}{\alpha_{11}}, \quad p_y = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{D}{\alpha_{22}}, \ldots,$$

6. $$p_x : p_y : p_z = \ldots = \frac{1}{\alpha_{11}} : \frac{1}{\alpha_{22}} : \frac{1}{\alpha_{33}} : \ldots$$

3. Numerische Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen. Zur Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen bedient man sich mit Vortheil hinlänglich ausführlicher Quadrattafeln. Aus denselben entnimmt man zunächst direkt die Glieder der Summen

$$[aa],\ [bb],\ [cc],\ \ldots.$$

Um auch die übrigen Summen

$$[ab],\ [ac],\ [bc],\ \ldots.$$

zu erhalten, kann man von einer der Gleichungen Gebrauch machen

$$ab = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2],$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2],$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2].$$

Wenn man die Normalgleichungen auflösen und zugleich die Gewichte der einzelnen Unbekannten bestimmen will, so wird man am zweckmässigsten das folgende Verfahren zur Auflösung eines allgemeinen linearen Systems einschlagen. Das System sei

$$\begin{array}{l}
(11\cdot1)x_1 + (12\cdot1)x_2 + (13\cdot1)x_3 + \ldots + (1n\cdot1)x_n = (1u\cdot1),\\
(21\cdot1)x_1 + (22\cdot1)x_2 + (23\cdot1)x_3 + \ldots + (2n\cdot1)x_n = (2u\cdot1),\\
(31\cdot1)x_1 + (32\cdot1)x_2 + (33\cdot1)x_3 + \ldots + (3n\cdot1)x_n = (3u\cdot1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n1\cdot1)x_1 + (n2\cdot1)x_2 + (n3\cdot1)x_3 + \ldots + (nn\cdot1)x_n = (nu\cdot1).
\end{array}$$

Hierin sind die Coefficienten der Einfachheit wegen durch in Klammern geschlossene Ziffernzusammenstellungen angedeutet; $(ik\cdot1)$ bedeutet den Coefficienten von x_k in der $i$ten Gleichung des 1. Systems; letztere Unterscheidung ist nothwendig, weil noch mehrere Systeme behufs der Auflösung des gegebenen aufgestellt werden; $(iu\cdot1)$ bedeutet die rechte Seite der i-ten Gleichung des 1. Systems.

Aus der Elemententafel

1. $$\begin{array}{llllll}
(11\cdot1) & (12\cdot1) & (13\cdot1) & \ldots & (1n\cdot1) & (1u\cdot1),\\
(21\cdot1) & (22\cdot1) & (23\cdot1) & \ldots & (2n\cdot1) & (2u\cdot1),\\
(31\cdot1) & (32\cdot1) & (33\cdot1) & \ldots & (3n\cdot1) & (3u\cdot1),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(n1\cdot1) & (n2\cdot1) & (n3\cdot1) & \ldots & (nn\cdot1) & (nu\cdot1)
\end{array}$$

berechnen wir eine neue Tafel,

2. $$\begin{array}{lllll}
(22\cdot2) & (23\cdot2) & \ldots & (2n\cdot2) & (2u\cdot2),\\
(32\cdot2) & (33\cdot2) & \ldots & (3n\cdot2) & (3u\cdot2),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(n2\cdot2) & (n3\cdot2) & \ldots & (nn\cdot2) & (nu\cdot2),
\end{array}$$

bei welcher

3. $$(ik\cdot2) = (ik\cdot1) - \frac{(i1\cdot1)}{(11\cdot1)}\cdot(1k\cdot1),$$
$$(iu\cdot2) = (iu\cdot1) - \frac{(i1\cdot1)}{(11\cdot1)}\cdot(1u\cdot1).$$

Während wir die $(ik\cdot2)$ vollständig berechnen, wollen wir die $(iu\cdot2)$ als lineare Functionen der $(iu\cdot1)$ dargestellt lassen. Die Tafel 2. gehört zu dem Systeme, welches durch Elimination von x_1 aus der ersten Gleichung in Verbindung mit der zweiten, dritten, u. s. w. Gleichung hervorgeht.

In derselben Weise, wie man von 1. zu 2. übergeht, gelangt man von 2. zu einer neuen Coefficiententafel 3., von dieser zu einer vierten Tafel u. s. w. Wie man sofort sieht, erhält man durch genügend häufige Wiederholung dieses Verfahrens schliesslich die Gleichung

4. $$(nn\cdot n)\,x_n = (nu\cdot n).$$

Hierbei ist die rechte Seite eine lineare Function der $(iu\cdot1)$, in welcher $(nu\cdot1)$ den Coefficienten 1. hat. Vergleicht man die aus 4. hervorgehende Auflösung

5. $$x_n = \frac{(nu\cdot1) + \ldots}{(nn\cdot n)}$$

mit

$$x_n = \frac{\alpha_{nn}\cdot(nu\cdot1) + \ldots}{D},$$

wobei D die Determinante des Systems 1. und α_{nn} den Coefficienten von $(nn\cdot1)$ in dieser Determinante bezeichnet, so ergiebt sich

6. $$(nn\cdot n) = \frac{D}{\alpha_{nn}}.$$

Dividirt man die Glieder der ersten Zeile der Determinante

$$D = \begin{vmatrix}
(11\cdot1)\,(12\cdot1) & \ldots & (1n\cdot1)\\
(21\cdot1)\,(22\cdot1) & \ldots & (2n\cdot1)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
(n1\cdot1)\,(n2\cdot1) & \ldots & (nn\cdot1)
\end{vmatrix}$$

durch $(11\cdot1)$, multiplicirt dann die Zeile der Reihe nach mit

$$(21\cdot1),\ (31\cdot1),\ \ldots.\ (n1\cdot1)$$

und subtrahirt diese Zeilen von Produkten der Reihe nach von der 2., 3., . . $n$ten Zeile, so erhält man

$$\frac{D}{(11\cdot1)} = \begin{vmatrix}
(22\cdot2)\,(23\cdot2) & \ldots & (2n\cdot2)\\
(32\cdot2)\,(33\cdot2) & \ldots & (3n\cdot2)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
(n2\cdot2)\,(n3\cdot2) & \ldots & (nn\cdot2)
\end{vmatrix}.$$

Dividirt man hier wieder die Elemente der ersten Zeile mit dem ersten Elemente, multiplicirt dann mit den Anfangselementen der 2., 3., . . . Zeile und subtrahirt diese Produkte nach einander von den Elementen der 2., 3., . . . Zeile, so entsteht

$$\frac{D}{(11\cdot1)(22\cdot2)} = \begin{vmatrix}
(33\cdot3)\,(34\cdot3) & \ldots\\
(43\cdot3)\,(44\cdot3) & \ldots\\
\ldots & \ldots
\end{vmatrix}.$$

Wenn man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, so erhält man schliesslich

$$\frac{D}{(11\cdot1)(22\cdot2)(33\cdot3)\ldots(n-1,\ n-1\cdot n-1)} = (nn\cdot n);$$

also ist

7. $$D = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (nn \cdot n),$$

und daher mit Rücksicht auf 6.

8. $$\alpha_{nn} = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (n-1,\ n-1 \cdot n-1).$$

Ohne von dem numerischen Werthe der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch zu machen, substituirt man 5. in die erste Gleichung des $(n-1)$ten Systems; diese Gleichung enthält ausser x_n noch x_{n-1}; nach der Substitution erhält man x_{n-1} als lineare Function der $(iu \cdot 1)$.

In die erste Gleichung des $(n-2)$ten Systems setzt man nun die aufgefundenen Werthe von x_n und x_{n-1} u. s. f., bis man endlich alle x als lineare Functionen der $(iu \cdot 1)$ ausgedrückt hat.

Multiplicirt man die Coefficienten, welche $(iu \cdot 1)$ in diesen Functionen haben, mit der unter 7. gefundenen Determinante D, so erhält man die Coefficienten α_{ik}, welche die Elemente $(ik \cdot 1)$ in D haben.

Handelt es sich um die Auflösung von Normalgleichungen, so sind die Coefficienten der $(iu \cdot i)$ den Gewichten p_i der Unbekannten proportoinal; die in No. 2 definirten Gewichte werden aus den Coefficienten der $(iu \cdot i)$ durch Division durch das Quadrat der mittleren Abweichung λ erhalten.

Setzt man schliesslich für die $(iu \cdot 1)$ die Werthe in die für x_k gefundenen Ausdrücke, so hat man die Auflösung des gegebenen Systems beendet.

Kommt es nur auf diese Auflösung an, und nicht auf die Bestimmung der α_{ik}, so kann bereits vom Beginne der Rechnung an von den numerischen Werthen der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch machen.

4. Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte haben, p_1, p_2, $p_3 \ldots p_n$, so hat man die Summe

$$p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots + p_n \lambda^2{}_n$$

zu einem Minimum zu machen. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Normalgleichungen für den Fall ungleicher Gewichte zu

1. $$\begin{aligned} &[paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots = [pua], \\ &[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \ldots = [pub], \\ &[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \ldots = [puc], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wobei z. B.

$$[pac] = p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 + p_3 a_3 c_3 + \ldots$$

Hat man diese Gleichungen nach No. 3. aufgelöst und mit Hülfe dieser Auflösungen die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen bestimmt, so erhält man aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$$

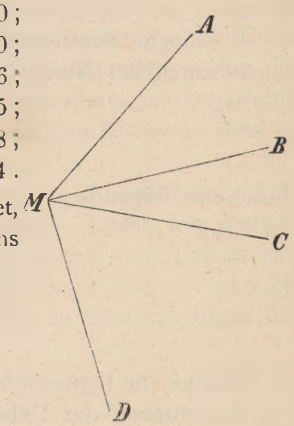
die mittlere Abweichung λ der Gewichtseinheit.

Um die mittleren Abweichungen λ_x, λ_y, ... der ausgeglichenen Werthe der Unbekannten zu erhalten, hat man den vorliegenden Fall dadurch mit dem Falle gleicher Gewichte in Uebereinstimmung zu bringen, dass man annimmt, man habe anstatt lauter verschiedener Bestimmungen Gruppen von der Reihe nach p_1, p_2, p_3 ... identischen Bestimmungen erhalten. Alsdann kann man sofort die Gleichungen No. 2, 4 benutzen, indem man für D die Determinante des Systems 1. und für α_{ii} den Coefficienten des $i$ten Diagonalgliedes dieser Determinante setzt.

5. Beispiel.

Zwischen den vom Punkte M ausgehenden Strahlen MA, MB, MC, MD, wurden folgende Winkel gemessen

$w_1 = A,B = 48°\ 17'\ 1'',4$ mit dem Gewichte $p_1 = 30$;
$w_2 = A,C = 96\ 52\ 16,8$ „ „ „ „ $p_2 = 20$;
$w_3 = A,D = 152\ 54\ 6,8$ „ „ „ „ $p_3 = 26$;
$w_4 = B,C = 48\ 35\ 14,3$ „ „ „ „ $p_4 = 25$;
$w_5 = B,D = 104\ 37\ 7,8$ „ „ „ „ $p_5 = 28$;
$w_6 = C,D = 56\ 1\ 48,9$ „ „ „ „ $p_6 = 44$.



(M. 578)

Werden die drei ersten Winkel mit ξ, η, ζ bezeichnet, so sind die sechs beobachteten Grössen durch sechs lineare Gleichungen

$$a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta = w_k$$

verbunden, wobei a_k, b_k, c_k die Werthe haben

1.

No.	1	2	3	4	5	6
a_k	1	0	0	−1	−1	0
b_k	0	1	0	1	0	−1
c_k	0	0	1	0	1	1

Nimmt man als Unbekannte die Differenzen

$$\xi - w_1 = x, \quad \eta - w_2 = y, \quad \zeta - w_3 = z,$$

so erhält man Gleichungen von der Form

$$a_k x + b_k y + c_k z = u_k,$$

wobei die a_k, b_k, c_k die Werthe 1. haben, während die u_k sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$
$$u_4 = +1,1; \quad u_5 = -2,4; \quad u_6 = +1,1.$$

Die zur Aufstellung der Normalgleichungen nöthigen Zahlen sind

No.	a	b	c	u	paa	pab	pac	pbb	pbc	pcc	pau	pbu	pcu
1	+1	.	.	.	30	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	+1	.	.	.	.	.	20	.	.	.	.	.
3	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	26	.	.	.
4	−1	+1	.	−1,1	25	−25	.	25	.	.	27,5	−27,5	.
5	−1	.	+1	+2,4	28	.	−28	.	.	28	−67,2	.	67,2
6	.	−1	+1	−1,1	.	.	.	44	−44	44	.	48,4	−48,4
				Summen	83	−25	−28	89	−44	98	−39,7	20,9	18,8

Daher sind die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 83x - 25y - 28z &= -39,7 \\ -25x + 89y - 44z &= 20,9 \\ -28x - 44y + 98z &= 18,8. \end{aligned}$$

Die Auflösungen dieses Systems sind

$$x = -0'',34, \quad y = 0'',24, \quad z = 0'',20.$$

Die ausgeglichenen Werthe der sechs Winkel sind daher

$$\begin{aligned} A, B &= 48°\ 17'\ 1'',06, \\ A, C &= 96\ 52\ 17,04, \\ A, D &= 152\ 54\ 7,00, \\ B, C &= 48\ 35\ 15,98, \\ B, D &= 104\ 37\ 5,94, \\ C, D &= 56\ 1\ 49,96. \end{aligned}$$

Die Summe $[p\lambda\lambda]$ ist 222,44; für das Verhältniss der Gewichte ergeben sich die abgerundeten Zahlen

$$p_x : p_y : p_z = 55 : 50 : 55\,,$$

also sind die Gewichte nahezu gleich gross.*)

6. Einige Schriftsteller empfehlen zur Erleichterung der Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen das gegebene auszugleichende System

$$1.\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= u_1\,, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots &= u_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

durch das folgende zu ersetzen

$$2.\qquad \begin{aligned} \frac{a_1}{u_1} x + \frac{b_1}{u_1} y + \frac{c_1}{u_1} z + \ldots &= 1\,, \\ \frac{a_2}{u_2} x + \frac{b_2}{u_2} y + \frac{c_2}{u_2} z + \ldots &= 1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Haben die Beobachtungen die Gewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$, so ist die Bedingung zur Bestimmung der Unbekannten aus dem Systeme 2.

$$p_1\left(\frac{a_1}{u_1}x + \ldots - 1\right)^2 + p_2\left(\frac{a_2}{u_2}x + \ldots - 1\right)^2 + \ldots = Minimum.$$

Hierfür kann man setzen

$$3.\qquad \frac{p_1}{u_1^2}\cdot(a_1 x + \ldots - u_1)^2 + \frac{p_2}{u_2^2}\cdot(a_2 x + \ldots - 1)^2 + \ldots = Minimum.$$

Die Bedingung für die Ausgleichung des gegebenen Systems 1. ist

$$4.\qquad p_1(a_1 x + \ldots - u_1)^2 + p_2(a_2 x + \ldots - 1)^2 + \ldots = Minimum.$$

Vergleicht man 3. und 4., so erkennt man, dass die Ersetzung des Systems 1. durch das System 2. gleichbedeutend damit ist, den Beobachtungen anstatt der gegebenen Gewichte

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_n$$

die Gewichte zuzuschreiben

$$\frac{p_1}{u_1^2},\ \frac{p_2}{u_2^2},\ \frac{p_3}{u_3^2},\ \ldots\ \frac{p_n}{u^2_n}.$$

Hieraus folgt, dass es nicht statthaft ist, das System 1. durch 2. zu ersetzen; sowie, dass es überhaupt nicht statthaft ist, die durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen mit ungleichen Zahlen zu multipliciren.

Wenn man indess bedenkt, dass die Bestimmung der Gewichte niemals eine scharfe ist, sondern immer nur auf mehr oder minder unsicheren Abschätzungen beruht, so kann man, wenn man im Interesse einer Abkürzung der Zahlenrechnung es für sehr wünschenswerth halten sollte, die gegebenen Gleichungen 1. unbedenklich mit Zahlen multipliciren, deren Verhältnisse nicht viel von der Einheit abweichen; insbesondere kann man 2. für 1. setzen, wenn die $u_k : u_i$ für jedes k und i nahezu $= 1$ ist. Die auf diesem Wege berechneten ausgeglichenen Werthe werden dann nur sehr wenig von dem durch Verwendung des Systems 1. gewonnenen abweichen.

7. Wenn Functionen

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots),\quad \varphi_2(x, y, z, \ldots),\quad \varphi_3(x, y, z, \ldots),$$

deren Werthe

*) MEYER, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von CZUBER, Leipzig 1859, pag. 305.

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots$$

man beobachtet hat, nicht linear sind, so wähle aus den Gleichungen

$$\varphi_i(x, y, z, \ldots) = u_i$$

so viele aus, als Unbekannte vorhanden sind und löse dieses System in geeigneter Weise auf. Es wird dabei genügen, solche Annäherungswerthe für die Unbekannten zu erhalten, für welche die Abweichungen der berechneten u_i von den beobachteten nicht mehr betragen wie die bei der Ausgleichung zu erwartende Abweichung dieser Grössen. Die so für $x, y, z, \ldots$ gefundenen Zahlen können als die angenähert richtigen Werthe gelten.

An denselben hat man geeignete Correctionen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ anzubringen, um die ausgeglichenen Lösungen $x', y', z', \ldots$ zu erhalten. Unter den Voraussetzungen, dass innerhalb des Betrages dieser Correctionen der TAYLOR'sche Lehrsatz auf alle Functionen φ anwendbar ist, und dass die $\xi, \eta, \zeta \ldots$ so klein sind, dass man nur die erste Potenz dieser Correctionen zu berücksichtigen hat, ersetzt man jede Function φ durch

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\zeta + \ldots$$

Hierin hat man rechts für $x, y, z, \ldots$ die Annäherungswerthe zu setzen.

Hierdurch erhält man für $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\zeta + \ldots &= u_1 - \varphi_1\,, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\zeta + \ldots &= u_2 - \varphi_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

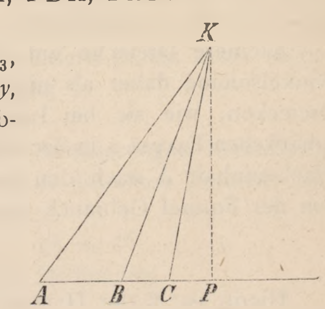
aus denen man zur Bestimmung der $\xi, \eta, \zeta \ldots$ die Normalgleichungen ableitet.

8. Beispiel.

Um die Lage des Punktes K gegen die Basis AC zu bestimmen, misst man die Strecken AB und BC, sowie die Winkel PCK, PBK, PAK.

Setzt man

$tang\,PCK = u_1$, $tang\,PBK = u_2$, $tang\,PAK = u_3$, $KP \perp AC$, $AC = d_1$, $AB = d_2$, $AP = x$, $PK = y$, so hat man zwischen den gesuchten und den beobachteten Grössen die Gleichungen



(M. 579.)

$$u_1 = \frac{y}{x - d_1}\,,$$

$$u_2 = \frac{y}{x - d_2}\,,$$

$$u_3 = \frac{y}{x}\,.$$

also eine überzählige Gleichung.

Sind x', y' Näherungswerthe der Unbekannten, so erhält man für die daran anzubringenden Correctionen ξ, η die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{y'}{(x' - d_1)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x' - d_1}\cdot\eta &= u_1 - \frac{y'}{x' - d_1} \\ -\frac{y'}{(x' - d_2)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x' - d_1}\cdot\eta &= u_2 - \frac{y'}{x' - d_2} \\ -\frac{y'}{x'^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'}\cdot\eta &= u_3 - \frac{y'}{x'}\,; \end{aligned}$$

nachdem man alle neun Coefficienten dieses Systems berechnet hat, leitet man die Normalgleichungen ab.

§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

1. Hat man durch einfache Messung für die Winkel x, y, z eines ebenen Dreiecks die Werthe ξ, η, ζ gefunden, so wird die Summe $\xi + \eta + \zeta$ nicht genau $180°$ betragen. Die Verbesserungen, welche man an den gemessenen Werthen anbringen muss, um die genaue Winkelsumme herzustellen, bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise.

Sind x, y, z die verbesserten Winkel, so sind $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ die Abweichungen. Die Summe der Quadrate derselben muss ein Minimum werden unter der Bedingung

$$f = x + y + z - 180° = 0\,.$$

Daher hat man (Differentialrechng., § 14, No. 14) das Minimum der Function

$$F = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + 2kf$$

zu bestimmen. Hierzu ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - \xi + k &= 0\,, \\ y - \eta + k &= 0\,, \\ z - \zeta + k &= 0\,, \\ x + y + z &= 180°. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die letzte von der Summe der andern, so folgt

$$k = \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180°)\,.$$

Hieraus folgen die gesuchten Winkel

$$1.\qquad \begin{aligned} x &= \xi - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180°), \\ y &= \eta - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180°), \\ z &= \zeta - \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180°). \end{aligned}$$

Der Ueberschuss der gemessenen Winkelsumme über der theoretischen ist daher in drei gleiche Theile zu theilen und jeder der gemessenen Winkel um diesen Theil zu vermindern.

Kleinere Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man als ebene und ihre Winkelsumme daher als nicht verschieden von $180°$ betrachten. Bei grösseren Dreiecken, wie sie bei Landesvermessungen vorkommen, bestimmt man den sphärischen Excess ε in Secunden mit hinlänglicher Genauigkeit, indem man den Flächeninhalt Δ nach den Formeln für ebene Dreiecke ermittelt, und alsdann von der Formel Gebrauch macht

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \cdot 206265\,.$$

Hierin ist R der Halbmesser der Kugel, für mittlere geographische Breiten und für Meter ist daher

$$log R = 8{,}80484\,.$$

Bei der Ausgleichung der Winkel eines spärischen Dreiecks hat man in 1. statt $180°$ zu setzen $180° + \varepsilon$.

2. Hat man für jeden der Winkel eines ebenen Dreiecks n Messungen

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n; \quad \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n; \quad \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$$

gemacht, die gleiches Gewicht haben, so werden die ausgeglichenen Winkel aus den Bedingungen erhalten

$$\sum_1^m [(x - \mathfrak{x}_i)^2 + (y - \mathfrak{y}_i)^2 + (z - \mathfrak{z}_i)^2] + 2k(x + y + z - 180°) = Min.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - \xi + \frac{1}{m}k &= 0\,, \\ y - \eta + \frac{1}{m}k &= 0\,, \\ z - \zeta + \frac{1}{m}k &= 0\,, \\ x + y + z &= 180°, \end{aligned}$$

wobei mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z beobachteten Winkel bezeichnet worden sind. Dieses System hat dieselben Lösungen, wie das entsprechende System in 1., wenn in 1. k durch $k : m$ ersetzt wird.

3. Hat man für x, y, z der Reihe nach m, n, r Beobachtungen gemacht, alle von demselben Gewichte, so erhält man zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Bedingung

$$\sum_1^m (x - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (y - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (z - \mathfrak{z}_i)^2 + 2k(x + y + z - 180°) = Min.$$

Bezeichnet man wieder mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z durch Messung gefundenen Winkel und mit $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{r}$ die Reciproken von m, n, r, so folgen zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - \xi + \mathfrak{m}k &= 0\,, \\ y - \eta + \mathfrak{n}k &= 0\,, \\ z - \zeta + \mathfrak{r}k &= 0\,, \\ x + y + z &= 180°\,. \end{aligned}$$

Aus denselben erhält man, wenn man

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \xi + \eta + \zeta - 180° = d$$

setzt, die Lösungen

$$x = \xi - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} \cdot d, \quad y = \eta - \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} \cdot d,$$

$$z = \zeta - \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}} \cdot d\,.$$

4. Sind x, y, z nicht Winkel eines Dreiecks, sondern Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, so gilt für dieselben die Bedingung

$$1.\qquad x^2 - y^2 - z^2 = 0\,.$$

Die arithmetischen Mittel ξ, η, ζ kann man als Annäherungen betrachten, so dass man nur die erste Potenz der Correctionen zu beachten braucht; für dieselben folgt aus 1.

$$2\xi \cdot \lambda - 2\eta \cdot \mu - 2\zeta \cdot \nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,.$$

Die Unbekannten λ, μ, ν bestimmen sich aus der Bedingung

$$\sum_1^m (\xi + \lambda - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (\eta + \mu - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (\zeta + \nu - \mathfrak{z}_i)^2$$
$$+ 2k(2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) = Min.$$

Man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mathfrak{m} \cdot k\xi &= 0\,, \\ \mu - 2\mathfrak{n} \cdot k\eta &= 0\,, \\ \nu - 2\mathfrak{r} \cdot k\zeta &= 0\,, \\ 2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu &= -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$4k(\mathfrak{m}\xi^2 + \mathfrak{n}\eta^2 + \mathfrak{r}\zeta^2) = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

Setzt man

$$\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 2d, \quad \mathfrak{m}\xi^2 + \mathfrak{n}\eta^2 + \mathfrak{r}\zeta^2 = \mathfrak{s}\,,$$

so ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$x = \xi + \lambda = \xi\left(1 - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} d\right),$$
$$y = \eta + \mu = \eta\left(1 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} d\right),$$
$$z = \zeta + \nu = \zeta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}} d\right).$$

5. Nach diesen Beispielen wenden wir uns zu einem allgemeineren Falle. Sind für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 durch direkte Beobachtung die Werthe ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... mit den Gewichten p_1, p_2, p_3 ... gefunden worden und werden die x durch q lineare Bedingungen verbunden

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots - b_1 = 0, \\ f_2 &\equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \ldots - b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.}$$

so hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$p_1(x_1 - \xi_1)^2 + p_2(x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + 2k_1 f_1 + 2k_2 f_2 + \ldots = \mathit{Minimum}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 x_1 - p_2 \xi_1 + [ka_1] &= 0, \\ p_2 x_2 - p_2 \xi_2 + [ka_2] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.}$$

Die unbekannten Grössen k_1, k_2, ... bezeichnet man nach GAUSS als Correlaten.

Aus 2. berechnet man die Grössen x_1, x_2 ... und setzt dieselben in 1. ein, Dadurch erhält man q lineare Gleichungen zur Bestimmung der Correlaten. Nach Auflösung dieses Systems erhält man aus 2. die Unbekannten.

6. Sind einige unter den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... nicht linear, so betrachtet man die beobachteten Werthe der Unbekannten als Annäherungen und bestimmt deren Verbesserungen; unter der Voraussetzung, dass nur erste Potenzen der Verbesserungen zu berücksichtigen sind und dass innerhalb der Werthe der Verbesserungen die Functionen und ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind, ersetzt man φ durch

$$\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\lambda_2 + \ldots = 0,$$

worin die Unbekannten x_1, x_2, ... durch die beobachteten Werthe zu ersetzen sind. Hierdurch kommt man auf den Fall linearer Bedingungsgleichungen zurück (Vergl. das Beispiel in No. 4).

7. Beispiel.

A. Zur Bestimmung der Fläche eines Dreiecks hat man dessen Seiten x', y', z', sowie die zugehörigen Höhen u', v', w' gemessen, und die Werthe erhalten

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w.$$

Die zu bestimmenden Grössen sind durch die beiden Gleichungen verbunden

$$\begin{aligned} x'u' - y'v' &= 0, \\ x'u' - z'w' &= 0. \end{aligned} \tag{1.}$$

Bezeichnet man die an x, y ... anzubringenden Verbesserungen mit

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w},$$

so hat man für dieselben die aus 1. folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} f &\equiv u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - v\mathfrak{y} - y\mathfrak{v} + xu - yv = 0. \\ \varphi &\equiv u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - w\mathfrak{z} - z\mathfrak{w} + xu - zw = 0. \end{aligned} \tag{2.}$$

Zur Bestimmung der Correctionen, sowie der Correlaten k_1 und k_2, folgen aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2k_1 f + 2k_2\varphi = \mathit{Minimum}.$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} + u(k_1 + k_2) &= 0, \\ \mathfrak{y} - vk_1 &= 0, \\ \mathfrak{z} - wk_2 &= 0, \\ \mathfrak{u} + x(k_1 + k_2) &= 0, \\ \mathfrak{v} - yk_1 &= 0, \\ \mathfrak{w} - zk_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.}$$

Die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ setzt man in 2. ein; dadurch erhält man

$$\begin{aligned} (u^2 + x^2 + v^2 + y^2)k_1 + (u^2 + x^2)k_2 &= xu - yv, \\ (u^2 + x^2)k_1 + (u^2 + x^2 + w^2 + z^2)k_2 &= xu - zw. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet man die Correlaten k_1, k_2; setzt die für dieselben gefundenen Werthe in 3. ein, so erhält man die Correctionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Mit Hülfe derselben ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$x' = x + \mathfrak{x},\quad y' = y + \mathfrak{y},\quad z' = z + \mathfrak{z},$$
$$u' = u + \mathfrak{u},\quad v' = v + \mathfrak{v},\quad w' = w + \mathfrak{w}.$$

Die aus denselben berechneten Produkte

$$x'u',\quad y'v',\quad z'w'$$

stimmen bis auf Grössen erster Ordnung in Bezug auf die Correctionen miteinander überein.

B. In einem Dreiecke hat man für die Seiten x', y', z' und die gegenüber liegenden Winkel u', v', w' durch direkte Beobachtungen von gleichem Gewichte die Grössen x, y, z, u, v, w gefunden.

Zwischen den zu bestimmenden Grössen bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' + v' + w' - 180^\circ &= 0, \\ x'\cos v' + y'\cos u' - z' &= 0, \\ x'\cos w' + z'\cos u' - y' &= 0, \end{aligned} \tag{3.}$$

von denen nur die erste linear ist. Bezeichnet man die an den beobachteten Grössen anzubringenden kleinen Verbesserungen der Reihe nach wieder mit

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{w},\ \mathfrak{v},$$

und setzt

$$\begin{aligned} u + v + w - 180 &= a, \\ x\cos v + y\cos u - z &= b, \\ x\cos w + z\cos u - y &= c, \end{aligned}$$

so erhält man für die Verbesserungen die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f &\equiv \mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{w} + a = 0, \\ \varphi &\equiv \cos v\cdot\mathfrak{x} - x\sin v\cdot\mathfrak{v} + \cos u\cdot\mathfrak{y} - y\sin u\cdot\mathfrak{u} - \mathfrak{z} + b = 0, \\ \psi &\equiv \cos w\cdot\mathfrak{x} - x\sin w\cdot\mathfrak{w} + \cos u\cdot\mathfrak{z} - z\sin u\cdot\mathfrak{u} - \mathfrak{y} + c = 0. \end{aligned} \tag{4.}$$

Aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2k_1 f + 2k_2\varphi + 2k_3\psi = \mathit{Min}.$$

folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} + k_2\cos v + k_3\cos w &= 0, \\ \mathfrak{y} + k_2\cos u - k_3 &= 0, \\ \mathfrak{z} - k_2 + k_3\cos u &= 0, \\ \mathfrak{u} + k_1 - k_2\cdot y\sin u - k_3\cdot z\sin u &= 0, \\ \mathfrak{v} + k_1 - k_2\cdot x\sin v &= 0, \\ \mathfrak{w} + k_1 - k_3\cdot x\sin w &= 0. \end{aligned} \tag{5.}$$

Substituirt man die aus 5. folgenden Werthe der Verbesserungen in 4., so ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Correlaten k_1, k_2, k_3 und nach Auflösung derselben aus 5. die Unbekannten.

8. Hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$$

der Functionen

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, \ldots), \\ \varphi_2(x, y, z, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, y, z, \ldots) \end{array}$$

beobachtet, und bestehen zwischen den u die Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{l} f(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ g(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ h(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so hat man zunächst die Beobachtungen der u nach dem bisher Mitgetheilten auszugleichen und mit Benutzung dieser ausgeglichenen Werthe das in § 4 angegebene Verfahren einzuhalten.

9. Sind zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$$

der linearen Functionen

$$1. \quad \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots \end{array}$$

beobachtet worden, haben diese Beobachtungen die Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$$

und bestehen zwischen den Unbekannten die linearen Gleichungen

$$2. \quad \begin{array}{l} f_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \ldots = 0, \\ f_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so haben die Unbekannten die Werthe, für welche

$$3. \quad \begin{array}{c} p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots + 2k_1 f_1 + 2k_2 f_2 + \ldots = \mathit{Minimum}, \\ \lambda_r = a_r x + b_r y + \ldots - u_r. \end{array}$$

Aus 3. folgen für $x, y, z, \ldots$, und für die unbekannten Correlaten die Gleichungen

$$\begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots + [\alpha k] = [ua], \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \ldots + [\beta k] = [ub], \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \ldots + [\gamma k] = [uc], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten $x, y, z, \ldots$; im Verein mit den Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit der der Correlaten $k_1, k_2, \ldots$ übereinstimmt, genügen sie zur Bestimmung aller darin vorkommenden unbekannten Grössen.

10. Sind einige der Functionen $u_1, u_2, u_3 \ldots f_1, f_2, \ldots$ nicht linear, so wählt man aus den Beobachtungen und den Bedingungsgleichungen so viele aus, als Unbekannte $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen sind. Man wird dabei darauf achten, dass die Bestimmung der Unbekannten möglichst geringe Schwierigkeiten macht. Man berechnet nun $x, y, z, \ldots$ aus den ausgewählten Gleichungen durch ein geeignetes Annäherungsverfahren bis zu einem genügenden Genauigkeitsgrade, und reducirt dann mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes die durch Beobachtung gefundenen Gleichungen sowie die Bedingungsgleichungen auf lineare Gleichungen für die an den berechneten Näherungswerthen anzubringenden Verbesserungen.

---

11. Die in den vorstehenden Abschnitten mitgetheilte Darstellung der Grundlinien der Ausgleichungsrechnung weicht von der üblichen Darstellungsweise insofern ab, als die meisten Schriftsteller nach GAUSS und LAPLACE die Ausgleichungsrechnung mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen verbinden.

Statt der von uns zu Grunde gelegten Forderung: Die Unbekannten so zu bestimmen, dass mit den Beobachtungen eine möglichst gute Uebereinstimmung erzielt und die Ausgleichung lediglich durch Auflösung linearer Gleichungen bewirkt wird, — geht man alsdann von der Forderung aus: Die **wahrscheinlichsten** Werthe der Unbekannten zu bestimmen. Um derselben zu genügen, muss man wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Beobachtung einen Fehler von gegebener Grösse zu machen, oder wenigstens, wie sich die Wahrscheinlichkeiten gegebener Fehler zu einander verhalten.

Eine aus allgemeinen Betrachtungen fliessende, von nicht zu bestreitenden und auf alle vorkommenden Fälle passenden Voraussetzungen ausgehende Erledigung dieser Frage ist bis jetzt nicht gegeben worden und wird wohl nicht möglich sein; die werthvolle Arbeit HAGEN'S*) geht von Voraussetzungen über die Zusammensetzung von Fehlern aus unzählig vielen unbemerkbar kleinen Fehlern aus, die kaum jemals genau und in sehr vielen Fällen nicht einmal angenähert zutreffen.

Den entgegengesetzten Weg hat GAUSS, der Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate**) eingeschlagen. GAUSS geht von der Annahme aus, dass bei direkten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit das arithmetische Mittel unbestreitbar der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei; er zeigt, dass diese Annahme genügt, um das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu bestimmen, und findet für die Wahrscheinlichkeit $w dx$ einen Fehler vom Betrage x zu begehen, den Ausdruck

$$w dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2} dx,$$

wobei h eine von den besonderen Verhältnissen der Beobachtung abhängige von x aber unabhängige Zahl bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit $W dx_1, dx_2, dx_3, \ldots$ dass bei einer Reihe von Beobachtungen die Fehler $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zusammentreffen, ist das Produkt der für das Eintreffen von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einzeln geltenden Wahrscheinlichkeiten, also ist

$$W dx_1 dx_2 dx_3 \ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots)} dx_1 dx_2 dx_3 \ldots$$

W wird ein Minimum wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \mathit{Minimum}.$$

Hiergegen kann eingewendet werden, dass man von Alters her zwar das arithmetische Mittel an die Stelle gleich guter von einander abweichender

*) HAGEN, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837.

**) GAUSS, Theorie motus corporum coelestium, Hamburg 1809.

Messungen derselben Grösse gesetzt hat, gewiss aber ohne je dabei daran zu denken, dass man dadurch einen wahrscheinlichsten Werth gewinnen wollte, sondern wegen der Einfachheit der Rechnung. Man hat daher kein Recht, von der unbestrittenen Anwendung des arithmetischen Mittels aus einen Schluss auf das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu machen.

Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit w hat man auch folgenden Weg eingeschlagen.

Unter allen Fehlern ist gewiss der Fehler $x = 0$ der wahrscheinlichste, die Function w hat daher für $x = 0$ ein Maximum.

Man darf ferner annehmen, dass entgegengesetzt gleiche Fehler gleich wahrscheinlich sind; hieraus folgt, dass w eine gerade Function ist. Für Fehler, die verhältnissmässig sehr klein sind, ist die Wahrscheinlichkeit nahezu $= 1$. Von einer gewissen, von den Besonderheiten jeder Beobachtungsreihe abhängigen Grösse x an nimmt die Wahrscheinlichkeit rasch ab, und verschwindet für Fehler, die eine gewisse Grenze überschreiten.

Die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Fehler zu begehen, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx;$$

da es nun gewiss ist, irgend einen Fehler (0 mit eingerechnet) zu machen, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx = 1\,.$$

Diese Bedingungen genügen noch nicht, um die unbekannte Function w vollständig zu definiren. Da man mehr Eigenschaften nicht anzugeben vermag, so ergreift man das Auskunftsmittel, für w unter den bekannten Functionen, welche den Bedingungen genügen, die einfachste auszuwählen. Als solche empfiehlt sich

$$w = Ae^{-h^2x^2};$$

sie hat für $x = 0$ das Maximum $w = A$; sie ist eine gerade Function; die Curve, deren Abscissen und Ordinaten x und w sind, hat die Wendepunkte

$$x = \pm\frac{h}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{A}{\sqrt{e}},$$

und nähert sich von da an asymptotisch sehr rasch der Abscissenachse. Aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-h^2x^2}dx = 1$$

folgt

$$A = 1 : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}dx\,.$$

Da nun*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so ergiebt sich

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}.$$

Diese inductive Methode zur Bestimmung von w verdient vor jeder andern jedenfalls den Vorzug; die Willkür, welche bei der Bestimmung von w waltet, tritt bei derselben ganz unverhüllt hervor.

Gegen alle Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Ausgleichungsrechnung ist der jedenfalls wesentliche Einwand zu erheben, dass es sich bei fast allen Fällen der Ausgleichungsrechnung nur um eine verhältnissmässig kleine Anzahl von Beobachtungen handelt, und dass es bedenklich ist, auf eine Gruppe von wenig Fällen Folgerungen aus den für grosse Zahlen geltenden Sätzen anzuwenden.

*) Zur Bestimmung des Integrals

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

bildet man nach CAUCHY

$$V = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy\,.$$

Die Ausführung der Integrationen ergiebt

$$V = J^2\,.$$

Substituirt man Polarcoordinaten, so erhält man

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr\,.$$

Da nun

$$\int e^{-r^2}\cdot r\,dr = -\tfrac{1}{2}e^{-r^2} + Const.,$$

so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr = \tfrac{1}{2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi}{4}\,.$$

Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2J = \sqrt{\pi}\,.$$

Ersetzt man x durch hx, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\,.$$

Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Lebenswahrscheinlichkeit.

1. Unter allen unserer Beobachtung zugänglichen Ereignissen sehen wir mit Recht diejenigen als von einer unübersehbaren grössten Mannigfaltigkeit von Ursachen bedingt an, die das Schicksal der Menschen ausmachen, insbesondere die, welche vom menschlichen Willen direkt abhängen. Wir begeben uns daher jedes Urtheils über unser eigenes Schicksal und über die Zukunft unserer Mitmenschen, und suchen das aus diesem Verzicht fliessende peinvolle Gefühl der Unsicherheit zu überwinden.

Wenn nun auch die Zukunft des Einzelnen sich unserem Urtheile entzieht, so hat sich doch ergeben, dass bei hinlänglich grossen Bevölkerungsgruppen in mehrfachen Beziehungen Regelmässigkeiten vorhanden sind, die einen ziemlich sicheren Schluss in die nächste oder selbst in die fernere Zukunft gestatten.

Bei einer einzelnen Familie ist z. B. die Anzahl der Todesfälle innerhalb bestimmter Zeitabschnitte scheinbar ganz regellos; bei einer Gemeinde von einigen Tausend Einwohnern ist diese Zahl schon von Jahr zu Jahr nahezu dieselbe, so dass gewisse, von dieser Zahl abhängende Einrichtungen mit Sicherheit vorher getroffen werden können; in einer grösseren Stadt von mehr als hunderttausend Einwohnern ist bereits die Zahl der wöchentlichen Todesfälle nahezu constant, oder doch insofern gleichmässig, dass auf dieselben Kalenderwochen mehrerer auf einander folgender Jahre dieselbe Anzahl von Sterbefällen kommt. Bei grösseren Bevölkerungsgruppen (Provinzen, Reichen), zeigen sich nicht bloss die Todesfälle selbst ihrer Zahl nach unveränderlich, sondern es sind auch die verschiedenen häufiger vorkommenden Todesursachen immer in nahezu demselben Verhältnisse an den Todesfällen betheiligt; ebenso bleibt bei der Zahl der jährlichen Todesfälle der Procentsatz derer, die ein bestimmtes Alter erreicht haben, wesentlich unverändert.

Auch bei den Ereignissen, die direkt vom Willen abhängig sind, zeigt sich eine unverkennbare Gleichmässigkeit. So kamen im Königreiche Preussen*) in den Jahren 1821—1875 jährlich auf das Tausend der Bevölkerung durchschnittlich 17,79 Eheschliessungen; von dieser Durchschnittszahl weichen die fünfzigjährigen

*) Preussische Statistik. (Amtliches Quellenwerk). Herausgegeben in zwanglosen Heften vom Kgl. statistischen Bureau in Berlin. XLVIII. A. 1879. pag. 135.

Durchschnitte nur um ungefähr ± 1 ab; die grösste Ziffer (1871—1875) beträgt 18,06, die kleinste (1851—55) 16,75.

Auf 100000 zu Anfang eines Jahres Lebende kamen in Preussen im Laufe des nächsten Jahres in dem Zeitraume 1851—70 durchschnittlich 5 Personen durch Selbstmord um; die Durchschnittsziffer wird in 10 Jahren dieses Zeitraums erreicht; in 8 Jahren beträgt sie 4, in den beiden letzten 6. Vom Jahre 1830 bis 1853 war diese Ziffer unverändert in jedem Jahre 4*).

Nach QUETELET's mustergültigen Untersuchen wurden in Frankreich von einer Million Bewohnern im Zeitraume 1826—30 jährlich durchschnittlich 135 wegen begangener Verbrechen verurtheilt, 1831—35 130, 1836—40 150, 1841—45 140, so dass selbst in diesen von Zufällen ganz besonders abhängigen Ereignissen eine auffällige Gleichmässigkeit sich ausspricht.

Seit der Erkenntniss der Gleichmässigkeit solcher Ereignisse ist erst eine wissenschaftliche Statistik möglich, ist dieselbe zugleich eine unentbehrliche Grundlage für jede auf das Ganze einer Bevölkerungsgruppe gerichtete Thätigkeit geworden.

2. Die statistischen Erhebungen haben insbesondere gezeigt, dass das Verhältniss der Anzahl derer, die das $k$te Lebensjahr erreichen, zu der Anzahl derer, die im Laufe des $k$ten Lebensjahres sterben, im Wesentlichen nur von der Zahl k abhängt. Man hat diese Verhältnisse durch mehrere in weit auseinander liegenden Zeiten angestellte Zählungen bestimmt und nur verhältnissmässig sehr geringe Aenderungen gefunden. Man hat daher das Recht, auf eine Reihe von Jahren hin für alle auf die Lebensdauer bezüglichen Rechnungen diese Verhältnisszahlen als nur von k abhängige, übrigens aber constante Zahlen anzusehen.

Auf Grund dieser Wahrnehmung hat man Tafeln construirt, welche angeben, wie Viele von einer gewissen Anzahl Geborener das 1., 2., 3., . . . Lebensjahr erfüllen. Die am Schlusse dieser Abhandlung angeführte Tafel giebt diese Zahlen für 100000 männliche und für 100000 weibliche Lebendgeborene für das Königreich Preussen an.**)

3. Bezeichnet a_k die in der Tafel enthaltene Anzahl der Personen, die das $k$te Lebensjahr erfüllen, so werden von a_x $x$jährigen Personen a_y y Jahre alt oder älter. Daher ist die Wahrscheinlichkeit w, das eine $x$jährige Person das $y$te Lebensjahr erfüllt,

$$w = \frac{a_y}{a_x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie vor Erfüllung des $y$ten Jahres stirbt, ist

$$1 - w = \frac{a_x - a_y}{a_x}.$$

Von a_y Personen, die das Ende des $y$ten Lebensjahres erreichen, sterben $a_y - a_z$ vor Erfüllung des $z$ten Jahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine $x$jährige Person das $y$te Lebensjahr erfüllt, aber vor Erfüllung des $z$ten stirbt ist daher

$$w = \frac{a_y - a_z}{a_x},$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Personen P und Q die heute x und y Jahre alt sind, noch wenigstens p Jahre lang leben, ist das Produkt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P in p Jahren noch lebt, mit der, dass Q noch lebt, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{a_{x+p}}{a_x} \cdot \frac{a_{y+p}}{a_y}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P noch lebt, Q aber verstorben ist, ist

$$w_2 = \frac{a_{x+p}}{a_x}\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide verstorben sind, ist

$$w_3 = \left(1 - \frac{a_{x+p}}{a_x}\right)\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

4. Halbirt man die Anzahl a_x der das $x$te Jahr vollendenden Personen und sucht das Lebensalter ξ auf, welches von $\frac{1}{2}a_x$ Personen erreicht wird, so ist die Wahrscheinlichkeit einer $x$jährigen Person, das ξte Lebensjahr zu vollenden, gleich $1:2$; man bezeichnet daher ξ als die wahrscheinliche Lebensdauer einer gegenwärtig x Jahre alten Person.

So ist z. B. für eine männliche Person

$$a_{35} = 51372, \quad \tfrac{1}{2}a_{35} = 25686.$$

Die letztere Zahl liegt zwischen den beiden zu 63 und 64 Jahren gehörigen

$$a_{63} = 26658, \quad a_{64} = 25378.$$

Man denkt sich nun die bei den a_{63} Personen im Laufe des 64. Lebensjahres eintretenden Todesfälle auf das Jahr gleichmässig vertheilt; unter dieser Voraussetzung würden

$$a_{63} - \tfrac{1}{2}a_{35} = 26658 - 25686 = 972$$

Personen vom 64. Lebensjahre noch den Bruchtheil

$$\frac{a_{63} - \frac{1}{2}a_{35}}{a_{63} - a_{64}} = \frac{972}{1280} = 0{,}76$$

verleben; daher ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer im 36. Lebensjahre stehenden Person

$$63{,}76.$$

5. Zum Zwecke einer vereinfachten Berechnung der Tafeln für Rentenversicherungen wurde bereits im Jahre 1724 von MOIVRE der Versuch gemacht, eine Formel aufzustellen, welche die Zahlen a_x als Function des Lebensalters angiebt; gestützt auf die älteste von HALLEY 1693 entworfene Sterblichkeitstafel schlug MOIVRE die Formel vor

$$a_x = 86 - x,$$

durch welche die Zahl derer angegeben werden sollte, welche von 86 gleichzeitig Geborenen das $x$te Lebensjahr erfüllen.

Weder dieser Versuch, noch eine grössere Anzahl nachfolgende Versuche können als gelungen bezeichnet werden.

Von einer berechtigten theoretischen Grundlage ausgehend, kam GOMPERTZ zu einer Formel, die zwar noch nicht die Tabellen genügend deckte; es gelang aber im Anschlusse an GOMPERTZ's Grundgedanken MAKEHAM und LAZARUS, das GOMPERTZ'sche Gesetz so zu ergänzen, dass die Sterblichkeitstafeln mit völlig genügender Genauigkeit dadurch dargestellt werden.

*) Preussische Statistik. XLVIII. A. Tabelle XLVII.

**) Mit von Seiten der Direction des Königlich Preussischen statistischen Bureaus gütigst gewährter Erlaubniss geben wir in dieser Tafel einen auszugsweisen Abdruck der im Jahrgang 1880 der Zeitschrift des Königlichen statistischen Bureaus veröffentlichten Tafel »Absterbeordnung, Mortalitätstafel, Tafel der Lebenserwartung und durchschnittliche Lebensdauer der Bevölkerung des Preussischen Staates.« Nach einer an den Verfasser ergangenen brieflichen Mittheilung besteht die Absicht, die Tafel im nächsten Jahre auf Grund des Materials aus anderweiten drei Beobachtungsjahren, sowie der durch die letzte Volkszählung ermittelten Altersvertheilung der Bevölkerung neu zu berechnen.

6. Nach GOMPERTZ*) denkt man sich den Widerstand einer grossen Anzahl gleichaltriger menschlicher Organismen gegen die Zerstörung mit der Zeit dergestalt abnehmend, dass er im Verlaufe jedes verschwindend kleinen Zeitelementes sich auf denselben Bruchtheil des ursprünglichen Betrags vermindert. Setzt man den anfänglichen Betrag dieses Widerstandes w, und nimmt an, dass derselbe bis zum Ende des ersten Zeitelementes auf pw ($p < 1$) herabgesunken ist, so ist er am Ende des 2., 3., 4., . . . $m$ten Zeitelementes

$$wp\,,\quad wp^2\,,\quad wp^3\,,\;\ldots\; wp^m.$$

Nimmt man an, dass eine Zeiteinheit (Jahr) n Elemente enthalte, und dass am Ende eines Jahres der Widerstand den Betrag

$$wp_1$$

habe, so ist

$$p_1 = p^n,$$

und nach x Jahren ist der Widerstand

$$wp_1{}^x.$$

Das Reciproke der Widerstandskraft bezeichnet GOMPERTZ als Todeskraft, und nimmt an, dass die Anzahl derer von $a_x x$jährigen Personen, die im nächsten Zeitelemente dx sterben, durch das Produkt von dx mit a_x und der Todeskraft gewonnen werde, also den Betrag habe

$$\frac{a_x}{wp_1{}^x}\,dx\,.$$

Ersetzt man hier $1:w$ und $1:p_1$ bez. durch b und q, so erhält man

$$a_x\cdot bq^x dx\,.$$

Diese Anzahl ist aber auch, wenn man die Sterblichkeitsliste für verschwindend kleine Intervalle dargestellt denkt, entgegengesetzt gleich dem Differentiale da_x. Daher hat man die Differentialgleichung

$$da_x = -\,a_x\cdot bq^x dx\,.$$

Aus derselben ergiebt sich sofort

$$la_x = -\,\frac{b}{lq}\cdot q^x + Const.$$

und daher

1. $$a_x = c\cdot K^{q^x},$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$K = e^{-\frac{b}{lq}}.$$

Bei geeigneter Wahl der Constanten c, K und q verträgt sich das GOMPERTZ'sche Gesetz (1.) sehr gut mit den vorhandenen Sterblichkeitstafeln für die Lebensjahre 20 bis 60, ergiebt aber stärkere Abweichungen für die Sterblichkeit im früheren und im späteren Alter.

7. Um diese Abweichungen zu beseitigen, nahm MAKEHAM neben der von GOMPERTZ eingeführten vom Alter abhängigen Todeskraft noch eine während des ganzen allmählichen Absterbens des Complexes von gleichaltrigen Personen beständig wirkende an.

Wird dieselbe mit β bezeichnet, so ergiebt sich

$$-\,da_x = a_x\left(\beta dx + \frac{b}{lq}\,q^x\right)dx\,,$$

und hieraus folgt

$$a_x = c\cdot K^{q^x}h^x,$$

*) GOMPERTZ, On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new method of determining the value of life contingencies. Philos. Transact. 1825.

wenn man $e^{-\beta}$ durch h ersetzt. Dieses Gesetz ist als das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz bekannt. Dasselbe stellt sehr gut die Sterblichkeit vom 15. Lebensjahre an aufwärts dar.

Um auch für die ersten 15 Lebensjahre Uebereinstimmung zwischen dem Gesetze und den Tabellen zu erzielen, ergriff LAZARUS (1867) das Auskunftsmittel, zu der veränderlichen Todeskraft

$$a_1 q^x$$

noch andere mit abweichendem Dignanden zu nehmen, so dass die Todeskraft dargestellt wird durch die Summe

$$\beta + b_1 q^x + b_2 q_1{}^x + b_3 q_2{}^x + \ldots$$

Es erwies sich als vollkommen genügend, diese Reihe auf die ersten drei Glieder zu beschränken. Wie man sieht, ergiebt sich hieraus, wenn man $e^{-\frac{b_2}{lq_1}}$ mit H bezeichnet

$$a^x = c\cdot h^x K^{q^x} H^{q_1{}^x} H^{q_1{}^x}.$$

Diese letzte Formel stellt bei geschickter Wahl der darin enthaltenen sechs Constanten die Zahlen der Sterblichkeitslisten mit durchaus hinlänglicher Genauigkeit für alle Lebensalter dar.*)

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Ein Kapital vermehrt sich durch Zinzeszins, wenn die nach einem bestimmten Zeitraume fälligen Zinsen mit dem Kapitale vereinigt werden, so dass sie im nächsten Zeitabschnitte zu gleichem Zinsfusse sich verzinsen. Wir nehmen zunächst an, dass die Zinsen alljährlich kapitalisirt werden.

Ein Kapital c bringt in einem Jahre zu $p\%$ die Zinsen $cp:100$, wächst also an auf

$$c\left(1+\frac{p}{100}\right) = c\cdot r,$$

wenn man den Discontfaktor

$$1+\frac{p}{100}$$

abkürzungsweise mit r bezeichnet. Das Endkapital cr des ersten Jahres ist das Anfangskapital des zweiten; daher ist das Endkapital am Ende des 2. Jahres

$$cr\cdot r = cr^2.$$

Mit jedem neuen Verzinsungsjahre tritt ein Faktor r hinzu; daher wächst das Kapital c durch jährlichen Zinseszins in n Jahren zu $p\%$ an auf das Endkapital

1. $$k = c\cdot r^n.$$

Wenn das Kapital über n Jahre hinaus noch sich während eines echten Bruchtheils t eines Jahres verzinst, so wächst es auf den Betrag an

2. $$k = c\cdot r^n\cdot\left(1+\frac{tp}{100}\right),\qquad t < 1.$$

Wie man sofort sieht, gelten diese Formeln auch dann, wenn die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern wenn andere, kürzere oder längere Verzinsungsfristen gelten; nur hat man dann für p nicht die jährlichen Zinsen auf das Hundert, sondern die auf die Verzinsungsfrist entfallenden zu setzen und für n die Anzahl der Verzinsungsfristen. Wenn also z. B. die

*) AMTHOR, Das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. Festschrift, Herrn Oberbürgermeister PFOTENHAUER u. s. w. gewidmet vom Lehrercollegium der Kreuzschule. Dresden, 1874. pag. 20.

Kapitalisirung vierteljährlich 20 Jahre lang erfolgt, und das Kapital sich zu 5% verzinst, so hat man in den Formeln 1. und 2.

$$r = 1 + \frac{1,25}{100}, \quad n = 80$$

zu setzen.

In dem Faktor $1 + tp : 100$ hat man auch in diesem Falle für p die jährlichen Procente zu nehmen, da t die über eine ganze Anzahl von Verzinsungsfristen hieraus verzinste Zeit in Bruchtheilen eines ganzen Jahres angiebt.

2. Die Formel No. 1, 2 löst die Aufgabe, aus dem Anfangskapitale, dem Zinsfusse und der Zeit das Endkapital zu finden.

Beispiel. Verzinsen sich 8500 Mark durch halbjährlichen Zinseszins zu 4% 12 Jahre 8 Monate lang, so ist

$$c = 8500, \quad r = 1,02, \quad n = 25,$$

$$t = \frac{1}{6}, \quad 1 + \frac{tp}{100} = 1 + \frac{4}{600} = 1,0066\ldots;$$

daher ist

$$k = 8500 \cdot 1,02^{25} \cdot 1,00667 = 14038.$$

Das Anfangskapital ergiebt sich zu

$$c = k : r^n \left(1 + \frac{tp}{100}\right).$$

3. Sind c, k und n gegeben und $t = 0$, so findet man den Discontfaktor

1. $$r = \sqrt[n]{\frac{k}{c}},$$

und hieraus den Zinsfuss.

Ist t von Null verschieden, so liefert die Gleichung 1. eine erste Annäherung p_1 zur Bestimmung des Zinsfusses. Da $\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$ gegen r^n nur klein ist, so wird dieser Faktor ziemlich genau erhalten, wenn man p durch p_1 ersetzt. Man erhält mit Benutzung dieses Werthes eine zweite Annäherung p_2 aus

$$r_2 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_1}{100}\right)},$$

und in gleicher Weise weitere Näherungswerthe

$$r_3 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_2}{100}\right)},$$

$$r_4 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_3}{100}\right)},$$

. . . .

Dabei ist, wie man sofort sieht

$$p_1 > p_2,$$
$$p_2 < p_3 < p_1,$$
$$p_3 > p_4 > p_2,$$
. . . .

Hieraus folgt, dass die Näherungswerthe

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$$

sich einer bestimmten Grenze nähern; auf so viele Decimalstellen zwei folgende Näherungswerthe übereinstimmen, auf ebenso viele Stellen stimmen sie mit dem gesuchten Zinsfusse p überein.

Beispiel. Wie gross ist der Zinsfuss, zu welchem 20000 Mark bei jährlichem Zinseszins in 18 Jahren 4 Monaten auf 43000 Mark anwachsen?

Hier ist $c = 20000$, $k = 43000$, $n = 18$, $t = \frac{1}{3}$. Man erhält

$$r_1 = \sqrt[18]{2,1500} = 1,0435,$$

$$1 + \frac{tp_1}{100} = 1,0145, \quad r_2 = r_1 : \sqrt[18]{1,0145} = 1,0426,$$

$$1 + \frac{tp_2}{100} = 1,0142, \quad r_3 = r_1 : \sqrt[18]{1,0142} = 1,0426.$$

Da r_2 und r_3 bis auf fünf Ziffern übereinstimmen, so folgt mit einer Genauigkeit bis auf die Hundertel

$$p = 4,26.$$

4. Zur Bestimmung der Zeit aus c, k und p bildet man die Gleichung

$$n \log r + \log\left(1 + \frac{tp}{100}\right) = \log k - \log c.$$

Da

$$1 + \frac{tp}{100} < r,$$

so ergiebt sich n aus dieser Gleichung als die ganze Zahl des Quotienten

$$(\log k - \log c) : \log r,$$

der Divisionsrest ist

$$\log\left(1 + \frac{tp}{100}\right),$$

und liefert den Zeitrest t.

Beispiel. In wie viel Jahren wächst ein Kapital durch jährlichen Zinseszins zu $4\frac{1}{2}$% auf den 3fachen Betrag an?

Aus $\log(k:c) = 0,47712$, $\log r = 0,01912$ folgt

$$\log(k:c) = 24 \cdot \log r + 0,01824, \quad \text{also} \quad n = 24.$$

Da nun $0,01824 = \log 1,0429$,

und $4,29 : 4,5 = 0,95$,

so ergiebt sich als Antwort 24,95 Jahre.

5. Bezeichnet man mit p die Verzinsung auf Hundert und ein Jahr, und werden die Zinsen am Ende jedes $m$ten Theiles eines Jahres kapitalisirt, so ist nach n Jahren das Endkapital

$$k = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm} = c \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right]^{\frac{pn}{100}}.$$

Wächst m unendlich, werden also die Zinsen continuirlich kapitalisirt, so erhält man

$$k = c \cdot e^{\frac{pn}{100}}.$$

Von der Annahme einer continuirlichen Kapitalisirung macht man bei einigen Aufgaben mit Vortheil Gebrauch.

6. Wenn man sich für n auf eine ganze Anzahl von Jahren, bez. auf eine ganze Anzahl solcher Zeitabschnitte beschränkt, nach deren Verlauf die Zinsen kapitalisirt werden, so giebt die Formel

$$k = c \cdot r^n$$

sowohl den Werth an, den ein Kapital c nach Verlauf von n Jahren erreicht, als den Werth, den ein vor n Jahren ausgeliehenes Kapital haben musste, um bis jetzt zu dem Betrage k anzuwachsen, wenn nur in diesem Falle die Zahl n — entsprechend einer Zeitbestimmung in der Richtung der Vergangenheit — negativ gerechnet wird.

Soweit es sich um Kapitalien handelt, bei denen für die in Frage kommenden Zeitabschnitte eine Vermehrung durch Zinseszins bei gleichbleibendem Zinsfusse stattfindet, hat man sich den Werth eines Kapitals in stetiger Veränderung begriffen zu denken; der nach Ablauf einer ganzen positiven oder negativen Anzahl von Jahren erreichte Werth einer Summe, die heute c Mark beträgt, ist

$$k = c \cdot r^n$$

Diesen Werth k bezeichnet man als den Zeitwerth der Summe c, und zwar als den Vorwerth oder Nachwerth, je nachdem n positiv oder negativ ist.

7. Anstatt eine Zahlung c zu einer bestimmten Zeit zu leisten, kann man an einem um n (positive oder negative) Jahre davon entfernten Zeitpunkte den für diesen Zeitpunkt berechneten Zeitwerth von c, d. i. $c \cdot r^n$ zahlen; handelt es sich um einen Vorwerth, so kann der Gläubiger vom Schuldner billigerweise nicht mehr verlangen; im Falle eines Nachwerths muss der Gläubiger so viel verlangen, wenn er nicht Schaden haben soll.

Aus diesem Grundsatze ergiebt sich sofort folgende Regel für die Aequivalenz von Zahlungen:

Eine Reihe Zahlungen, die zu bestimmten Zeiten zu leisten sind, kann durch eine andere Reihe von Zahlungen, die zu anderen bestimmten Zeiten geleistet werden, ersetzt werden, wenn nur für beide Reihen von Zahlungen die für einen beliebig gewählten Zeitpunkt berechneten Summen der Zeitwerthe einander gleich sind.

Hat man nach $t_1, t_2, t_3, \ldots t_r$ Jahren die Summen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ zu bezahlen, so kann man dafür nach $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \ldots \mathfrak{t}_\mathfrak{s}$ Jahren die Summen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_\mathfrak{s}$ zahlen, wenn die für das Ende des τten Jahres berechneten Zeitwerthe gleich sind

$$\mathfrak{a}_1 r^{\tau-\mathfrak{t}_1} + \mathfrak{a}_2 r^{\tau-\mathfrak{t}_2} + \mathfrak{a}_3 r^{\tau-\mathfrak{t}_3} + \ldots = a_1 r^{\tau-t_1} + a_2 r^{\tau-t_2} + a_3 r^{\tau-t_3} + \ldots$$

Wenn diese Gleichung für irgend einen Werth von τ identisch ist, so ist es auch für jeden andern; denn wenn man τ durch eine andere Zahl σ ersetzt, so ändern sich alle Glieder der Gleichung um denselben Faktor

$$r^{\sigma-\tau}.$$

---

8. Werden mehrere gleiche Zahlungen R (Renten) in jährlichen Zwischenräumen im Ganzen n mal geleistet, so ist deren Werth bei Auszahlung der letzten Rente

$$\begin{aligned} S &= Rr^{n-1} + Rr^{n-2} + \ldots + Rr + R, \\ &= R(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1), \\ &= R\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

Da $r - 1 = p : 100$, so hat man schliesslich

$$S = \frac{100\,R}{p}(r^n - 1).$$

Dieselbe Formel ist auch dann verwendbar, wenn die Rente nicht jährlich gezahlt wird, sobald dabei die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern an denselben Terminen, an welchen die Renten zahlbar sind; der Zinsfuss p hat dann eine entsprechend veränderte Bedeutung.

Werden z. B. 20 Renten von je 1500 Mark in vierteljährlichen Abständen bezahlt, und die Zinsen zu 5% vierteljährlich kapitalisirt, so ist der Zeitwerth aller Renten bei der Auszahlung der 20ten

$$S = \frac{100 \cdot 1500}{1{,}25} \cdot (1{,}0125^{20} - 1).$$

9. Wird ein Kapital C (Mise) zu jährlichem Zinseszins zu p% angelegt, und

von demselben in jährlichen Abständen, beginnend ein Jahr nach Anlegung der Mise, eine Rente R bezogen, so ist der Kassenbestand K unmittelbar nach der Auszahlung der $n$ten Rente vermehrt um den Zeitwerth aller n Renten gleich dem Zeitwerthe der Mise, alles berechnet für die Auszahlung der letzten Rente. Daher hat man die Gleichung

$$C \cdot r^n = \frac{100\,R}{p}(r^n - 1) + K.$$

Je nachdem $R \gtreqless \frac{100}{Cp}$, ist $K \gtreqless C$.

10. In letzterem Falle kann eine vollständige Verzehrung der Mise eintreten; aus der Bedingung $K = 0$ ergiebt sich folgender, als Rentengleichung bezeichneter Zusammenhang zwischen C, R, p und n

$$C \cdot r^n = \frac{100\,R}{p}(r^n - 1).$$

Hieraus folgt

die Mise $$C = \frac{100\,R}{p}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

die Rente $$R = \frac{Cp}{100} : \left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

11. Eine gegebene Mise C kann durch eine gegebene Rente R bei gegebenem Zinsfusse p im Allgemeinen nicht vollständig aufgezehrt werden; die Auszahlung von Renten wird solange erfolgen, bis ein Kassenbestand K übrig ist, der mit den einjährigen Zinsen zusammen weniger als R beträgt. Man hat alsdann die Aufgabe zu lösen, die grösstmögliche Anzahl von Renten, sowie den nach Auszahlung der letzten Rente verbleibenden Kassenrest zu bestimmen.

Die Gleichung No. 9 ergiebt

$$r^n\left(1 - \frac{Cp}{100\,R}\right) = 1 - \frac{Kp}{100\,R},$$

folglich ist

1. $$n \log r + \log\left(1 - \frac{Kp}{100\,R}\right)^{-1} = \log\left(1 - \frac{Cp}{100\,R}\right)^{-1}.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$K < \frac{R}{r}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{Kp}{100\,R} < \frac{p}{100\,r}, \quad \text{d. i.} < \frac{p}{100 + p}.$$

Hieraus folgt

$$1 - \frac{Kp}{100\,r} > \frac{100}{100 + p}, \quad \text{d. i.} > \frac{1}{r}.$$

Nach Gleichung 1. wird daher n als die ganze Zahl des Quotienten

$$\log\left(1 - \frac{Cp}{100\,R}\right)^{-1} : \log r$$

gefunden; der Divisionsrest ist

$$\log\left(1 - \frac{Kp}{100\,R}\right)^{-1}$$

und dient zur Bestimmung des Kassenrestes K.

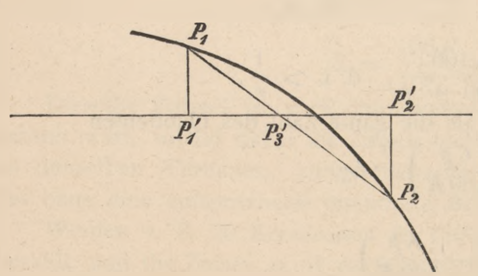
Beispiel. Eine Rentenanstalt gewährt für eine bei Vollendung des 18. Lebensjahres eingezahlte Summe von 344,28 Mk. vom Ende des 50. Lebensjahres an lebenslänglich jährlich 100 Mk. Rente; auf wie viele Jahre ist der

Genuss der Rente berechnet und wie gross ist nach Verlauf dieser Zeit der Kassenrest, wenn die Gesellschaft die Verzinsung zu $4\frac{0}{0}$ ansetzt?

Die Mise beträgt
$$344{,}28 \cdot 1{,}04^{31}.$$
Daher ist
$$\frac{Cp}{100R} = \frac{344{,}28 \cdot 1{,}04^{31} \cdot 4}{10000} = 0{,}46440 .$$
Hieraus folgt
$$log\left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1} = 0{,}27116 .$$
Die Division durch $log\, r = 0{,}01703$ ergiebt
$$n = 15, \quad log\left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1} = 0{,}01571 ,$$
also
$$K = 3{,}68 \cdot R : p = 92 .$$

12. Um p zu bestimmen, ersetzt man in der Rentengleichung p durch $100(r-1)$ und erhält
$$Cr^n = \frac{R}{r-1}(r^n - 1) ,$$
woraus die Gleichung für r hervorgeht
$$Cr^{n+1} - (C+R)r^n + R = 0 , \quad \text{oder}$$
1. $$r^n\left[1 + \frac{R}{C} - r\right] - \frac{R}{C} = 0 .$$

In diese Gleichung setzt man versuchsweise
$$p = \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5, \ldots$$
also
$$r = 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ 1{,}05; \ldots$$
und setzt diese Versuche so lange fort, bis man zu zwei auf einander folgenden Werthen p_1 und p_2 von p gelangt, für welche die linke Seite der Gleichung 1., die wir abkürzungsweise mit y bezeichnen wollen, entgegengesetzte Werthe erhält. Man kann r als Abscisse, y als Ordinate eines Punktes betrachten. Die Curve
$$y = r^n\left[1 + \frac{R}{C} - r\right] - \frac{R}{C}$$
schneidet alsdann die Abscissenachse in einem zwischen r_1 und r_2 gelegenen Punkte. Man erhält die Abscisse des Schnittpunktes angenähert, wenn man den zwischen den Abscissen r_1 und r_2 enthaltenen Curvenbogen mit der durch seine Enden bestimmten Sehne verwechselt. Die Abscisse r_3 des Schnittpunkts der Sehne mit Abscissenachse erhält man aus der Proportion
$$P_1'P_3' : P_3'P_2' = P_1'P_1 : P_2P_2',$$
d. i. $(r_3 - r_1) : (r_2 - r_3) = y_1 : y_2$.



(M. 580.)

Hieraus folgt
$$r_3 = \frac{r_2 - r_1}{y_1 + y_2} \cdot y_1 ,$$
wenn y_2 den absoluten Werth von P_2P_2' bezeichnet.

Hierauf berechnet man die zu r_3 gehörige Ordinate y_3, und wiederholt dann dasselbe Verfahren, indem man y_3 mit derjenigen der beiden Ordinaten $P_1'P_1$ und $P_2'P_2$ zusammen nimmt, welche mit y_3 nicht dasselbe Vorzeichen hat u. s. w. bis man durch diese fortgesetzte Interpolation zu einem Werthe r gelangt ist, für welchen der zugehörige Werth von y hinlänglich genau mit Null übereinstimmt.

Beispiel. Für $C = 28000$, $R = 3000$, $n = 12$ erhält man
$$\frac{R}{C} = 0{,}10714 ;$$
für
$$p = 3; \quad 4; \quad 5;$$
folgt
$$y = +\ 0{,}00299; \quad +\ 0{,}00034; \quad -\ 0{,}00349.$$
Ersetzt man in der für r_3 gegebenen Interpolationsformel $r_2 - r_1$ durch $0{,}01$, y_1 durch $0{,}00034$, y_2 durch $0{,}00349$, so erhält man
$$r_3 = 1{,}0489 .$$
Der zugehörige Werth von y ist $+\ 0{,}00001$, also mit Null hinlänglich genau übereinstimmend. Daher ist
$$p = 4{,}89 .$$

13. Wenn die am Ende jedes Jahres zahlbare Rente R durch m gleich grosse in gleichen Zwischenräumen zahlbare Renten R' ersetzt werden und die erste Zahlung $1 : m$ Jahr nach Einlegung der Mise erfolgen soll, so hat man R' so zu wählen, dass die Summe aller Einzelzahlungen R', jede vermehrt um die bis zum Jahresschlusse von ihr gebrachten Zinsen, gleich der jährlichen Rente R ist. Man hat daher die Gleichung
$$\begin{aligned} R &= \sum_0^{m-1} R'\left(1 + \frac{k}{m} \cdot \frac{p}{100}\right) \\ &= mR' + \frac{pR'}{100m}(1 + 2 + \ldots + m - 1), \\ &= R'\left(m + p \cdot \frac{m-1}{200}\right). \end{aligned}$$

Beispiel. Soll die Rente R' vierteljährlich bezahlt werden und ist $p = 5$, so ist
$$R = 4\frac{3}{40} \cdot R', \quad R' = 0{,}24540 \cdot R .$$

14. Für manche Aufgaben aus dem Versicherungswesen ist die Betrachtung einer continuirlichen Rente unter gleichzeitiger Anwendung continuirlicher Capitalisirung der Zinsen von Bedeutung. Bei continuirlicher Verzinsung (No. 5) wächst die Einheit des Kapitals in x Jahren an auf
$$e^{\frac{px}{100}} = v^x ,$$
wenn $e^{p:100}$ mit v bezeichnet wird.

Bezeichnet ρ die Summe aller der Beträge (ohne Rücksicht auf Zeitwerth), die während einer Zeiteinheit als Rente gewährt werden, so ist die in dem Zeitelemente dy erfolgte Rentenzahlung
$$\rho dx ,$$
und daher der Werth der in x Jahren bezahlten continuirlichen Rente, berechnet für den Zeitpunkt der Auszahlung der letzten Rente
$$S = \int_0^x v^x \rho dx = \frac{100\rho}{p}(v^x - 1) .$$

Die Summe R der Zeitwerthe aller im Laufe eines Jahres gezahlten Renten, für das Ende des Jahres berechnet, entsteht hieraus, wenn man $x = 1$ setzt; man erhält
$$R = \frac{100\rho}{p}(v - 1) .$$

Durch Division ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen
$$S = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1} .$$

Die unmittelbar vor Beginn der Auszahlung dieser Rente eingezahlte Mise C hat sich in x Jahren vermehrt auf

$$Cv^x.$$

Vergleicht man dies mit dem für S gegebenen Werthe, so erhält man die Rentengleichung für den Fall der continuirlichen Rente

$$Cv^x = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1}.$$

15. Die Zurückzahlung (Tilgung, Amortisation) einer Anleihe C erfolgt in der Regel so, dass der Schuldner (Staat, Gemeinde, Actiengesellschaft u. s. w.) eine bestimmte, unveränderliche Summe R alljährlich auf Verzinsung und Zurückzahlung verwendet; was man von dieser Summe nicht zur Bezahlung der Zinsen auf den noch nicht zurückgezahlten Theil der Anleihe braucht, wird zur Zurückzahlung eines Theils der Schuld verwendet.

Der Zusammenhang zwischen C, R, dem Zinsfusse p und der Dauer n der Amortisation ergiebt sich aus der Bemerkung, dass man die Gesammtheit der Gläubiger als einen Rentengläubiger ansehen kann, der jährlich die Summe R so lange erhält, bis das Kapital C aufgezehrt ist. So lange nur die Zinsen des Kapitals an die Gläubiger bezahlt werden, ändert sich die Schuld nicht; daher ist die Schuld C die Mise für die Rente R und man hat

$$C \cdot r^n = \frac{100 R}{p}(r^n - 1).$$

Hat man ein System von zusammengehörigen Werthen C, R, p und n ermittelt, so gilt es nun, den Tilgungsplan zu entwerfen; in demselben ist anzugeben, wie viel jährlich zur Verzinsung des Anleiherestes und wie viel zur Tilgung zu verwenden ist. Hierbei setzen wir voraus, dass die Schuld in Abschnitte (Staatsschuldscheine, Prioritätsobligationen u. s. w.) zerlegt ist, von denen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass sie alle auf den gleichen Betrag A lauten.

Man hat bei der ersten Tilgung noch die Zinsen der ganzen Anleihe zu bezahlen, also $pC : 100$, und kann daher zur Tilgung verwenden

$$R - \frac{pC}{100}.$$

Ist q_1 die ganze Zahl des Quotienten

$$\left(R - \frac{pC}{100}\right) : A,$$

und ρ_1 der Rest, so werden q_1 Schuldscheine im Gesammtbetrage $q_1 A$ getilgt, und der Rest ρ_1 zu $p\%$ verzinslich angelegt. Am Ende des zweiten Jahres hat man die Zinsen auf

$$C - q_1 A$$

zu bezahlen; zur Tilgung ist daher verfügbar

$$R - (C - q_1 A)$$

und ausserdem noch der durch die Zinsen eines Jahres vermehrte Tilgungsrest ρ_1, also zusammen

$$R - (C - q_1 A) + \rho_1 r.$$

Man tilgt hiernach am Ende des 2. Jahres so viele (q_2) Schuldscheine, als die ganze Zahl des Quotienten beträgt

$$[R - (C - q_1 A) + \rho_1 r] : A$$

und überträgt den Rest ρ_2 auf das nächste Jahr.

Dieses Verfahren ist bis zur vollständigen Tilgung der Anleihe zu wiederholen.

Den Tilgungsresten, die jedes Jahr in den Händen des Schuldners bleiben, stehen gleich grosse, noch ungetilgte Beträge in den Händen der Gläubiger gegenüber; die für die letzteren zu zahlenden Zinsen gleichen sich gegen die zu Gunsten des Schuldners verzinsten Tilgungsreste aus, so dass durch die Tilgungsreste der Abschluss der ganzen Tilgung nur insoweit beeinträchtigt werden kann, als durch die von Jahr zu Jahr zu berechneten Zinsen der Tilgungsreste eine Ungenauigkeit in den letzten Stellen hervorgerufen werden kann, die indess als unwesentlich zu betrachten ist.

Beispiel. Eine Anleihe von 50000 Mark soll durch 10 gleiche jährliche Zahlungen zu 4% verzinst und getilgt werden; wie viel ist jährlich hierfür aufzuwenden und wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn die Schuld in 500 Abschnitte von 100 Mark eingetheilt ist?

Aus der Gleichung

$$R = \frac{Cp}{100}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$$

folgt

$$R = 6164{,}6\,.$$

Die Zinsen der Anleihe betragen 2000 Mk.; aus der Differenz

$$6164{,}6 - 2000 = 4164{,}6$$

ergiebt sich, dass 41 (q_1) Schuldscheine getilgt und 64,6 Mk. (ρ_1) Tilgungsrest auf das nächste Jahr übertragen werden. — Am Ende des 2. Jahres sind zu verzinsen $500 - 41 = 459$ Schuldscheine, also an Zinsen auszugeben 1836,0 Mk.; da ρ_1 durch die Zinsen eines Jahres auf 67,2 Mk. anwächst, so verbleiben zur Tilgung

$$6164{,}6 + 67{,}2 - 1836{,}0 = 4395{,}8\,.$$

Folglich werden am Schlusse des zweiten Jahres 43 Schuldscheine getilgt und 95,8 Mk. auf das nächste Jahr übertragen.

Auf diese Weise ergiebt sich der nachstehende Tilgungsplan. In der Spalte Kapitalrest ist angegeben, welches Kapital im nächsten Jahre zu verzinsen ist.

Ende des Jahres	Zinsen	Tilgung in Stücken	Kapitalrest zu 100 Mark	Tilgungsrest	
1	2000	41	459	64,6	1
2	1836	43	416	95,8	2
3	1664	46	370	0,2	3
4	1480	46	324	84,8	4
5	1296	49	275	56,8	5
6	1100	51	224	23,7	6
7	896	52	172	93,3	7
8	688	55	117	73,7	8
9	468	57	60	73,2	9
10	240	60		0,7	10

Der schliessliche Kapitalbestand (0,7 Mk.) lässt sich nur dadurch herabdrücken, dass man die Rechnung mit grösserer Genauigkeit, als hier, durchführt; ist aber praktisch ganz ohne Bedeutung.

16. Den in der ungleichmässigen Gütervertheilung wurzelnden sozialen Missständen kann man unter anderem dadurch entgegenarbeiten, dass man die Ansammlung grosser, milden Zwecken aller Art bestimmter Kapitalien in den Händen von Staats- oder Gemeindeverwaltungen oder von gemeinnützigen Vereinen möglichst befördert. Je mehr es die Staatsregierungen für eine ihrer

wesentlichen Aufgaben ansehen, die Nothstände in den untersten Volksschichten durch Ausdehnung der Haftpflicht der Arbeitgeber, durch Einführung obligatorischer Kranken- und Invalidenversicherung möglichst abzuschwächen, um so mehr werden dann die der Wohlthätigkeit zugewiesenen Stiftungsgelder zur Ausgleichung bei Nothlagen auch in den übrigen Bevölkerungsschichten, zur Unterstützung von Lernenden aller Art, zur Beihülfe in Krankheitsfällen, zur Gewährung von Asylen für vereinsamte oder der sittlichen Anleitung bedürftige Personen u. s. w. verwendbar sein.

Die Grundlagen zur Ansammlung grosser Kapitalien zu diesen Zwecken müssen nach wie vor durch Schenkungen und Vermächtnisse erfolgen.

Es können leicht Mittel angegeben werden, durch welche solche Kapitalien, ohne wesentliche Beeinträchtigung des Zweckes, zu dem sie gestiftet worden sind, zur Kapitalvermehrung benutzt werden können.

Als einfachstes Mittel empfiehlt es sich, dass für die Verwaltungen von Stiftungen folgende Grundsätze angenommen werden:

A. Man behält sich bei der Uebernahme jedes für milde Zwecke gestifteten Kapitals vor, dessen Zinsen nicht sofort im Sinne der Stiftung zu verwenden, sondern es zuvor während einer Reihe von Jahren durch Zinseszins sich vermehren zu lassen.

Es würde sich empfehlen, diese Wartezeit der Kapitalien im Allgemeinen vorher zu bestimmen, etwa so, dass man 5 oder 10 Jahre wählt, je nachdem es mehr oder weniger dringend erwünscht ist, dass die Zinsen des Kapitals stiftungsgemäss verwendet werden.

B. Nach Ablauf der Wartezeit wird nicht der ganze Zinsertrag des Kapitals stiftungsgemäss verwendet, sondern nur ein bestimmter Bruchtheil desselben, etwa zwei Drittel; das letzte Drittel dient zur Kapitalvermehrung.

C. Der zur Kapitalvermehrung dienende Bruchtheil der Zinsen wird zunächst für eine bestimmte Reihe von Jahren der Stiftung zugewiesen, aus welcher er fliesst. Die Verwaltung behält sich das Recht vor, nach Ablauf dieser Zeit den genannten Betrag nach freiem Ermessen anderen milden Stiftungen zuzuführen.

Nimmt man an, dass Stiftungsgelder nach Abzug der Verwaltungskosten eine Verzinsung von 4,25% zulassen, so wächst ein Kapital C in 5 bez. in 10 Jahren an auf

$$K = 1{,}0425^5 \cdot C, \quad \text{bez.} \quad 1{,}0425^{10} \cdot C,$$

d. i. auf den 1,23fachen, bez. 1,52fachen Betrag.

Hieraus ist ersichtlich, dass nach 5jähriger Wartezeit das Kapital bereits im 6. Jahre zu $\frac{2}{3} \cdot 4{,}25 = 2{,}83$% nur um den 10. Theil weniger stiftungsgemäss verwendbare Zinsen bringt, als wenn es ohne Wartezeit sofort die vollen Zinsen zu 4,25% für die Stiftung abgeworfen hätte; nach 10jähriger Wartezeit betragen die Zinsen im 11. Jahre zu 2,83% ebensoviel wie die des ursprünglich gestifteten Kapitals zu 4,3%.

Wird der dritte Theil des jährlichen Zinsbetrags zur Kapitalvermehrung verwendet, so wächst das Kapital durch Zinseszins zu $4{,}25 : 3 = 1{,}417$%.

Nach Ablauf von $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahren nach der Stiftung erreicht das Kapital bei 5. bez. 10jähriger Wartezeit den Betrag

$$1{,}0425^5 \cdot 1{,}01417^n \cdot C, \quad \text{bez.} \quad 1{,}0425^{10} \cdot 1{,}01417^n \cdot C.$$

Die folgende Tafel enthält für einige Werthe von n die Faktoren, mit denen man C multipliciren muss, um den Endwerth nach $n$jähriger stiftungsgemässer Verwendung, (d. i. $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahre nachdem das Kapital gestiftet wurde) zu erhalten:

n	40	60	80	100	120	180
5 Jahre Wartezeit	2,229	2,864	3,795	5,028	6,666	15,50
10 Jahre „ „	2,662	3,527	4,673	6,192	8,203	19,08

Wenn man es nicht räthlich finden sollte, die vorgeschlagene auf Kapitalvermehrung gerichtete Verwaltung von Stiftungsgeldern ganz allgemein einzuführen, so könnte doch durch Gesetz eine solche Verwaltungsart als zulässig erkannt werden. Man könnte dann bestimmen, dass die zur Verwaltung einer Stiftung bestimmten Behörden nach der Uebernahme derselben bei einer Oberbehörde um die Erlaubniss nachsuchen können, das Kapital während einer bestimmten Zeit — vielleicht 60 bis 70 Jahre lang — auf Vermehrung verwalten und die durch die Vermehrung geschaffenen Kapitalien in bestimmter Weise auch für andere, verwandte, näher anzugebende Zwecke verwenden zu dürfen; nach Ablauf dieser Zeit hätte dann die Oberbehörde Gelegenheit zu prüfen, ob eine Fortsetzung der vermehrenden Verwaltung in dem vorliegenden Falle angezeigt erscheint oder nicht.

Dabei wäre als Grundsatz auszusprechen, dass man das Einverständniss des Stifters mit der vermehrenden Verwaltung voraussetzt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erklärt wird; hierdurch dürften alle juristischen Bedenken gehoben sein.

Bis zur gesetzlichen Regelung dieser Angelegenheit wäre es zu wünschen, dass Personen, die die Absicht haben eine Stiftung zu errichten, für die hier gemachten Vorschläge erwärmt werden, so dass sie die vermehrende Verwaltung für die zu begründende Stiftung ausdrücklich zulassen*).

§ 3. Berechnung der Prämien für Renten-, Lebens- und Aussteuerversicherung.

1. Wenn eine Summe R nach Verlauf von n Jahren unter der Voraussetzung zahlbar ist, dass ein Ereigniss eingetreten ist, dessen Eintritt die Wahrscheinlichkeit w hat, so ist der heutige Werth der Summe

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w\,.$$

Denn ist z. B. jede von a_x heute x jährigen Personen verpflichtet, nach n Jahren, im Falle, dass die Person diesen Zeitpunkt erlebt, R zu zahlen, so wird die Summe nur von a_{x+n} Personen bezahlt; der auf heute berechnete Zeitwerth aller wirklich geleisteten Zahlungen beträgt daher

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot a_{x+n}\,,$$

und der durchschnittlich auf eine Person entfallende Betrag ist

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{a_{x+n}}{a_x} = R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w\,,$$

wenn w die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine heute x Jahre alte Person noch n Jahre lebt.

*) Aehnliche Vorschläge macht Möllinger, Das cyclische Verwaltungssystem. Zürich 1879.

2. Hat eine heute n jährige Person lebenslänglich eine Jahresrente vom Betrage 1 (Mark, Gulden, Franken) zu beziehen, und **erfolgt die Zahlung am Ende jedes Jahres**, so ist der auf heute berechnete Werth der lebenslänglichen Rente

$$1.\qquad \overset{n}{R}_1 = \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{r} + \frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots$$

Diese Reihe hört auf, sobald in der Sterblichkeitstafel $a_{n+z} = 0$ ist.

Wird die Rente **praenumerando** gezahlt, so vermehrt sich die Reihe 1. um die heute zahlbare Rente; bezeichnet man die praenumerando zahlbare Rente mit

$${}_1\overset{n}{R},$$

so hat man daher

$$2.\qquad {}_1\overset{n}{R} = 1 + \overset{n}{R}_1\,.$$

Wenn eine $n - s$ jährige Person heute eine Summe C bezahlt, um damit eine nach Vollendung des $n$ten Lebensjahres beginnende lebenslängliche jährliche Rente 1 zu erwerben, so hat man durch Vergleichung der auf heute berechneten Zeitwerthe

$$C = \frac{1}{r^s}\cdot\frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot{}_1\overset{n}{R};$$

denn der heutige Werth der 1., 2., 3., ... Rente ist

$$\frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^s},\quad \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^{s+1}},\quad \frac{a_{n+3}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^{s+2}},\ \ldots$$

Diese Grössen erhält man aus dem 1., 2., 3., ... Gliede der Reihe 2. durch Multiplication mit dem Faktor

$$\frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^s}.$$

3. Eine Person macht zu verschiedenen Zeiten ungleiche Einzahlungen, um dadurch eine am Ende des $n$ten Lebensjahres beginnende jährliche Rente zu erwerben; wie gross ist dieselbe?

Die gesuchte Rente wird gefunden, indem man nach No. 2, 3 für jede einzelne Einzahlung die Rente berechnet und alle diese Renten addirt. Die am Ende des $(n - s)$ten Jahres geleistete Einzahlung C gewährt die jährliche Rente G, wenn

$$C = \frac{1}{r^s}\cdot\frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot G\cdot{}_1\overset{n}{R};$$

daher hat man

$$G = \frac{a_{n-s}}{a_n}\cdot r^s C : {}_1\overset{n}{R}.$$

Sind die Einzahlungen $C, D, E, \ldots$ am Ende der Lebensjahre $n - s$, $n - t$, $n - u, \ldots$ erfolgt, so ist daher die dafür erworbene Rente

$$G = (a_{n-s}r^s C + a_{n-t}r^t D + a_{n-u}r^u E + \ldots) : {}_1\overset{n}{R}a_n.$$

4. Eine $n - s$ jährige Person will durch e gleiche jährliche Einzahlungen P $(e < s)$, die am heutigen Tage beginnen sollen, eine jährliche Leibrente 1 erwerben, die nach s Jahren zum ersten Male ausgezahlt werden soll. Wie viel beträgt P (die **Prämie**)?

Wenn anstatt P die Zahlung 1 jährlich erfolgte, so würde der auf heute berechnete Werth der Zahlungen der Unterschied einer heute beginnenden lebenslänglichen Rente

$${}_1\overset{n-s}{R}$$

und einer nach Vollendung des $(n - s + e)$ten Jahres beginnenden sein. Der heutige Werth der letzteren ist

$${}_1\overset{n-s+e}{R}\cdot\frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^e}.$$

Daher hat man zur Bestimmung von P die Gleichung

$$P\left({}_1\overset{n-s}{R} - \frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^e}\cdot{}_1\overset{n-s+e}{R}\right) = \frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^s}\cdot{}_1\overset{n}{R}.$$

5.* Bei den in No. 2, 3, 4, angegebenen Formeln ist vorausgesetzt worden, dass beim Tode einer versicherten Person die Erben keinen Anspruch an die Bank machen, sondern die Bank der Erbe der an sie geleisteten Zahlungen ist. Wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist, oder erst kurze Zeit nach Eintritt in denselben, nachdem er also auf seine Einzahlung hin sehr wenig an Rente zurückerhalten hat, so werden die Erben offenbar benachtheiligt. Man hat daher solche Versicherungen eingerichtet, bei denen beim frühzeitigen Tode des Versicherten von der Bank eine entsprechende Zahlung an die Rechtsnachfolger geleistet wird. Wir wollen annehmen, dass sich die Bank verpflichtet, beim Tode des Versicherten die baar eingezahlten Prämien (ohne Zinsen) zurück zugewähren, wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist; wenn er bereits einige Renten bezogen hatte, so soll der Unterschied der baar gezahlten Prämien und der Renten zurückgewährt werden.

Wir beschränken uns hier darauf, unter diesen Voraussetzungen die Zahlung C auszurechnen, die eine $(n - s)$ jährige Person zu leisten hat, um eine vom Ende des $n$ten Jahres beginnende Rente $\mathfrak{R}$ zu erwerben.

Wenn die Person im 1, 2, 3, ... $s$ten Jahre nach Abschluss des Versicherungsvertrags stirbt, so hat die Bank die volle Einzahlung C zurückzugeben; die auf heute berechneten Zeitwerthe aller dieser Zahlungen sind

$$\left[\left(1 - \frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r} + \left(1 - \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^2} + \ldots + \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^s}\right]C.$$

Wenn die Person im $(n + i)$ten Lebensjahre stirbt, so zahlt die Bank nur den Betrag C vermindert um die ersten i Renten, also $C - i\mathfrak{R}$ zurück. Der heutige Werth dieser Zahlung ist

$$\left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}}\right)\cdot\frac{1}{r^{s+i}}\cdot(C - i\mathfrak{R}).$$

Der heutige Werth dieser letzteren Zahlungen zusammen genommen ist

$$\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}}\right)\cdot\frac{1}{r^{s+1}}(C - \mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+2}}\cdot(C - 2\mathfrak{R})$$
$$+ \left(1 - \frac{a_{n+3}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+3}}(C - 3\mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+4}}{a_{n-s}}\right)\frac{1}{r^{s+4}}\cdot(C - 4\mathfrak{R}) + \ldots$$

Diese Reihe ist nur soweit fortzusetzen, als die Differenz $C - i\mathfrak{R}$ positiv ist, denn die Bank zahlt nur so lange an die Erben, als die baar gezahlten Renten zusammen weniger betragen, als die Einlage C. Ist daher i die ganze Zahl des Quotienten $C : \mathfrak{R}$ (so dass also $C : \mathfrak{R}$ aus der ganzen Zahl i und einem echten Decimalbruche besteht), so ist die gesammte Leistung H der Bank an die Erben, reducirt auf den heutigen Tag,

$$H = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^{s+i}}\right)C$$
$$- \left(\frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r} + \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{a_{n-s+3}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}}\cdot\frac{1}{r^{s+i}}\right)C$$
$$- \left[\frac{1}{r^{s+1}}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}}\right) - \frac{2}{r^{s+2}}\left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}}\right) - \ldots - \frac{i}{r^{s+i}}\left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}}\right)\right]\cdot\mathfrak{R}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$H = A\cdot C + B\cdot\mathfrak{R},$$
so hat man daher zur Bestimmung von C die Gleichung
$$C = A\cdot C + B\cdot\mathfrak{R} + \frac{1}{r^s}\cdot\frac{a_n}{a_{n-s}}\cdot{}_1\overset{n}{R}\cdot\mathfrak{R}.$$

6. Zwei Personen A und B, die erste m Jahre alt, die andere n Jahre, beziehen vom Ende des nächsten Jahres an eine Rente 1, die so lange ausgezahlt wird, als beide Personen am Leben sind; wie gross ist der heutige Werth dieser Rente?

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen nach i Jahren noch leben, ist
$$\frac{a_{m+i}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+i}}{a_n},$$
folglich ist der gesuchte Werth
$$\overset{m,n}{R}_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{r} + \frac{a_{m+2}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots$$
Soll die Rente praenumerando gezahlt werden, so ist der heutige Werth
$${}_1\overset{m,n}{R} = 1 + \overset{m,n}{R}_1,$$
da zu den obigen Zahlungen noch die heute fällige Zahlung 1 addirt werden muss.

Man kann das Paar A, B als ein Ganzes ansehen und sich eine Sterblichkeitstabelle für Paare, deren Theilnehmer heute m und n Jahre alt sind, entwerfen; wenn dieselbe mit dem Produkte
$$a_{m,n} = a_m a_n$$
beginnt, so würde, falls alle B am Leben blieben, nach i Jahren infolge Absterbens der Personen A die Anzahl der noch lebenden Paare
$$a_{m+i}\,a_n$$
sein; da aber von a_n Personen B nur noch a_{n+i} am Leben sind, so vermindert sich die Anzahl der lebenden Paare in demselben Verhältnisse, also erhält man für die Zahl der nach i Jahren noch lebenden Paare
$$a_{m+i,\,n+i} = a_{m+i}\cdot a_{n+i}.$$

Hieraus folgt sofort, dass alle in Bezug auf Rentenversicherung einer einzelnen Person geltenden Formeln auch auf Rentenversicherung für Paare gilt, wenn man nur statt der Zahlen a_{n+s} die Zahlen $a_{m+s,\,n+s}$ setzt.

7. Ist die Rente zahlbar, solange von den beiden Personen überhaupt noch eine lebt, also bis zum Tode der zuletzt sterbenden, so ist in $\overset{n}{R}_1$ an Stelle der Zahlen $a_{n+s} : a_n$ die Wahrscheinlichkeit dafür einzuführen, dass nach s Jahren noch eine der beiden Personen am Leben ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist
$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+s}}{a_m} + \frac{a_{n+s}}{a_n} - \frac{a_{m+s,\,n+s}}{a_{m,\,n}}.$$
Daher ist der gesuchte heutige Werth der Rente
$$\overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1.$$

Ist die Rente zahlbar, so lange B lebt, beginnt aber die Zahlung erst, wenn A gestorben ist, so ist $a_{n+s} : a_n$ durch die Wahrscheinlichkeit dafür zu ersetzen, dass B lebt und A gestorben ist, also durch
$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\cdot\frac{a_{n+s}}{a_n}.$$
Hieraus ergiebt sich sofort für den gesuchten Werth
$$\overset{m}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1.$$

8. Drei Personen A, B, C im Alter von m, n, p Jahren versichern heute eine Rente 1, zahlbar vom Ende des nächsten Jahres an, so lange noch alle drei Personen am Leben sind, also bis zum Tode der zuerst sterbenden. Um den heutigen Werth der Rente zu finden, hat man in $\overset{n}{R}_1$ die Lebenswahrscheinlichkeit $a_{n+s} : a_n$ zu ersetzen durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe A, B, C noch vollzählig ist, also durch
$$\frac{a_{m+s}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+s}}{a_n}\cdot\frac{a_{p+s}}{a_p}.$$
Daher ist der gesuchte Werth
$$\overset{m,n,p}{R}_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_{p+1}}{a_p}\cdot\frac{1}{r} + \frac{a_{m+s}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+s}}{a_n}\cdot\frac{a_{p+s}}{a_p}\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots$$

Derselbe kann ebenfalls angesehen werden wie eine auf das Leben einer einfachen Person versicherte Rente, wenn nur eine Sterblichkeitstafel zu Grunde gelegt wird, die statt der Zahlen a_{n+s} die Produkte
$$a_{m+s}\cdot a_{n+s}\cdot a_{p+s}$$
enthält. Man kann daher auch auf diesen Fall die übrigen in No. 2 bis 5 gegebenen Formeln übertragen. Beginnt die Rente erst, nachdem A und B gestorben sind und dauert bis zum Tode von C (Rentenversicherung für Kinder für den Fall ihrer gänzlichen Verwaisung), so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu benutzen
$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right)\frac{a_{p+s}}{a_p}.$$
Daher ergiebt sich
$$\overset{p}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Soll die Rente so lange gezahlt werden, als B und C leben, aber erst nach dem Ableben von A, so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu setzen
$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\frac{a_{n+s}}{a_n}\cdot\frac{a_{p+s}}{a_p},$$
Daher erhält man
$$\overset{n,p}{R}_1 - \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Wird die Rente so lange fortgezahlt, bis alle drei Personen gestorben sind, so benutzt man die Wahrscheinlichkeit
$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right)\left(1 - \frac{a_{p+s}}{a_p}\right)$$
und erhält
$$\overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 + \overset{p}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

9. Wird die Jahresrente 1 ratenweise gezahlt, nämlich je $1 : t$ nach Ablauf von $1 : t$ Jahren, so bedarf man zur Berechnung des heutigen Werthes einer Sterblichkeitstafel, die nicht von Jahr zu Jahr fortschreitet, sondern für das Intervall $1 : t$ construirt ist. Eine solche Tafel erhält man mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Genauigkeit, wenn man die gegebenen Tafeln durch Interpolation unter der Annahme ergänzt, dass das Absterben im Laufe eines Jahres gleichmässig erfolgt.

Von a_m Personen, die das $m$te Lebensjahr erfüllen, sterben im Laufe des nächsten Jahres $a_m - a_{m+1}$ Personen, im $t$ten Theile des Jahres sterben daher
$$\frac{1}{t}(a_m - a_{m+1}),$$
und in $\lambda : t$ Jahren
$$\frac{\lambda}{t}(a_m - a_{m+1}).$$

Die Anzahl derer, die das Alter $m + \lambda : t$ erreichen, ist

$$a_m - \frac{\lambda}{t}(a_m - a_{m+1}) = \frac{(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}}{t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer $n$jährigen Person, das Alter $m + \lambda : t$ zu erfüllen, ist folglich

$$\frac{(t-\lambda)a_m + \lambda a_{m+1}}{t a_n}.$$

Da wir voraussetzen, dass die Kapitalisirung der Zinsen nur an den Jahresschlüssen erfolgt, so muss eine um $\lambda : t$ Jahre vom Jahresanfang entfernte Zahlung zunächst durch den Faktor

$$1 : \left(1 + \frac{\lambda p}{100\,t}\right)$$

auf den vorhergehenden Jahresanfang und dann in bekannter Weise auf den heutigen Tag zurückdiscontirt werden. Der heutige Werth der an die $m + \lambda : t$ jährige Person zahlbaren Rente $1 : t$ ist daher

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda p}{100\,t}\right) r^{m-n}} \cdot \frac{(t-\lambda)\,a_m + \lambda\,a_{m+1}}{t\,a_n} \cdot \frac{1}{t}.$$

Die Rechnung nach dieser genauen Formel ist wegen des veränderlichen Divisors $1 + \frac{\lambda p}{100\,t}$ unbequem. Eine bequemere, hinlänglich genaue Formel wird erhalten, wenn man die zur Zeit $m + \lambda : t$ fällige Ratenzahlung durch den Faktor

$$1 + \frac{t-\lambda}{t} \cdot \frac{p}{100}$$

auf das Ende des laufenden Jahres und die so erhaltene Summe dann rückwärts auf den heutigen Tag discontirt. Dadurch erhält man als discontirten Werth der im $(m+1)$ten Lebensjahre des Rentners zahlbaren Renten

1. $$\frac{1}{r^{m-n+1}} \cdot \frac{1}{t^2 a_n} \sum_1^t \left(1 + \frac{t-\lambda}{t} \cdot \frac{p}{100}\right) [(t-\lambda)\,a_m + \lambda\,a_{m+1}].$$

Zur Bildung der Summe hat man von den Formeln Gebrauch zu machen

$$\Sigma\lambda = \frac{t(t+1)}{2}, \quad \Sigma(t-\lambda) = \frac{t(t-1)}{2},$$

$$\Sigma(t-\lambda)^2 = \tfrac{1}{6}\,t(t-1)(2t-1), \quad \Sigma(t-\lambda)\lambda = \tfrac{1}{6}\,t(t^2-1).$$

Man erhält, wenn man die Summe mit S bezeichnet,

2. $$\frac{1}{t^2} \cdot S = \frac{t-1}{2t}\left[1 + \frac{p(2t-1)}{300\,t}\right] a_m + \frac{t+1}{2t}\left[1 + \frac{p(t-1)}{300\,t}\right] a_{m+1}.$$

Aus 1. und 2. ergiebt sich der heutige Werth einer Rente $1 : t$, die an eine $n$jährige Person nach jedem $t$ten Theile eines Jahres zahlbar ist und nach Ablauf von $1 : t$ Jahr beginnt,

$$\overset{n}{R}_t = \frac{1}{r} \cdot \frac{t-1}{2t}\left[1 + \frac{p(2t-1)}{300\,t}\right] {}_1\overset{n}{R} + \frac{t+1}{2t}\left[1 + \frac{p(t-1)}{300\,t}\right] \cdot \overset{n}{R}_1.$$

Ersetzt man hier ${}_1\overset{n}{R}$ durch $\overset{n}{R}_1 + 1$, so ergiebt sich nach gehöriger Zusammenrechnung

3. $$\overset{n}{R}_t = \left(1 + \frac{p^2}{30000\,r} \cdot \frac{t^2-1}{t^2}\right) \overset{n}{R}_1 + \left(1 + \frac{p}{300} \cdot \frac{2t-1}{t}\right) \cdot \frac{t-1}{2tr}.$$

Man kann links im ersten Gliede ohne merklichen Fehler den vor $\overset{n}{R}_1$ stehenden Faktor durch 1 ersetzen; im zweiten Gliede kann man $1 : r$ durch

$$1 - \frac{p}{100}$$

ersetzen, das Produkt ausführen und darin das mit p^2 multiplicirte Glied unterdrücken. Hierdurch erhält man

4. $$\overset{n}{R}_t = \overset{n}{R}_1 + \left(1 - \frac{p}{300} \cdot \frac{t+1}{t}\right) \cdot \frac{t-1}{2t}.$$

Hieraus kann man einen Annäherungswerth für eine continuirliche Rente $\underset{\infty}{\overset{n}{R}}$ erhalten, indem man $t = \infty$ setzt; vom genauen Werthe weicht der so berechnete infolge der Annahme gleichmässiger Vertheilung der Sterbefälle innerhalb eines Jahres ab; ferner ist zu bemerken, dass in dem so erhaltenen Werthe die Voraussetzung enthalten ist, dass die Verzinsung im Laufe eines Jahres nur einfach (ohne Zinseszins) erfolgt. Nimmt man neben der continuirlichen Rentenzahlung auch eine continuirliche Kapitalisirung der Zinsen an, so erhält man einen abweichenden Werth, für welchen man indess den Werth $\underset{\infty}{\overset{n}{R}}$ als genügende Annäherung betrachten kann. Durch die Substitution $t = \infty$ ergiebt sich

5. $$\underset{\infty}{\overset{n}{R}} = \overset{n}{R}_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{300}\right).$$

Dieselbe Formel ist auch auf die Renten

$$\underset{\infty}{\overset{m,n}{R}}, \quad \underset{\infty}{\overset{m,n,p}{R}},$$

sowie auf die übrigen in No. 6 bis 9 betrachteten Fälle anwendbar, da alle diese Renten sich als Renten $\overset{n}{R}_1$ oder ${}_1\overset{n}{R}$ ansehen lassen, denen verschiedene Sterblichkeitstafeln zu Grunde liegen.

10. Der genaue heutige Werth einer an eine $n$jährige Person zahlbaren, sofort beginnenden, stetigen Rente ergiebt sich (§ 2, 14), wenn die Summe der in einem Jahre baar gezahlten Beträge 1 ist, und stetige Kapitalisirung der Zinsen stattfindet, zu

1. $$\underset{\infty}{\overset{n}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{n-x}}{a_n} \cdot v^x dx;$$

ferner ist

2. $$\underset{\infty}{\overset{m,n}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot v^x dx,$$

3. $$\underset{\infty}{\overset{m,n,p}{R}} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p} \cdot v^x dx.$$

Um diese Integrale berechnen zu können, muss a_{n+x} als Function von $n + x$ bekannt sein. Legt man das Gompertz-Makeham'sche Gesetz zu Grunde (§ 1, No. 7), so hat man

$$a_{n+x} = cK^{q^{n+x}} h^{n+x}, \quad a_n = cK^{q^n} h^n,$$

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{B_n^{q^x}}{B_n} \cdot h^x,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$K^{q^n} = B_n.$$

Hierdurch verwandeln sich die Formeln 1., 2. und 3. in

4. $$\underset{\infty}{\overset{n}{R}} = \frac{1}{B_n} \int_0^\infty B_n^{q^x} (hv)^x dx,$$

5. $$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}} = \frac{1}{B_m B_n}\int_0^\infty (B_m B_n)^{q^x}(h^2 v)^x\,dx\,,$$

6. $$\overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}} = \frac{1}{B_m B_n B_p}\int_0^\infty (B_m B_n B_p)^{q^x}(h^3 v)^x\,dx\,.$$

Zur Berechnung der Renten

$$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}},\quad \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}}$$

hat man nicht nöthig, die Rechnung für alle einzelnen Combinationen m, n und m, n, p zu führen. Bei Benutzung der soeben gegebenen Formeln genügt es, die Renten für Personen gleichen Alters zu berechnen. Hat man nämlich für jedes vorkommende Lebensjahr s die Tafeln der Werthe

$$\overset{s,s}{\underset{\infty}{R}},\quad \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}$$

berechnet, so bestimme man die Zahl s aus der Gleichung

7. $$B_s{}^2 = B_m B_n, \quad \text{bez.} \quad B_s{}^3 = B_m B_n B_p\,;$$

alsdann ist offenbar

$$\overset{m,n}{\underset{\infty}{R}} = \overset{s,s}{\underset{\infty}{R}}, \quad \text{bez.} \quad \overset{m,n,p}{\underset{\infty}{R}} = \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}.$$

Ergiebt sich für s aus einer der Gleichungen 7. keine ganze Zahl, so hat man den zugehörigen Werth von

$$\overset{s,s}{\underset{\infty}{R}} \quad \text{bez.} \quad \overset{s,s,s}{\underset{\infty}{R}}$$

durch Interpolation aus der für die Reihe der ganzen Zahlen s berechneten Rententafel zu bestimmen.

11. Wenn man nach No. 10 die Berechnung der stetigen Renten durchgeführt hat, so ergeben sich hinlänglich gute Annäherungswerthe für die jährlichen Renten aus der Gleichung (No. 9, 5)

$$R_1 = \underset{\infty}{R} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{300}\right), \quad {}_1R = \underset{\infty}{R} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{300}\right).$$

Für die in Raten zahlbaren Renten hat man nach No. 9, 4

$$R_t = R_1 + \left(1 - \frac{p}{300}\cdot\frac{t+1}{t}\right)\frac{t-1}{2t}.$$

Werden die Raten praenumerando gezahlt, so ist der Werth der Rente

$${}_tR = R_t + \frac{1}{t}.$$

---

12. Einfache Lebensversicherung auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung. Eine $n$jährige Person A zahlt bei der Versicherungsbank ein Kapital C ein; dafür zahlt die Bank beim Tode der versicherten Person eine Summe S an die Hinterlassenen aus.

Es wird angenommen, dass die versicherten Summen S für alle im Laufe eines Lebensjahres Verstorbenen am Ende dieses Jahres ausgezahlt werden. Alsdann hat die Bank am Ende des $x$ten Jahres (von heute an gerechnet) die Summe S unter der Voraussetzung zu zahlen, dass A im $(n+x)$ten Lebensjahre stirbt; die Wahrscheinlichkeit hiervon ist

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n}.$$

Folglich ist der heutige Werth dieser Zahlung

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^x}\cdot S.$$

Die Gesammtleistung der Bank im Interesse dieser Versicherung ist die Summe dieser Glieder von $x = 1$ bis zur Grenze der Sterblichkeitstafel. Daher hat man die Gleichung

$$\begin{aligned} C = S\Big(&\frac{a_n}{a_n}\cdot\frac{1}{r} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots \\ &- \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{r} - \frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{a_{n+3}}{a_n}\cdot\frac{1}{r^3} - \ldots\Big) \\ = S&\left({}_1\overset{n}{R}\cdot\frac{1}{r} - \overset{n}{R}_1\right) = S\left[\frac{1}{r}\left(\overset{n}{R}_1 + 1\right) - \overset{n}{R}_1\right]. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C = S\left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{R}_1\right).$$

13. Einfache Lebensversicherung mit jährlicher Prämienzahlung. Gewöhnlich erfolgt die Lebensversicherung nicht durch eine einzige Einzahlung, sondern durch jährliche Zahlung einer bestimmten Summe $\overset{n}{P}$ (Prämie); die erste Zahlung wird sofort beim Abschlusse der Versicherung bezahlt.

Der heutige Werth aller an die Bank von dem Versicherten zu zahlenden Prämien ist das $\overset{n}{P}$ fache der Rente ${}_1\overset{n}{R} = \overset{n}{R}_1 + 1$. Daher hat man, wenn C und S dieselbe Bedeutung haben wie in No. 12,

$$\overset{n}{P}\left(\overset{n}{R}_1 + 1\right) = C,$$

mithin

$$\overset{n}{P} = S\left\{\frac{1}{r} - \frac{\overset{n}{R}_1}{\overset{n}{R}_1 + 1}\right\}.$$

14. Lebensversicherung für zwei verbundene Leben. Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige Person zahlen an die Bank ein Kapital C, und verlangen dafür die Auszahlung einer Summe S, zahlbar nach dem Tode der zuerst sterbenden Person an die Ueberlebende.

Nach No. 6 bestehen von $a_m \cdot a_n$ Paaren von Personen A, B nach x Jahren noch $a_{m+x}\cdot a_{n+x}$ Paare. Daher lösen sich im x Jahre, von heute an gerechnet,

$$a_{m+x-1}\,a_{n+x-1} - a_{m+x}\,a_{n+x}$$

Paare auf; die Wahrscheinlichkeit, dass das Paar A, B sich im Laufe des $x$ten Jahres auflöst, ist hiernach

$$\frac{a_{m+x-1}\,a_{n+x-1} - a_{m+x}\,a_{n+x}}{a_m\,a_n}.$$

Hieraus folgt der heutige Werth der Leistungen der Bank zu

$$\begin{aligned} S\cdot\sum &\frac{a_{m+x-1}\,a_{n+x-1} - a_{m+x}\,a_{n+x}}{a_m\,a_n}\cdot\frac{1}{r^x} \\ &= S\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot{}_1\overset{m,n}{R} - \overset{m,n}{R}_1\right). \end{aligned}$$

Man erhält daher (vergl. No. 12 und 13)

$$C = S\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\overset{m,n}{R}_1\right).$$

Wird eine jährliche gleiche Prämie $\overset{m,n}{P}$ bezahlt, so ist

$$\overset{m,n}{P} = S\cdot\left\{\frac{1}{r} - \frac{\overset{m,n}{R}_1}{\overset{m,n}{R}_1 + 1}\right\}.$$

15. Soll das versicherte Kapital erst nach dem Tode der zuletzt sterbenden Person ausgezahlt werden (Lebensversicherung von Eltern zu Gunsten ihrer Kinder für den Fall der gänzlichen Verwaisung derselben), so kommt die Wahrscheinlichkeit in Betracht, dass nach x Jahren beide Personen gestorben sind; dieselbe ist

$$\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right).$$

Daher ist der auf heute reducirte Werth der Leistungen der Bank

$$S \cdot \sum\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r_x}.$$

Folglich ist

$$C = S \cdot \sum\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r_x}$$

$$= S\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1\right).$$

Wird eine jährliche Prämie P bezahlt, so hat die Zahlung so lange zu dauern, als noch eine der Personen am Leben ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach x Jahren noch eine der beiden Personen lebt, ist

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}.$$

Der heutige Werth aller Prämienzahlungen P ist daher

$$P \cdot \sum\left(\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right)\frac{1}{rx},$$

wobei die Summation mit dem Werthe $x = 0$ beginnt. Für diese Summe ergiebt sich sofort

$$P\left(1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1\right);$$

folglich ist

$$P = S \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1}{1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1}.$$

16. Ueberlebensversicherung. Eine Person A versichert ein Kapital S zu Gunsten einer Person B; das Kapital soll beim Tode von A an B ausgezahlt werden, wenn B A überlebt; stirbt B vor A, so fällt das von A eingezahlte Kapital, bez. die bis zum Tode von B eingezahlten Prämien, an die Bank.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Versicherung der Summe S durch eine einmalige Zahlung C erfolgt. Wir denken uns jedes Jahr in t gleiche Theile getheilt, und machen die Annahmen, dass das Absterben im Verlaufe eines Jahres gleichmässig erfolgt; in Bezug auf die Person A wollen wir ferner annehmen, dass das Absterben nicht an den Enden der kleinen Zeitabschnitte, sondern im Verlaufe derselben erfolgt; bezüglich des Absterbens der B setzen wir umgekekrt voraus, dass es nur am Ende der Zeitabschnitte erfolgt. Nehmen wir dann $t = \infty$, so weichen beide Voraussetzungen von der Wahrheit nicht ab. Alle Ausgaben, die die Bank im Laufe eines Jahres zu machen hat, discontiren wir vorwärts auf das Ende des nächsten Jahres und dann rückwärts auf heute.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A von heute an noch $x + \lambda : t$ Jahre lebt, aber nach $x + (\lambda + 1)t$ Jahren nicht mehr lebt, ist

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m},$$

denn von a_n heute lebenden n jährigen Personen sterben $(a_{m+x} - a_{m+x+1}) : t$ in jedem t ten Theile ihres $(n + x + 1)$ten Lebensjahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B nach $x + \lambda : t$ Jahren noch lebt, ist

$$\frac{(t - \lambda)\, a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Die auf diesen Zeitraum bezügliche Leistung der Bank ist daher

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m} \cdot \frac{(t - \lambda)\, a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n}\left(1 + \frac{(t - \lambda)p}{100t}\right) \cdot \frac{1}{r^{x+1}}.$$

Die discontirte Leistung der Bank in Bezug auf das $(x + 1)$te Jahr ergiebt sich hieraus zu

$$1. \quad S \cdot \frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t^2 a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{x+1}} \sum\left([t - \lambda] + \frac{p}{100t}[t - \lambda]^2\right) a_{n+x}$$
$$+ \left(\lambda + \frac{p}{100t}\lambda[t - \lambda]\right) a_{n+x+1}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Werthe von λ von 1 bis t. Berechnet man die Summe und geht dann zur Grenze $t = \infty$ über, so erhält man

$$\frac{1}{t^2}\sum = \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right) a_{n+x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right) a_{n+x+1}.$$

Dieser Werth ist in 1. einzusetzen und die Summe aller so erhaltenen discontirten Jahresleistungen von $x = 0$ an zu bilden. Dies ergiebt die Gleichung

$$C = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\left({}_1\overset{m,n}{R} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} - \overset{m,n}{R}_1\right)\right] \cdot S.$$

Ersetzt man $\overset{m,n}{R}_1$ durch ${}_1\overset{m,n}{R} - 1$, so erhält man

$$3. \quad C = \frac{1}{r}\left[\frac{p}{600} \cdot {}_1\overset{m,n}{R} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1\right)\right] \cdot S.$$

Wird eine jährliche Prämie P entrichtet, so hat die Zahlung derselben so lange zu erfolgen, als beide Personen am Leben sind; daher ist der auf heute discontirte Werth aller dieser Zahlungen (No. 13)

$$P \cdot {}_1\overset{m,n}{R}.$$

Hieraus und aus 3. folgt

$$P = \frac{1}{{}_1\overset{m,n}{R} r}\left[\frac{p}{600}\, {}_1\overset{m,n}{R} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300}\right)\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}_1\overset{m+1,n}{R} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1\right)\right].$$

In vielen Fällen kann man sich mit der Annäherung begnügen, die aus dieser Formel hervorgeht, wenn man die mit den Faktoren $p : 600$ und $p : 300$ versehenen Glieder weglässt. Man erhält dann einfacher

$$P = \frac{1}{2\, {}_1\overset{m,n}{R} \cdot r}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, {}_1\overset{m,n+1}{R} + 1 - \frac{a_{m+1}}{a_m}\, {}_1\overset{m+1,n}{R}\right).$$

Statt der praenumerando zahlbaren Renten kann man postnumerando zahlbare einführen

$${}_1\overset{m,n}{R} = \overset{m,n}{R}_1 + 1, \quad {}_1\overset{m,n+1}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{m-1}\, a_n}{a_m a_{n+1}}\, \overset{m-1,n}{R}_1, \quad {}_1\overset{m+1,n}{R} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_m\, a_{n-1}}{a_{m+1} a_n}\, \overset{m,n-1}{R}_1,$$

und erhält

$$P = \frac{1}{2\left(\overset{m,n}{R}_1 + 1\right)}\left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\, \overset{m-1,n}{R}_1 + \frac{1}{r} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \overset{m,n-1}{R}_1\right).$$

---

17. Aussteuerversicherung. Hierunter wollen wir alle die Arten der

Versicherung begreifen, bei welchen der Versichernde in den ersten Lebensjahren eines Kindes ein Kapital einzahlt, oder die Verpflichtung zu einer jährlichen Prämienzahlung eingeht, während die Bank sich verpflichtet, an einem bestimmten Termine ein bestimmtes Kapital S auszuzahlen, vorausgesetzt, dass das Kind diesen Termin erlebt.

Man hat diese Versicherungen verschieden eingerichtet; die Prämienzahlung hört entweder mit dem Tode des Versichernden auf, oder sie ist bis zum Jahre vor der Auszahlung des Kapitals zu entrichten; beim frühzeitigen Tode des Kindes fallen die eingezahlten Prämien und Kapitale der Bank anheim, oder sie werden vollständig (ohne Zinsen) oder verkürzt zurückbezahlt.

Versicherungen mit Prämienrückgewähr haben im Wesentlichen nur die Wirkung von Sparkassen; sie gewähren vor diesen nur den Vortheil, dass sie die Verwendung der versicherten Gelder zu einem anderen Zwecke ausschliessen; verbinden aber damit den Nachtheil, dass die eingezahlten Beträge die Verwaltungskosten und den Gewinn der Bank mit zu tragen haben.

Diese Art der Versicherung könnte sehr zweckmässig im Interesse der Tausende von Eltern und Erziehern, die sich ihrer bedienen wollen, durch eine sehr einfache Modification an Einlagebüchern der öffentlichen Sparkassen ersetzt werden.

Man treffe die Einrichtung, dass Eltern und Erzieher Sparbücher erwerben können, die sie auf den Namen eines Kindes ausstellen lassen, und welche den ausdrücklichen Vermerk enthalten, dass Auszahlungen vor einem bestimmten Tage nur dann erfolgen, wenn der Tod der Person, auf deren Namen das Buch lautet, urkundlich nachgewiesen wird.

Ein Vater, der für die Aussteuer seiner Tochter sparen will, würde ein solches Buch auf den Namen der Tochter ausstellen und als Auszahlungstermin z. B. den Tag eintragen lassen, an welchem die Tochter das 18. Lebensjahr vollendet. Alle auf das Buch gemachten Einzahlungen würden alsdann erst an diesem Tage erhoben werden können, ausgenommen, wenn die Tochter vorher stirbt.

Diese Art der Kinderversorgung würde sich alsdann von der bei Versicherungsanstalten mit Prämienrückgabe nur dadurch nachtheilig unterscheiden, dass bei letzterer der Zwang regelmässiger Prämienzahlung besteht; dagegen würde man den erheblichen Vortheil haben, zu jeder Zeit noch so kleine Beträge einzahlen zu können; unzweifelhaft würde die vorgeschlagene Einrichtung sehr stark verwendet werden und viel Nutzen stiften.

18. Wir betrachten hier nur die Form Aussteuerversicherung, welche das eigentliche Wesen der Versicherung — nämlich eine Sicherheit auch gegen die ungünstigsten Zufälle zu gewähren, — am deutlichsten zeigt. Wir nehmen an, eine $m$jährige Person A (Vater) versichert zu Gunsten einer $n$jährigen Person B (Kind) ein Kapital S, zahlbar nach k Jahren in dem Falle, dass B alsdann noch lebt; die Versicherung erfolgt durch jährliche Prämien, die längstens k mal gezahlt werden; die Prämienzahlung hört bereits früher auf, wenn während der nächsten $k-1$ Jahren eine der beiden Personen stirbt; (der Vater zahlt also die Prämie so lange das Kind lebt längstens k mal, oder, wenn er vorher stirbt, bis zu seinem Tode).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine $n$jährige Person das Lebensalter $n+k$ erreicht, ist

$$\frac{a_{n+k}}{a_n}.$$

Daher ist die auf heute discontirte Leitung der Bank

$$\frac{1}{r^k} \cdot \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A und B nach i Jahren noch leben, ist

$$\frac{a_{m+i}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+i}}{a_n}.$$

Daher ist der auf heute discontirte Werth aller Prämien

$$P \cdot \sum_0^{k-1} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} = P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} - P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+k+i} a_{n+k+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{k+i}}$$

$$= P \cdot \left({}_1\overset{m,\,n}{R} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot {}_1\overset{m+k,\,n+k}{R} \right).$$

Folglich hat man für P die Gleichung

$$P \left(r^k\, {}_1\overset{m,\,n}{R} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_a} \cdot {}_1\overset{m+k,\,n+k}{R} \right) = \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

---

19. Zur Deckung der Verwaltungskosten und bei Gesellschaften, welche Actienunternehmungen sind, zur Erzielung einer Dividende, setzt man die jährlichen oder einmaligen Prämien höher an, als sie sich durch die obigen Formeln ergeben, in welchen auf Verwaltung und Gewinn keine Rücksicht genommen worden ist. Dabei geht man von dem Grundsatze aus, den Beitrag, den man von jeder einen Versicherungsvertrag abschliessenden Person zu Kosten und Gewinn fordert, proportional den Leistungen der Bank an die Person zu bestimmen.

Setzt man fest, dass für Verwaltung etc. das μfache der aus den Formeln folgenden Leistung zu zahlen ist ($\mu < 1$) und bezeichnet die wirkliche (einmalige oder jährliche) Prämie mit $\mathfrak{P}$, die reine (aus den Formeln folgende) wieder mit P, so ist bei allen Versicherungen ohne Prämienrückgewähr

$$\mathfrak{P} = (1 + \mu) P.$$

Denn wenn der auf heute discontirte Werth aller theoretischen Prämienzahlungen mit aP bezeichnet wird, so ist der Ueberschuss, den die Bank macht

$$a\mathfrak{P} - aP = \mu \cdot aP = \mu S,$$

wenn S die auf heute discontirte Leistung der Bank bezeichnet.

Anders verhält sich die Sache bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr. Die Leistung der Bank setzt sich hier aus zwei Theilen zusammen: Ein Theil drückt den heutigen Werth der Prämienrückzahlungen, der andere den heutigen Werth der zu leistenden versicherten Summen (Kapitalien, Rente) aus. Man hat daher für die Leistung der Bank die Formel

$$bP + cS.$$

Bezeichnet man wieder den heutigen Werth der einzuzahlenden reinen Prämie mit aP, so ist

$$aP = bP + cS.$$

Wird statt der reinen Prämie die wirkliche Prämie

$$\mathfrak{P} = (1 + \nu) P$$

gefordert, so nimmt die Bank $a\nu P$ mehr ein, als nach 1., giebt aber dafür auch $b\nu P$ mehr aus; zur Deckung der Kosten etc. verbleibt also nur der Betrag

$$\nu(a - b) P.$$

Soll dies das μfache der wirklichen Leistung der Bank sein, so hat man die Gleichung

$$\nu(a - b) P = \mu b (1 + \nu) P + \mu c S,$$

woraus für ν der Werth folgt

$$\nu = \frac{\mu(bP + cS)}{(a - b - b\mu)\cdot P}.$$

20. Bei der **Beurtheilung des augenblicklichen Standes einer Versicherungskasse** hat man zu beachten: a) die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben; b) die Verpflichtungen, welche die Kasse gegen die Versicherten zu erfüllen hat; c) den Aufwand für die Verwaltung; d) das Baarvermögen der Kasse.

Die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben, bestehen in wirklichen jährlichen Prämien; bei Berechnung derselben hat man das heutige Alter zu Grunde zu legen.

Da die Beiträge zu den Verwaltungskosten proportional den Leistungen der Bank erhoben werden, so lassen sich die Posten b) und c) zusammenfassen. Wird das ρfache der Leistungen für die Verwaltung berechnet (die obige Zahl μ bezieht sich auf Verwaltung und Gewinn), so hat man die aus den Verpflichtungen gegen die Versicherten folgenden Leistungen der Bank mit $(1 + \rho)$ zu multipliciren.

Der Vergleich der Zahlen a) und d) mit b) und c) ergiebt den Gewinn der Bank.

Einen Theil dieses Gewinnes wird man zur Dotirung eines Reservefonds zur Sicherstellung der Bank gegen unvorhergesehene Verluste verwenden, insbesondere gegen die, welche aus ungünstigen Abweichungen der Sterbefälle der bei der Bank Versicherten von der den Rechnungen zu Grunde liegenden Sterblichkeitstafel folgen.

21. Für eine einfache Lebensversicherung ist die Verpflichtung der Bank, wenn der Versicherte heute q Jahre alt ist, einschliesslich des Aufwandes für Verwaltung,

$$(1 + \rho)\, S\left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r}\cdot \overset{q}{R}_1\right).$$

Bei jährlicher Prämienzahlung $\mathfrak{P}$ beträgt die Verpflichtung des Versicherten gegen die Bank

$$\mathfrak{P}\left(\overset{q}{R}_1 + 1\right).$$

Bei Rentenversicherungen bestehen Verpflichtungen gegen die Bank bei den Personen, die jährliche Prämien zahlen; die Personen, welche Rente gegen einmalige Prämie versichert haben, sowie die, welche schon in den Rentengenuss eingetreten sind oder mit dem Jahresschlusse in denselben eintreten werden, haben keine Verpflichtung gegen die Bank.

Wir müssen darauf verzichten, die Formeln zur Beurtheilung der Kassenlage ausführlich zu entwickeln. Nach den angegebenen Grundsätzen und mit Hilfe der entwickelten Formeln lassen sie sich ohne Schwierigkeit aufstellen.

Absterbeordnung und Tafel der Lebenserwartung der Bevölkerung des preussischen Staates,

berechnet aus dem Vergleiche der Anfangs 1867, 1868, 1872, 1875, 1876 und 1877 im preussischen Staate vorhandenen Lebenden und der daraus in denselben Jahren Gestorbenen.

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
1 Jahr . .	77 154	80 115	50,9	54,2
2 „ . .	71 297	74 333	52,9	56,1
3 „ . .	68 483	71 469	53,3	56,6
4 „ . .	66 681	69 639	53,1	56,3
5 „ . .	65 433	68 338	52,7	55,9
6 „ . .	64 503	67 375	52,2	55,2
7 „ . .	63 757	66 600	51,4	54,6
8 „ . .	63 158	65 984	50,8	53,9
9 „ . .	62 688	65 493	50,0	53,0
10 „ . .	62 304	65 086	49,1	52,2
11 „ . .	61 975	64 740	48,4	51,3
12 „ . .	61 690	64 429	47,4	50,5
13 „ . .	61 432	64 139	46,5	49,6
14 „ . .	61 192	63 854	45,6	48,7
15 „ . .	60 948	63 565	44,7	47,8
16 „ . .	60 688	63 266	43,8	47,0
17 „ . .	60 383	62 942	43,0	46,1
18 „ . .	60 025	62 606	42,2	45,2
19 „ . .	59 625	62 262	41,3	44,3
20 „ . .	59 215	61 899	40,5	43,5
21 „ . .	58 733	61 511	39,7	42,6
22 „ . .	58 220	61 106	38,9	41,8
23 „ . .	57 683	60 678	38,1	40,9
24 „ . .	57 154	60 217	37,3	40,1
25 „ . .	56 641	59 731	36,6	39,3
26 „ . .	56 138	59 228	35,7	38,5
27 „ . .	55 637	58 715	35,0	37,7
28 „ . .	55 128	58 189	34,2	36,9
29 „ . .	54 614	57 631	33,4	36,1
30 „ . .	54 077	57 071	32,6	35,3

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
31 Jahr . .	53 547	56 485	31,8	34,5
32 „ . .	53 040	55 923	31,0	33,7
33 „ . .	52 503	55 340	30,2	32,9
34 „ . .	51 947	54 739	29,5	32,1
35 „ . .	51 372	54 130	28,7	31,3
36 „ . .	50 774	53 504	27,9	30,5
37 „ . .	50 170	52 874	27,2	29,7
38 „ . .	49 545	52 230	26,4	28,9
39 „ . .	48 897	51 578	25,7	28,2
40 „ . .	48 186	50 906	25,0	27,4
41 „ . .	47 445	50 221	24,2	26,6
42 „ . .	46 781	49 615	23,5	25,8
43 „ . .	46 047	48 963	22,8	25,0
44 „ . .	45 303	48 329	22,0	24,2
45 „ . .	44 511	47 677	21,3	23,4
46 „ . .	43 701	47 034	20,6	22,6
47 „ . .	42 933	46 426	19,9	21,8
48 „ . .	42 121	45 799	19,2	21,0
49 „ . .	41 270	45 139	18,5	20,3
50 „ . .	40 356	44 401	17,8	19,5
51 „ . .	39 403	43 620	17,2	18,7
52 „ . .	38 577	42 925	16,5	17,9
53 „ . .	37 640	42 135	15,8	17,1
54 „ . .	36 667	41 298	15,1	16,4
55 „ . .	35 649	40 416	14,5	15,6
56 „ . .	34 588	39 495	13,9	14,9
57 „ . .	33 540	38 564	13,2	14,2
58 „ . .	32 491	37 600	12,6	13,5
59 „ . .	31 381	36 556	12,0	12,9
60 „ . .	30 187	35 373	11,5	12,3
61 „ . .	28 937	34 121	11,0	11,7
62 „ . .	27 868	33 046	10,4	11,0
63 „ . .	26 658	31 801	9,9	10,4
64 „ . .	25 378	30 459	9,4	9,9
65 „ . .	24 051	29 025	8,9	9,4
66 „ . .	22 700	27 557	8,4	8,8
67 „ . .	21 360	26 123	7,9	8,3
68 „ . .	19 969	24 612	7,5	7,8
69 „ . .	18 557	23 017	7,0	7,3
70 „ . .	17 137	21 347	6,6	6,9

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebendgeborenen erlebten das nebenbezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
71 Jahr . .	15 727	19 653	6,2	6,4
72 „ . .	14 486	18 229	5,8	6,0
73 „ . .	13 155	16 627	5,4	5,6
74 „ . .	11 853	15 055	5,0	5,2
75 „ . .	10 564	13 492	4,6	4,8
76 „ . .	9 300	11 924	4,3	4,4
77 „ . .	8 126	10 484	4,0	4,1
78 „ . .	7 004	9 141	3,8	3,9
79 „ . .	5 849	7 734	3,8	3,8
80 „ . .	4 886	6 452	3,6	3,7
81 „ . .	4 037	5 328	3,4	3,5
82 „ . .	3 406	4 529	3,0	3,1
83 „ . .	2 794	3 736	2,8	2,9
84 „ . .	2 227	2 979	2,7	2,8
85 „ . .	1 727	2 316	2,5	2,7
86 „ . .	1 311	1 788	2,4	2,6
87 „ . .	990	1 402	2,2	2,5
88 „ . .	738	1 076	1,9	2,2
89 „ . .	520	792	1,9	2,1
90 „ . .	359	566	2,2	2,2
91 „ . .	253	389	2,5	2,6
92 „ . .	192	304	2,2	2,4
93 „ . .	142	225	2,1	2,4
94 „ . .	101	161	2,1	2,6
95 „ . .	73	120	2,2	2,8
96 „ . .	51	87	2,2	2,9
97 „ . .	38	70	2,3	2,6
98 „ . .	28	56	1,9	2,0
99 „ . .	21	43	1,6	1,5
100 „ . .	15	32	1,5	1,4

Druckfehler-Verzeichniss des II. Bandes.

Seite 1, Zeile 3 u. 4 v. u. lies P' und P'' statt OP' und OP''.

„ 2, „ 1 v. o. lies OP' und OP'' st. P' und P''.

„ 69, „ 6 v. u. „ $\mathfrak{P}'$ st. $\mathfrak{P}_1$.

„ 70, „ 13 v. u. „ y^n st. y_n.

„ 71, „ 14 v. u. „ ia' st. ai'.

„ 127, „ 29 v. o. „ $f \equiv$ st. $f_1 \equiv$.

„ 129, „ 17 v. o. „ $\alpha_{23}u_2u_3$ st. $a_{23}u_2n_3$.

„ 168, No. 4, Gleichung 6. lies x_2 st. x_1.

„ 168, No. 4, Gleichung 7. „ B_0 st. B_3.

„ 169, Zeile 12 v. o. lies x_2 st. x_1.

„ 176, „ 7 v. u. „ $2f_{12}(\mathfrak{x})$ st. $2f_{11}(\mathfrak{x})$.

„ 185, „ 8 v. o. „ $f_1 = 2x_2x_3$ und $f_2 = 2x_1x_3$ st. $f = 2x_2x_3$ und $f = 2x_1x_3$.

„ 193, „ 19 v. o. „ $3a_{233}x_2x_3^2$ st. $3a_{233}x_1x_3^2$.

„ 241, „ 2 v. o. „ φ'_w st. φ_w.

„ 261, „ 2 v. o. „ bv st. by.

„ 263, „ 8 v. u. „ gu st. yu.

„ 280, „ 6 v. o. „ g_1 st. g.

„ 286, „ 17 v. u. „ einer st. eine.

„ 287, „ 9 v. o. „ Cylinder st. Kegel.

„ 321, „ 5 v. u. „ φ_{31}' und φ_{41}' st. φ_{31} und φ_{41}.

„ 345 in der letzten Gleichung lies T_{32} st. T_{33}.

„ 408, Zeile 1 v. o. lies a_{13} st. a_{33}.

„ 420, „ 15 u. 17 v. o. lies b^2v^2 st. b^2u^2.

„ 537, „ 4 u. 5 v. o. lies $\Delta z \frac{\partial}{\partial z}$ st. Δz.

„ 537, „ 6 v. o. lies r st. p.

„ 692, „ 1 v. u. „ α st. a.

„ 729, „ 9 v. u. „ $c_1\zeta^2$ st. $c_1\zeta$.

„ 729, „ 3 v. u. „ z st. z_1.

„ 756, „ 7 v. o. „ φ_r st. φ^r.

„ 808, „ 8 v. u. „ Z st. z.

„ 824, „ 10 v. u. „ durch Elimination von st. wenn man.

„ 829, „ 11 v. u. „ gebracht st. gedacht.

„ 857, „ 16 v. u. „ c_{n-2} st. c_n.

„ 942, „ 10 v. u. „ 6. Theil st. 10. Theil.

Literatur.

Lehrbücher der Elementarmathematik.

ASCHENBORN, H., Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Geometrie. Berlin, Hofbuchdruckerei.

BALTZER, R., Die Elemente der Mathematik. Leipzig, Hirzel.

BECKER, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. Berlin, Weidmann.

GALLENKAMP, W., Die Elemente der Mathematik. Iserlohn, Bädeker.

REIDT, F., Die Elemente der Mathematik. Berlin, Grote.

SCHLEGEL, V., Lehrbuch der Elementarmathematik. Wolfenbüttel, Zwissler.

Logarithmentafeln.

VEGA, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (Siebenstellig.) Berlin, Weidmann.

SCHRÖN, L., Siebenstellige Logarithmentafeln. Braunschweig, Vieweg.

SCHLOEMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg.

Aufgabensammlungen.

HEIS, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Köln, Dumont-Schauberg.

MEIER-HIRSCH, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung etc. Berlin, Dunker.

BARDEY, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementararithmetik. Leipzig, Teubner.

BARDEY, E., Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Leipzig, Teubner.

LIEBER u. v. LÜHMANN, Geometrische Constructionsaufgaben. Berlin, Simion.

GANDTNER u. JUNGHANNS, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Berlin, Weidmann.

PETERSEN, J., Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben. Kopenhagen, Host & Sohn.

REIDT, F., Planimetrische Aufgaben. Breslau, Trewendt.

MÜTTRICH, A., Sammlung stereometrischer Aufgaben. Königsberg, Bon.

REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Stereometrie. Leipzig, Teubner.

HERMES, O., Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Berlin, Winkelmann & Sohn.

LIEBER u. v. LÜHMANN, Trigonometrische Aufgaben. Berlin, Simion.

GALLENKAMP, W., Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Mühlheim a. d. R., Bagel.

REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie. (Hierzu besonders das Resultatenheft.) Leipzig, Teubner.

Höhere Algebra.

DRONKE, A., Einleitung in die höhere Algebra. Halle, Nebert.

MATTHIESSEN, L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, Teubner.

PETERSEN, J., Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Host & Sohn.
SERRET, A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von G. v. WERTHEIM. Leipzig, Teubner.
HANKEL, H., Vorlesungen über die complexen Zahlen. Leipzig, Voss.
BALTZER, R., Theorie und Anwendungen der Determinanten. Leipzig, Hirzel.
GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen, Besold.
CLEBSCH, H., Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.

Zahlentheorie.

MINDING, F., Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin, G. Reimer.
LEJEUNE-DIRICHLET, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von DEDEKIND. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
BACHMANN, P., Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, Teubner.
GAUSS, C. F., Disquisitiones arithmeticae. (Gesammelte Werke, Bd. I.) Leipzig, Fleischer.

Analytische, synthetische und descriptive Geometrie.

JOACHIMSTHAL, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Berlin, G. Reimer.
MAGNUS, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin, Duncker & Humblot.
HEGER, R., Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
SCHENDEL, L., Elemente der analytischen Geometrie in trilinearen Coordinaten. Jena, Costenoble.
CLEBSCH, H., Vorlesungen über Geometrie, herausgeg. von F. LINDEMANN. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
DURÈGE, H., Die ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig, Teubner.
SALMON, G., Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
HESSE, O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbes. über die Flächen zweiter Ordnung. Leipzig, Teubner.
PLÜCKER, J., Neue Geometrie des Raumes. Leipzig, Teubner.
FIEDLER, W., Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig, Teubner.
MÖBIUS, A., Der barycentrische Calcül. Leipzig.
STEINER, J., Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, Fincke.
STEINER, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie, herausgeg. von H. SCHRÖTER. Leipzig, Teubner.
REYE, TH., Geometrie der Lage. Hannover, Rümpler.
FIEDLER, W., Die darstellende Geometrie. Leipzig, Teubner.

Algebraische Analysis.

SCHLOEMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis. Jena, Frommann.
LIEBLEIN, J., Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag, Satow.

Höhere Analysis und deren Anwendungen.

SCHLOEMILCH, O., Compendium der höheren Analysis. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
SCHLOEMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Leipzig, Teubner.
HATTENDORF, K., Höhere Analysis. Hannover, Rümpler.
LIPSCHITZ, R., Lehrbuch der Analysis. Breslau, Cohen.
WORPITZKY, J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin, Weidmann.

MEYER, G. J., Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig, Teubner.
JOACHIMSTHAL, F., Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig, Teubner.
RIEMANN, B., Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen; herausgeg. von K. HATTENDORF. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
NEUMANN, C., Untersuchungen über das logarithmische und NEWTON'sche Potential. Leipzig, Teubner.

Allgemeine Functionentheorie und specielle Transcendenten.

DURÈGE, H., Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig, Teubner.
THOMAE, J., Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle, Nebert.
BRIOT u. BOUQUET, Theorie der doppelt-periodischen Functionen; übers. von H. FISCHER. Halle, Schmidt.
HEINE, E., Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, G. Reimer.
NEUMANN, C., Theorie der BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
SOMMEL, E., Studien über die BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
JACOBI, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg, Bornträger.
SCHELLBACH, K., Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin, G. Reimer.
DURÈGE, H., Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.
KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.
KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Leipzig, Teubner.
PRYM, A., Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Bonn, Habicht.
WEIERSTRASS, Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.
RIEMANN, B., Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.
NEUMANN, C., Vorlesungen über RIEMANN's Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
CLEBSCH u. GORDAN. Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

Werke verschiedenen Inhalts.

GAUSS, C. F., Werke. Göttingen, herausgeg. von der K. Gesellschaft der Wissenschaften.
JACOBI, C. G. J., Gesammelte Werke. Berlin, G. Reimer.
RIEMANN, B., Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner.
Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. von CRELLE. Berlin, G. Reimer.
Archiv der Mathematik und Physik, begr. von GRUNERT. Leipzig, Koch.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, redig. von O. SCHLOEMILCH u. M. CANTOR. Leipzig, Teubner.

Geschichte der Mathematik.

HANKEL, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, Teubner.
CANTOR, M., Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Leipzig, Teubner.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).

Im Frühjahr n. J. erscheint in meinem Verl[ag]:

Planimetrische [...]
für den Gebrauch im [...]
und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Professor Dr. F. Reidt,

Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule zu Hamm.

Erster Theil: **Aufgaben nach den Lehrsätzen des Systems.**

Zweiter Theil: **Aufgaben geordnet nach Auflösungsmethoden und mit Anleitung zu Behandlung versehen.**

Preis noch unbestimmt.

Breslau, Herbst 1881.

Eduard Trewendt, Verlagshandlung.

Im Frühjahr gelangte im Verlage von Eduard Trewendt in Breslau zur Ausgabe:

Das Erkenntnissproblem.
Mit Rücksicht auf die gegenwärtig herrschenden Schulen

von

Dr. O. Caspari,

Professor der Philosophie an der Universität zu Heidelberg.

Gr. 8. 4 Bogen. Preis geh. 1 Mk. 60 Pf.

Zur vorstehenden Schrift gab das hundertjährige Bestehen der Kantschen »Kritik der reinen Vernunft« Veranlassung. Der berühmte Verfasser erörtert in seiner Abhandlung die Frage, welche Fortschritte die philosophische Wissenschaft auf der Grundlage der Kantschen Lehre während dieses Säculums gemacht hat.

Geschmackvolle Einbanddecken
zur
Encyklopædie der Naturwissenschaften

liefert zum Preise von 2 Mark jede Buchhandlung.

Verlagsbuchhandlung Eduard Trewendt.

Breslau. Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).