527

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 26. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK.

ELFTE LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der sechsundzwanzigsten Lieferung:

$$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi\,.$$

Nimmt ρ zur Grenze Null ab, so nähern sich alle Werthe, die $f(z)$ auf der Kreisperipherie hat, dem Werthe $f(t)$, den die Function im Centrum hat.

Daher ist

$$lim\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = i\,f(t)\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i\cdot f(t)\,.$$

Wir erhalten somit: Wird das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz$$

auf die vollständige Begrenzung einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher $f(z)$ eindeutig und endlich ist, so ist für jeden im Innern von T gelegenen Punkt t, der kein Windungspunkt ist,

1. $$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = 2\pi i\,f(t)\,.$$

Hieraus folgt

2. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz\,.$$

Der Werth, den eine Function für einen Punkt im Innern einer Fläche annimmt, auf welcher sie allenthalben endlich und eindeutig ist, lässt sich also durch ein Integral angeben, welches über die Begrenzung der Fläche erstreckt ist.

Differenzirt man beide Seiten von 2. nach t n mal, so erhält man

3. $$f^{(n)}t = \frac{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\, n}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dt\,.$$

Da nun für die Umgrenzung von T die Function

$$\frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}$$

allenthalben endlich ist, so folgt: Ist eine Function innerhalb einer Fläche T eindeutig und endlich, so gilt dasselbe auch von allen ihren Derivirten.

An die Formel 1. knüpft sich noch folgende Bemerkung. Um den Werth zu bestimmen, den das Integral

$$\int f(z)\,dz$$

hat, wenn man es über den Perimeter eines verschwindend kleinen Kreises erstreckt, für dessen Centrum a die Function $f(z)$ unendlich wird, während das Produkt $(z-a)f(z)$ endlich ist, setzen wir

$$\int f(z)\,dz = \int \frac{(z-a)\,f(z)}{z-a}\,dz$$

und erhalten daher nach 1., wenn a kein Windungspunkt ist,

4. $$\int f(z)\,dz = 2\pi i\,lim_{(z=a)}\,(z-a)f(z)\,.$$

10. Die Formeln 1. und 2. führen zur Darstellung einer complexen Function in einer unendlichen Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen der Variabeln; wir schicken dieser Entwicklung einige allgemeine Bemerkungen über die Convergenz unendlicher Reihen mit complexen Gliedern voraus.

Ersetzen wir die Glieder einer unendlichen Reihe

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

durch

$$u_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),$$

so folgt

$$S = r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + \ldots + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2 + \ldots).$$

Hieraus ist sofort ersichtlich: Wenn die Reihe der Moduln der Glieder einer unendlichen Reihe convergirt, so convergirt auch die unendliche Reihe.

Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Functionen von z, und convergirt die Reihe für jeden innerhalb eines Gebiets T liegenden Werth von z, so convergirt auch das Integral

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)\,dz$$

wenn man es über irgend einen auf T im Endlichen liegenden Weg erstreckt. Denn da nach der Voraussetzung für jeden Punkt auf T

$$\lim(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) = 0, \quad n = \infty,$$

so ist auch für irgend zwei auf T liegende Grenzen a und b

$$\lim\int_a^b(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)\,dz = 0.$$

Ist $f(z)$ der Grenzwerth der Reihe, so ist ersichtlich, dass

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)\,dz = \int f(z)\,dz.$$

Ist eine Reihe nach steigenden Potenzen (mit ganzen positiven Exponenten) der Variabeln z geordnet und sind für einen bestimmten Werth der Variabeln, dessen Modul r_0 ist, die Moduln aller Glieder der Reihe kleiner als eine gegebene Zahl, so convergirt die Reihe für jeden Werth von z, dessen Modul kleiner als r_0 ist.*)

Haben in der gegebenen Reihe

1. $$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

die Coefficienten die Moduln $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$, so sind die Moduln der Glieder der Reihe

$$a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2,\ a_3 r^3, \ldots$$

Die Reihe der Moduln

2. $$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$$

gewinnt man aus der Reihe

3. $$1 + \frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \ldots$$

in dem man die Glieder dieser Reihe nach einander mit

4. $$a_0,\quad a_1 r_0,\quad a_2 r_0^2, \ldots$$

multiplicirt. Die Reihe 3. convergirt für jeden Werth r, der kleiner als r_0 ist und hat die Summe

$$\frac{r_0}{r_0 - r}.$$

Ist nun jede der Zahlen 4. kleiner als eine gegebene Zahl B, so ist die Summe 2. kleiner als

$$\frac{r_0}{r_0 - r}B,$$

folglich ist 2. convergent, wenn $r < r_0$, w. z. b. z.

*) Vergl. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2. éd. Paris 1875, pag. 77.

Wenn r unbegrenzt wächst, so wachsen alle Moduln $a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2 \ldots$.

Dabei sind nun zwei Fälle möglich: Entweder es bleiben für alle endlichen Werthe von r alle diese Moduln endlich, oder sie bleiben bis zu einem endlichen Werthe $r = R$ endlich, werden aber zum Theil für $r = R$, und somit auch für $r > R$, unendlich gross.

Im ersten Falle convergirt die Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

für jedes endliche z; im letzteren convergirt sie für jedes z, dessen Modulus kleiner als R ist, also für alle Punkte der Ebene, die im Innern des mit dem Halbmesser R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen, und divergirt für alle auserhalb des Kreises liegende Punkte, da sie in denselben Glieder mit unendlichen Moduln erhält; für Punkte auf der Peripherie des Kreises mit Radius R, den wir den Convergenzkreis der Potenzreihe nennen, bleibt die Convergenz noch unentschieden und bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung.

11. Ist $f(z)$ endlich und eindeutig innerhalb eines Kreises, der auf der Variabelnfläche um das Centrum a beschrieben ist und der keinen Windungspunkt enthält, so ist für jeden Punkt t im Innern dieses Kreises

1. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-t}dz,$$

wobei das Integral über den Perimeter des Kreises auszudehnen ist. Für jeden Punkt z dieses Perimeters ist

$$\mathrm{mod}(z-a) > \mathrm{mod}(t-a),$$

daher hat man die convergente Reihenentwicklung

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a-(t-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t-a}{z-a}}$$

$$= \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{t-a}{z-a} + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^2 + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^3 + \ldots\right].$$

Setzt man dies in 1. ein und integrirt die einzelnen Glieder, was (nach 10) erlaubt ist, weil die Reihe für alle Punkte des Integrationsweges convergirt, und $f(z)$ innerhalb desselben nicht unendlich wird, so erhält man

2. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-a}dz + \frac{t-a}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz + \frac{(t-a)^2}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz + \ldots$$

Die Integrale in dieser Reihenentwicklung sind in No. 9 bestimmt worden; wir haben dort gefunden

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

und erhalten daher aus 2.

3. $$f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(t-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(t-a)^2 + \frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}(t-a)^3 + \ldots$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe: die Entwicklung ist für alle Punkte t im Innern eines um a geschlagenen Kreises gültig, wenn die Function f innerhalb dieses Kreises endlich und eindeutig ist und keinen Windungspunkt hat.

Will man diesen Gültigkeitsbereich so viel als möglich erweitern, so hat man die Windungspunkte und die Punkte zu bestimmen, in denen $f(t)$ unendlich wird. Der Kreis darf dann nicht weiter als bis zu demjenigen dieser Punkte ausgedehnt werden, der a am nächsten liegt.

Wir sehen somit, dass die Convergenzbedingungen der TAYLOR'schen Reihe in viel einfacherer Weise sich erledigen, als früher, wo wir nur reale Variabeln in Betracht ziehen konnten; die lästigen Betrachtungen über den Grenzwerth des Restes fallen hier ganz weg; es bedarf nur der Bestimmung der Punkte, in welchen die Function unendlich gross wird.

Lassen wir in 3. den Punkt a mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so entsteht die MACLAURIN'sche Reihe

4. $$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} z + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \dots$$

12. Wir schliessen hieran noch eine Bemerkung über Reihenentwicklung von der Form

1. $$f(z) = A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{z} + A_2 \cdot \frac{1}{z^2} + A_3 \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

Ersetzen wir $1 : z$ durch ζ, so entsteht

2. $$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots$$

Daher ist

$$A_0 = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)_{\zeta=0} = f(\infty), \quad A_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left[\frac{d^k f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^k}\right]_{\zeta=0};$$

die Entwicklung ist für alle Werthe von ζ gültig, deren Modul kleiner ist als der kleinste Modul der ζ, für welchen $f(1 : \zeta)$ unendlich wird; also gilt 2. für alle z, deren Modul grösser ist als der grösste Modul der z, welche $f(z)$ unendlich gross machen. Ist daher α der vom Nullpunkte entfernteste Punkt der Variabelnebene, für welchen $f(z)$ unendlich wird, so gilt die Reihe 1. für alle Punkte der Ebene, die ausserhalb des durch α um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen.

13. Wenn die Function $f(z)$ innerhalb und auf den Grenzen eines Ringes, der zwischen zwei um den Punkt a mit den Radien r_0 und r_1 geschlagenen Kreisen liegt, eindeutig und endlich ist, und die Variabelnfläche innerhalb der äusseren Begrenzung des Ringes keinen Windungspunkt hat, so ist das über die vollständige Begrenzung des Ringes erstreckte Integral

$$\int \frac{f(z)}{z - t} dz = 2\pi i f(t),$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - t} dz.$$

Das Begrenzungsintegral besteht aus den Integralen entlang der beiden Kreise; bezeichnen wir dieselben mit $\int\limits_{(r_0)}$ und $\int\limits_{(r_1)}$, so ist

1. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(r_1)} \frac{f(z)}{z - t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(r_0)} \frac{f(z)}{z - t} dt.$$

Für das erste haben wir, da alle Punkte des Ringes im Innern des Kreises mit Radius r_1 liegen, nach No. 11

2. $$\int\limits_{(r_1)} \frac{f(z)}{z - t} dz = \sum_1^\infty u_{-n}(t - a)^{n-1}, \quad u_{-n} = \int \frac{f(z)}{(z - a)^n} dz,$$

wobei die Integrale u_{-n} über alle Punkte des Kreises r_1 im positiven Sinne zu erstrecken sind. Für die Punkte des Kreises r_0 ist

$$mod(z - a) < mod(t - a).$$

Daher haben wir die convergente Entwicklung

$$\frac{1}{z - t} = -\frac{1}{(t - a) - (z - a)} = -\frac{1}{t - a}\left[1 + \frac{z - a}{t - a} + \left(\frac{z - a}{t - a}\right)^2 + \dots\right].$$

Also ist

3. $$\int\limits_{(r_0)} \frac{f(z)}{z - t} dz = -\sum_0^\infty u_n (t - a)^{-n-1}, \quad u_n = \int\limits_{(r_0)} (z - a)^n f(z)\, dz.$$

Die Integrale u_n sind über den Kreis mit Radius r_0 im Sinne der abnehmenden Winkel (im positiven Sinne bezüglich der Ringfläche) zu erstrecken. Nimmt man sie ebenso, wie die u_{-n}, im Sinne wachsender Amplituden, so kann man 1., 2. und 3. folgendermassen vereinen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} u_n (t - a)^{-n-1}, \quad u_n = \int f(z)(z - a)^n dz,$$

wobei alle Integrale über den Kreis mit Radius r_0 erstreckt werden können, weil für keinen Punkt der Ringfläche eine der Functionen

$$f(z)(z - a)^n$$

unendlich gross ist. Dies ergiebt: Eine Function einer complexen Variabeln, die innerhalb einer Ringfläche mit dem Centrum a eindeutig und endlich ist, kann für jeden im Innern des Ringes gelegenen Werth der Variabeln t in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von $(t - a)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

14. Wenn die Function $f(z)$ für die im Innern des Kreises r_0 gelegenen Punkte $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m, \dots$ unendlich gross wird, und zwar im Punkte α_r so unendlich wie

$$\frac{F_r(z)}{(z - \alpha_r)^r},$$

d. h. so, dass

$$lim_{(z=\alpha)} (z - \alpha_r)^m f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } m < r, \\ F_r(z), & \quad ,, \quad m = r, \\ 0, & \quad ,, \quad m > r, \end{cases}$$

wobei $F_r(z)$ eine im Punkte α_r endliche Function bezeichnet, so zerfallen die Integrale u_n in Integrale, die über verschwindend kleine Kreise um die Punkte $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m, \dots$ und a erstreckt sind. Es ist z. B.

$$u_3 = k_3 + l_3 + m_3 + \dots + a_3,$$

wobei

$$k_3 = \int f(z)(z - a)^3 dz,$$

und das Integral über einen um α_k geschlagenen unendlich kleinen Kreis zu erstrecken ist. Für die Punkte dieses Kreises kann man setzen

$$f(z) = \frac{F_k(z)}{(z - \alpha_k)^k}, \quad z - a = \alpha_k - a;$$

daher hat man

$$k_3 = (\alpha_k - a)^3 \int \frac{F_k(z)}{(z - \alpha_k)^k} dz.$$

Nach No. 9 ist unter der Voraussetzung, dass die α nicht Verzweigungspunkte sind,

$$\int \frac{F_k(z)}{(z - \alpha_k)^k} dz = \frac{2\pi i}{k!} F_k^{k-1}(\alpha_k),$$

wobei $F^{k-1}(\alpha_k)$ den Werth bezeichnet, den

$$\frac{d^{k-1} F(z)}{dz^{k-1}}$$

im Punkte α_k hat. Daher hat man schliesslich

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot u_3 = \frac{1}{k!}(\alpha_k - a)^3 F_k^{k-1}(\alpha_k) + \frac{1}{l!}(\alpha_l - a)^3 F_l^{l-1}(\alpha_l) + \ldots$$

§ 14. Logarithmus und Exponentialfunction, Arcustangens und Tangente.

1. Wir geben nun neue Definitionen des Logarithmus, der Exponentialfunction, der cyklometrischen und der goniometrischen Functionen, die in gleicher Weise für reale und complexe Variable gelten.

Den Logarithmus werden wir durch eine Functionalgleichung definiren; von dieser aus gelangen wir dazu, den Logarithmus durch ein bestimmtes Integral darzustellen. Die Functionen $arctang\, z$, $arcsin\, z$, $arccos\, z$ definiren wir direkt durch bestimmte Integrale. Die Exponentialgrösse und die goniometrischen Functionen werden als Umkehrungen des Logarithmus und der cyklometrischen Functionen definirt.

2. Den Logarithmus einer Zahl z definiren wir als die Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat

1. $$f(z \cdot z_1) = f(z) + f(z_1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung folgt sofort

$$f(z \cdot z_1 \cdot z_2) = f(z) + f(z_1) + f(z_2),$$

2. $$f(z \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_n) = f(z) + f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_n).$$

Setzen wir hierin $z = z_1 = z_2 \ldots$, so entsteht

3. $$f(z^m) = mf(z),$$

wobei m eine ganze positive reale Zahl ist.

Ferner folgt aus 1.

$$f(z) = f(zz_1) - f(z_1).$$

Ersetzen wir hier zz_1 durch z, so haben wir für z zu setzen $z : z_1$ und erhalten

4. $$f\left(\frac{z}{z_1}\right) = f(z) - f(z_1).$$

3. Differenziren wir die Gleichung

$$f(z \cdot t) = f(z) + f(t)$$

nach t, so entsteht

$$zf'(zt) = f'(t).$$

Hierin setzen wir $t = 1$ und erhalten

$$zf'(z) = f'(1).$$

Folglich ist

$$f'(z) = f'(1) \cdot \frac{1}{z},$$

und daher weiter

$$f(z) = f'(1) \int \frac{dz}{z}.$$

Da $f(z)$ für $z = 1$ verschwindet, so sind die Grenzen des Integrals 1 und z; wir haben also

$$f(z) = f'(1) \cdot \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Durch die Functionalgleichung

$$f(z \cdot z_1) = f(z) + f(z_1)$$

ist daher der Logarithmus bis auf einen constanten Faktor $\mu = f'(1)$ vollständig

bestimmt. Dieser Faktor bleibt willkürlich; je nach Wahl desselben erhält man verschiedene Logarithmensysteme; die Zahl μ heisst der Modul des Systems. Als das natürliche Logarithmensystem bezeichnen wir das, für welches $f'(1) = 1$ genommen wird. Führen wir statt des allgemeinen Functionszeichens $f(x)$ hierfür das besondere $L(x)$ ein, so ist also

1. $$L(x) = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Werden die Logarithmen, für welche $f'(1)$ einer gegebenen Zahl μ gleich ist, mit $Log_\mu z$ bezeichnet, so ist

2. $$Log_\mu z = \mu Lz.$$

Hiernach genügt es, ausschliesslich die Function $L(z)$ weiter zu untersuchen.

4. Die Function $1 : z$ ist eine eindeutige Function der Punkte der Variabelnebene und wird nur im Punkte $z = 0$ unendlich gross. Um den Einfluss zu erfahren, den der Integrationsweg auf das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

hat, haben wir daher den Werth zu berechnen, den das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

erhält, wenn es über den Perimeter eines den Nullpunkt umgebenden Kreises erstreckt wird. Setzen wir in § 13, No. 9

$$f(z) = 1 : z, \quad a = 0,$$

so ergiebt sich für das gesuchte Integral der Werth

1. $$2\pi i.$$

Hieraus folgt: Der natürliche Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Function; die demselben Punkte zugehörigen Werthe unterscheiden sich durch ganze Vielfache von $2\pi i$. Diese Grösse $2\pi i$ wird als der Periodicitätsmodul des Logarithmus bezeichnet.

Um den von z abhängigen Theil des Logarithmus zu bestimmen, wählen wir für das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

einen Integrationsweg, durch den der reale und der imaginäre Theil der Function gesondert werden; wir integriren, wenn $z = r(cos\varphi + i sin\varphi)$ und $0 < \varphi < 2\pi$ zunächst auf der realen Achse von 1 bis r und dann auf einem Kreise um den Nullpunkt weiter von r bis zu z. Das erste Integral ist, da für diesen Theil des Integrationsweges $y = 0$ ist

2. $$\int_1^r \frac{dx}{x} = lr,$$

wenn wir mit lr den realen Werth von Lr bezeichnen.

Für das zweite, das Kreisintegral, setzen wir

$$z = r(cos\varphi + i sin\varphi);$$

da für diesen Theil des Weges r constant ist, so ist

$$dz = r(-sin\varphi + i\,cos\varphi)\,d\varphi = i \cdot z\,d\varphi;$$

das Integral erstreckt sich von $\varphi = 0$ bis zur Amplitude von z, daher ist dasselbe

3. $$\int_0^\varphi i\,d\varphi = i\varphi\,.$$

Aus 1., 2., 3. folgt schliesslich

4. $$Lz = Lr(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i\varphi + k\cdot 2\pi i\,.$$

5. Der Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Function; jede Umkreisung des Nullpunktes durch die Variable auf dem Integrationswege vermehrt oder vermindert den natürlichen Logarithmus um $2\pi i$, je nachdem die Umkreisung im positiven oder negativen Sinne erfolgt. Um die Function

$$w = Lz$$

als eindeutige Function der Punkte einer RIEMANN'schen Fläche zu erhalten, hat man für die Variable eine Windungsfläche zu benutzen, die sich um den Nullpunkt windet und aus unzählig vielen Blättern besteht, die ausser im Windungspunkte keine Verwachsung zeigen; diese Variabelnfläche ist als Schraubenfläche mit unendlich kleiner Ganghöhe aufzufassen. Wir wollen auf jeder Windung eine Gerade vom Nullpunkte aus in der Richtung der realen Achse ziehen; der durch zwei solche auf einander folgende Geraden begrenzte Theil der z-Fläche heisse ein Blatt derselben. Für einen bestimmten Punkt z der Variabelnfläche nehmen wir den Werth des Lz zu

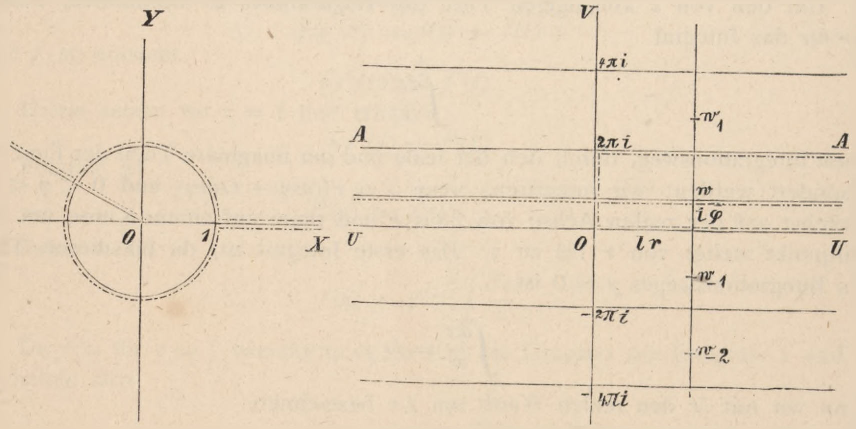
$$Lz = lr + i\varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

an; dann ist für alle Punkte desselben Blattes der Logarithmus durch dieselbe Formel dargestellt. Dieses Blatt heisse das Blatt 0, die darauf folgenden das Blatt 1, 2, 3, die vorhergehenden das Blatt -1, -2, -3, ... In das Blatt k gelangt man vom Punkte 1 des Blattes 0 durch $k$malige Umkreisung des Nullpunktes, wobei ein negatives k negativen Drehungssinn angiebt; daher ist für alle Punkte des Blattes k

$$Lz = lr + i\varphi + 2k\pi i, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

6. Wir construiren nun zu den Punkten der z-Fläche die zugehörigen Punkte der w-Ebene, und beginnen zunächst mit den Punkten des Blattes 0.

Für den an der Grenze der Blätter 0 und -1 liegenden Punkt 1 ist $w = l1 = 0$; durchläuft z die realen Werthe von 1 bis ∞, so durchläuft w die positive reale



(M. 558.)

Achse; durchläuft z die reale Strecke von 1 bis 0, so legt w die negative reale Achse zurück*). Beschreibt z von dem realen positiven Werthe r aus einen positiven Kreisbogen φ, so bleibt der reale Theil von Lz ungeändert gleich lr und und es tritt nur der imaginäre Bestandtheil $i\varphi$ hinzu, w beschreibt also eine Normale zur realen Achse bis zum Abstande φ von derselben. Allen Punkten eines in 0 begrenzten Strahls in der z-Fläche entsprechen also die Punkte einer Parallelen zur realen Achse, die durch den Punkt $i\varphi$ geht; der negativen realen Achse der z-Fläche entspricht insbesondere die durch πi gehende Parallele zur realen Achse der w-Ebene. Die Punkte der Geraden, in welcher die Blätter 0 und 1 zusammenhängen (ihr Grundriss ist OX) haben die Amplitude 2π; dieser Grenzlinie entspricht daher die durch $2\pi i$ gehende Parallele zur realen Achse.

*) In beistehender Figur ist die w-Fläche in $\frac{1}{6}$ des Maassstabes ausgeführt, wie die z-Fläche.

Allen Punkten des Blattes 0 der z-Fläche entsprechen daher die Punkte des Steifens $AAUU$ der w-Ebene; und umgekehrt, jedem Punkte w dieses Streifens entspricht eindeutig ein Punkt des Blattes 0 der z-Fläche, — der reale Theil von w ist nämlich der Logarithmus des Moduls von z, der imaginäre Theil von w ergiebt sofort die Amplitude.

Der Logarithmus w_1 eines Punktes z_1 des Blattes 1 weicht vom Logarithmus des Punktes z im Blatte 0, der mit ihm gleichen Grundriss hat, nur um $2\pi i$ ab. Hieraus erkennen wir sofort, dass die Punkte des Blattes 1 sich auf dem Streifen der w-Ebene abbilden, dessen Ränder parallel zu OU durch $2\pi i$ und $4\pi i$ gehen. Theilt man die w-Ebene von der realen Achse aus in Streifen von der Breite 2π, so entsprechen den aufeinander folgenden Blättern der z-Fläche der Reihe nach die Streifen der w-Ebene. Durch diese Streifen wird die ganze w-Ebene erfüllt; wir schliessen daher: Jede complexe Zahl ist der natürliche Logarithmus einer eindeutig bestimmten Zahl.

7. Aus der Gleichung

$$L(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z}$$

gewinnen wir mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes eine Potenzreihe für $L(1+z)$. Da die Variabelnfläche, von deren Punkten $L(1+z)$ eine eindeutige Function ist, im Punkte $1 + z = 0$, d. i. $z = -1$ einen Windungspunkt hat, und zugleich in diesem und in keinem andern Punkte, abgesehen von den Blättern $\pm\infty$, unendlich gross wird, so gilt die Entwicklung von $L(1+z)$ nach der TAYLOR'schen Reihe für alle Punkte im Innern des Kreises für welchen $mod\,z < 1$.

Wir haben nun

$$f(0) = k\cdot 2\pi i,\ f'(0) = +1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 1\cdot 2,\ f''''(0) = -1\cdot 2\cdot 3\ldots$$

und daher $$L(1+z) = k\cdot 2\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\,.$$

$$mod\,z < 1\,.$$

Für die Punkte des Blattes 0 ist $k = 0$ und daher

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$$mod\,z < 1\,.$$

8. Die natürliche Exponentialfunction. Als natürliche Exponentialfunction e^z der Variabeln z bezeichnen wir die Grösse, deren natürlicher Logarithmus z ist.

Es giebt nur eine Zahl, deren natürlicher Logarithmus einer gegebenen Zahl gleich ist; die natürliche Exponentialfunction e^z ist daher eine eindeutige Function von z.*)

*) Man müsste eigentlich die natürliche Exponentialfunction von der vieldeutigen $z$ten Potenz von e durch ein besonderes Symbol unterscheiden; es ist dies aber nicht üblich. Wo das Zeichen e^z eine vieldeutige Potenz bedeuten soll, muss dies besonders mitgetheilt werden.

Aus der Gleichung

$$L(a \cdot b) = La + Lb$$

folgt nach der Definition

$$a \cdot b = e^{(La + Lb)}$$

Setzen wir $La = z, \quad Lb = z_1$, so ist

$$a = e^z, \quad b = e^z,$$

und damit ergiebt sich aus 1.

1. $$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z + z_1}.$$

Da z und $z + k \cdot 2\pi i$ die Logarithmen desselben Logarithmanden sind, so folgt

2. $$e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z.$$

Die Exponentialfunction ändert sich also nicht, wenn die Variable um ganze Vielfache von $2\pi i$ zu- oder abnimmt. Sie ist daher ein periodische Function und hat die Periode $2\pi i$. Nach 1. und 2. ist

$$e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z \cdot e^{k \cdot 2\pi i} = e^z.$$

Für $z = 0$ folgt hieraus

3. $$e^{k \cdot 2\pi i} = e^0 = 1.$$

Setzen wir $e^z = w$, so ist $z = Lw$ und daher

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{dw}{dLw}.$$

Da nun $\dfrac{dLw}{dw} = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{e^z}$, so folgt

4. $$\frac{de^z}{dz} = e^z.$$

Da e^z eine eindeutige und für alle endlichen z endliche Function von z ist, so kann e^z nach dem TAYLOR'schen Satze in eine unendliche Reihe entwickelt werden, die für alle endlichen z convergirt; aus 4. folgt diese Reihe sofort zu

1. $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots.$$

Wir sehen hieraus, dass diese Reihe, die in der Differentialrechnung für reale z abgeleitet wurde, auch für jedes endliche complexe z gilt.

Aus der Gleichung

$$Lr(\cos\varphi + i \sin\varphi) = lr + i\varphi,$$

bei welcher rechts die Vielfachen des Periodicitätsmoduls $2\pi i$ wegbleiben können, wenn φ nicht auf eine Umdrehung beschränkt, die Vieldeutigkeit also in die Amplitude φ verlegt wird, folgt sofort

6. $$e^{(lr + i\varphi)} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Ersetzen wir lr und φ durch x und y, so erhalten wir

7. $$e^{(x + iy)} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Setzen wir ferner in 7. $r = 1$, so folgt insbesondere

8. $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

9. Als Potenz a^z (für reale oder complexe a und z) definiren wir die Function

$$a^z = e^{zLa}.$$

Ist $a = \rho e^{i\alpha}$ und z real, so ist, wenn ρ^z real und positiv gerechnet wird,

$$a^z = e^{z(l\rho + i\alpha)} = \rho^z(\cos z\alpha + i \sin z\alpha);$$

für reale z führt die Definition somit auf den bereits bekannten Begriff der

Potenz eines beliebigen Dignanden mit realem Exponenten. Ist $z = x + iy$, so ergiebt sich

$$a^z = e^{(x + iy)(l\rho + i\alpha)}$$
$$= e^{(xl\rho - y\alpha)}[\cos(x\alpha + yl\rho) + i \sin(x\alpha + yl\rho)].$$

Diese Function ist unendlich vieldeutig, weil α um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert werden kann. Nur dann, wenn y verschwindet und x rational ist, tritt eine auf eine endliche Anzahl Werthe beschränkte Vieldeutigkeit ein.

---

10. Die Function $Arctang z = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{1 + z^2}$.

Durch Zerlegung in Partialbrüche entsteht

$$\int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^z \frac{dz}{1 + iz} + \int_0^z \frac{dz}{1 - iz}\right).$$

Ersetzen wir im ersten Integrale $1 + iz$, im zweiten $1 - iz$ durch ζ, so ergiebt sich

$$\int_0^z \frac{dr}{1 + z^2} = \frac{1}{2i}\left(\int_1^{1+iz} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_1^{1-iz} \frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

Daher folgt

1. $$Arc\,tang z = \frac{1}{2i} L \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Die Function $Arctang z$ ist also unendlich vieldeutig, der Periodicitätmodul ist

$$\frac{1}{2i} 2\pi i = \pi.$$

Die Gleichung 1. ergiebt nach der Fundamentaleigenschaft des Logarithmus

$$Arctang z + Arctang z_1 = \frac{1}{2i} L \frac{1 + iz}{1 - iz} \cdot \frac{1 + iz_1}{1 - iz_1}$$
$$= \frac{1}{2i} L \frac{1 - zz_1 + i(z + z_1)}{1 - zz_1 - i(z + z_1)}$$
$$= \frac{1}{2i} L \frac{1 + i \cdot \dfrac{z + z_1}{1 - zz_1}}{1 - i \cdot \dfrac{z + z_1}{1 - zz_1}}$$

Hieraus folgt

2. $$Arctang z + Arctang z_1 = Arctang \frac{z + z_1}{1 - zz_1}.$$

Ist ferner $z = x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, so ist

$$1 + iz = 1 - y + ix, \quad 1 - iz = 1 + y - ix.$$

Folglich ist

$$L(1 + iz) = l\sqrt{1 + r^2 - 2y} + i\,arctang \frac{x}{1 - y} + k_1 \cdot 2\pi i,$$

$$L(1 - iz) = l\sqrt{1 + r^2 + 2y} + i\,arctang \frac{x}{1 + y} + k_2 \cdot 2\pi i.$$

Daher ist weiter

$$Arctang(x + iy) = \frac{1}{2i} l \sqrt{\frac{1 + r^2 - 2y}{1 + r^2 + 2y}} + \frac{1}{2} arctang \frac{x}{1 - y} + \frac{1}{2} arctang \frac{x}{1 + y} + k \cdot \pi,$$

Die letzten beiden $arctang$ lassen sich nach 2. vereinigen; dadurch entsteht

3. $$Arctang(x + iy) = \frac{1}{2}\, arc\,tang\, \frac{2x}{1 - r^2} + \frac{1}{2i}\, l \sqrt{\frac{1 + r^2 - 2y}{1 + r^2 + 2y}} + k \cdot \pi$$

Die Function $1 : (1 + z^2)$ wird unendlich für $z = \pm i$; die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots$$

gilt daher innerhalb eines Kreises, der mit Halbmesser 1 um den Nullpunkt beschrieben ist. Aus dieser Reihe folgt durch Integration

$$Arctang\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

$$mod z < 1$$

Diese Reihe giebt den Werth von $Arctang z$, der mit z verschwindet.

11. Die Function $tang w$ definiren wir als Umkehrung der Function $w = arctang z$. Aus der Vieldeutigkeit von $Arctang\, z$ folgt sofort: Die Function $tang w$ ist periodisch und hat die Periode π. Ferner folgt aus No. 10, 2

1. $$tang(w + w_1) = \frac{tang w + tang w_1}{1 - tang w\, tang w_1}.$$

Aus der Gleichung

$$Arctang\, z = \frac{1}{2i} L \frac{1 + iz}{1 - iz} = w$$

ergiebt sich zunächst

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{2iw},$$

folglich ist

2. $$z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}.$$

Ist nun $w = u + iv$, so ist

$$e^{iw} = e^{-v+iu} = e^{-v}(\cos u + i \sin u),$$
$$e^{-iw} = e^{v-iu} = e^{v}(\cos u - i \sin u).$$

Setzt man dies in 2. ein und erweitert mit $-i$, so folgt

3. $$tang(u + iv) = \frac{(e^v + e^{-v}) \sin u + i (e^v - e^{-v}) \cos u}{(e^v + e^{-v}) \cos u - i (e^v - e^{-v}) \sin u}.$$

Die Tangente wird Null für alle Werthe von u und v, welche den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v}) \sin u = 0, \quad (e^v - e^{-v}) \cos u = 0,$$

wenn für dieselben nicht zugleich der Nenner in $tang w$ verschwindet. Reale Lösungen dieser Gleichungen, die ausschliesslich in Betracht kommen, sind nur

$$v = 0, \quad u = k\pi.$$

Die Tangente wird unendlich, sobald die realen u und v den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v}) \cos u = 0, \quad (e^v - e^{-v}) \sin u = 0,$$

ohne dass zugleich der Zähler in 2. verschwindet, also für

$$v = 0, \quad u = (2k + 1)\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wir bemerken noch, dass das Integral jeder rationalen Function von z durch ein Aggregat einer rationalen Function und der natürlichen Logarithmen linearer Functionen, — die Logarithmen multiplicirt mit Coefficienten, unter denen auch i vorkommen kann — ausgedrückt wird.

§ 15. Arcussinus und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus.

1. Wir untersuchen in diesem Abschnitte Integrale von der Form

$$\int f(z, \sqrt{R})\, dz, \quad R = a + 2bz + cz^2$$

wenn f eine rationale Function von z und $\sqrt{R}$ ist.

In § 4. ist gezeigt worden, wie durch eine rationale Substitution ein solches Integral in das Integral einer rationalen Function reducirt werden kann; wir wollen indess von dieser Substitution hier keinen Gebrauch machen, sondern die Untersuchung ohne Beseitigung der Irrationalität führen. Jede rationale Function von z und $\sqrt{R}$ kann, wie leicht zu sehen ist, auf die Form gebracht werden

1. $$f(z, \sqrt{R}) = \frac{\varphi_1 + \psi_1 \sqrt{R}}{\varphi + \psi \sqrt{R}},$$

wobei φ, ψ, φ_1, ψ_1 rationale ganze Functionen von z sind. Aus 1. gewinnen wir durch Erweiterung mit $\varphi - \psi\sqrt{R}$

$$f(z, \sqrt{R}) = \frac{\Phi + \Psi \cdot \sqrt{R}}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} + \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Hiernach zerfällt das vorgelegte Integral

$$\int f(z, \sqrt{R}) dz = \int \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} dz + \int \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Das erste Integral ist frei von Irrationalem und ist durch die Untersuchungen des vorigen Abschnitts erledigt. Im zweiten zerlegen wir den rationalen Faktor in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen Function,

$$\frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \Lambda + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},$$

wo Λ, M, N ganze Functionen sind, M von niederem Grade als N. Den Theil

$$\int \Lambda \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

reduciren wir nach § 4, No. 4; den Bruch M : N zerlegen wir in Partialbrüche und wenden die in § 4, No. 5 angegebene Reduction an. Dies zusammenfassend erkennen wir: Das Integral

1. $$\int f(z, \sqrt{R}) dz, \quad R = a + 2bz + cz^2,$$

wobei f rational in Bezug auf z und $\sqrt{R}$ ist, zerfällt in eine rationale ganze Function von z, Logarithmen algebraischer Functionen von z, ein Produkt einer rationalen ganzen Function mit $\sqrt{R}$, und in Integrale der Form

2. $$\int \frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Wir zerlegen den Radicanden in seine lineare Factoren

$$a + 2bz + cz^2 = c(\alpha - z)(\beta - z) = -c(\alpha - z)(-\beta + z),$$

ersetzen

$$z = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \zeta + \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also

$$\alpha - z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 - \zeta), \quad -\beta + z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 + \zeta),$$

und erhalten hierdurch

$$\sqrt{R} = \frac{\alpha - \beta}{2}\cdot\sqrt{-c}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\,,$$

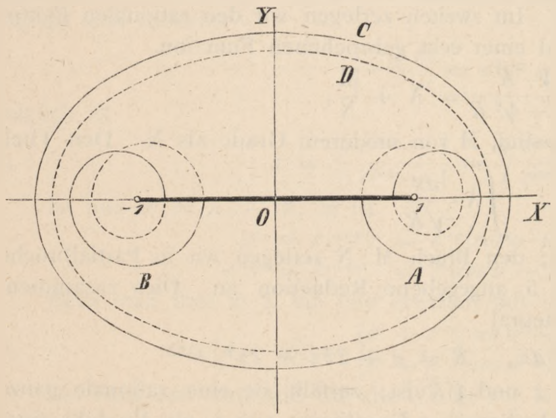
$$\int\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\cdot\int\frac{dz}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,.$$

2. Die Function $Arc\,sin\,z$ definiren wir durch das bestimmte Integral

$$Arc\,sin\,z = \int\limits_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$

Die Function $1:\sqrt{1-z^2}$ ist eine eindeutige Function der Punkte einer zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche (§13, No. 26) welche die beiden Windungspunkte $+1$ und -1 hat und deren beide Blätter entlang der Geraden zwischen den Windungspunkten verwachsen sind; in beiden Windungspunkten wird die Function unendlich.

Um zu erfahren, welchen Einfluss der Integrationsweg auf das Integral hat, haben wir das Integral über die geschlossenen Wege zu erstrecken, welche Windungspunkte einschliessen. Diese Wege lassen sich auf folgende Arten von Wegen zurückführen: 1. Wege, die einen einzigen Windungspunkt umkreisen und daher sich in beide Blätter begeben müssen, 2. Wege, die beide Windungspunkte umkreisen und nur in einem Blatte verlaufen; zur ersten Art gehören die Wege Fig. 559, A und B, zur andern C und D.



(M. 559.)

Um die Umkreisungsintegrale der ersten Art zu erhalten, integriren wir über einen Weg, der einen constanten verschwindend kleinen Abstand von $+1$ hat. Bezeichnen wir mit r den Abstand des Punktes z von $+1$, und mit φ den Winkel der realen Achse mit r, so ist

$$z = 1 + r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$$
$$= 1 + re^{i\varphi},$$

daher ist zu untersuchen

$$\lim_{r=0} i\,r\int\limits_0^{4\pi}\frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{-2r\,e^{i\varphi} - r^2 e^{2i\varphi}}} = \lim\sqrt{r}\cdot\int\limits_0^{4\pi}\frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\sqrt{2 + r\,e^{i\varphi}}}\,.$$

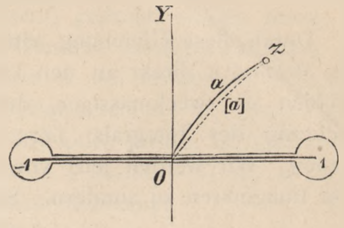
Nimmt r unendlich ab, so bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Function, also auch das Integral selbst, endlich; da es mit einem verschwindenden Faktor multiplicirt wird, so ist der Grenzwerth Null. Wir sehen daher:

Das Integral

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt über eine geschlossene Curve, die nur einen Windungspunkt umkreist, ist Null.

Anders verhält es sich mit den Wegen der zweiten Art. Um über diese zu urtheilen, wollen wir C (Fig. 560) auf folgenden Weg zusammenziehen. Wir gehen vom Nullpunkte aus entlang der realen Achse bis dicht an $+1$, beschreiben dann um $+1$ einen verschwindend kleinen Kreis bis dicht an die Verwachsung (also ganz im oberen Blatte) gehen dann entlang der realen Achse bis dicht an -1, beschreiben einen verschwindend kleinen Kreis um -1, und kehren dann entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück. Die Kreisintegrale sind



(M. 560.)

$$\lim_{r=0}\sqrt{r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{e^{i\varphi}}d\varphi}{\sqrt{2+re^{i\varphi}}} \quad\text{und}\quad \lim_{r=0}\sqrt{r}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\sqrt{-2+re^{i\varphi}}}\,,$$

sie verschwinden beide. Für die geradlinigen Integrale von 0 bis 1, von 1 bis 0, von 0 bis -1 und von -1 bis 0 haben wir auf das Vorzeichen zu achten, das $\sqrt{1-z^2}$ auf diesen Wegen hat. Wir wollen annehmen, im Nullpunkte des oberen Blattes sei die Wurzel $= +1$; alsdann ist sie auf dem ersten Theile des Weges, von 0 bis $+1$, positiv; durch einmaliges Umkreisen eines Windungspunktes wechselt die Wurzel das Vorzeichen, für den Weg von $+1$ über 0 bis -1 gilt also der negative Wurzelwerth; durch einmaliges Umkreisen des Windungspunktes -1 tritt dann nochmaliger Zeichenwechsel ein, auf dem Wege von -1 bis 0 zurück gilt daher wieder das positive Vorzeichen. Es ist daher das gesuchte Begrenzungsintegral, wenn überall die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$J = \int\limits_0^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{+1}^{0}\frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_0^{-1}\frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Ersetzt man im ersten und zweiten Integrale x durch $-x$, so erhält man

$$J = 4\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi\,.$$

Integrirt man in der gleichen Richtung über den Weg, der im zweiten Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, so hat auf allen Punkten dieses Weges die Wurzel das andere Vorzeichen, also ist dieses Integral $J_1 = -2\pi$. Beachten wir, dass die soeben verwendete Integrationsrichtung negativ war, so folgt:

Das Integral $\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ im positiven Sinne über eine geschlossene Curve erstreckt, die in einem Blatte liegt und beide Windungspunkte einmal umkreist, ist $\mp 2\pi$; das obere Zeichen gilt für das Blatt, in dessen Nullpunkte die Wurzel den Werth $+1$ hat.

Hieraus folgt weiter: Die Function $Arc\,sin\,z$ ist unendlich vieldeutig, und hat den realen Periodicitätsmodul 2π.

3. Um das Integral $Arc\,sin\,z$ auszuführen, benutzen wir die Differentialformel

$$\frac{d(z+\sqrt{z^2-1})}{z+\sqrt{z^2-1}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{i}\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$

Aus dieser Formel folgt durch Integration von 0 bis z die Gleichung

1. $$Arc\,sin\,z = L\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i}.$$

Durch diese Gleichung hätte die Untersuchung des $Arc\,sin\,z$ ebenso, wie die des $Arc\,tang\,z$ direkt an den Logarithmus angeschlossen werden können; doch erschien es zweckmässiger, den Nachweis des Periodicitätsmoduls durch Betrachtung des Integrals $\int dz : \sqrt{1-z^2}$ auf der zweiblätterigen Fläche zu gewinnen. Wir werden jetzt von 1. Gebrauch machen, um in $Arc\,sin\,z$ das Reale vom Imaginären zu sondern. Setzen wir

$$iL\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i} = u + iv,$$

so ist
$$L\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i} = v - iu,$$

mithin
$$z+\sqrt{z^2-1} = ie^v(\cos u - i\sin u) = e^v(\sin u + i\cos u).$$

Der reciproke Werth ist
$$z-\sqrt{z^2-1} = e^{-v}(\sin u - i\cos u).$$

Addiren wir diese Gleichungen und ersetzen z durch $x+iy$, so ergiebt sich

2. $$\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v})\sin u = x, \quad \tfrac{1}{2}(e^v-e^{-v})\cos u = y.$$

Hieraus folgt weiter
$$x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2v}+e^{-2v}) + \tfrac{1}{2}\sin^2 u - \tfrac{1}{2}\cos^2 u,$$
mithin ist
$$1+x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}(e^v+e^{-v})^2 + \sin^2 u,$$
und daher
$$(1+x)^2+y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) + \sin u]^2,$$
$$(1-x)^2+y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) - \sin u]^2.$$

Hieraus ergiebt sich

3. $$\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) + \sin u = \sqrt{(1+x)^2+y^2},$$
$$\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) - \sin u = \sqrt{(1-x)^2+y^2};$$

für reale v und u ist
$$\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) \geqq 1, \quad -1 \leqq \sin u \leqq 1;$$
daher gelten bei beiden Wurzeln nur die positiven Werthe. Benutzen wir die Abkürzungen
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+x)^2+y^2} + \sqrt{(1-x)^2+y^2}] = \sigma,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(1+x)^2+y^2} - \sqrt{(1-x)^2+y^2}] = \tau,$$
so ergiebt sich aus 3.

4. $$\tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v}) = \sigma,$$
5. $$\sin u = \tau.$$

Aus 5. folgt

6. $$u = Arc\,sin\,\tau.$$

Aus 4. ergiebt sich

7. $$e^v = \sigma + \sqrt{\sigma^2-1},$$
8. $$v = l(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1}).$$

Führen wir 6. und 8. in 1. ein, so erhalten wir
$$Arc\,sin\,z = Arc\,sin\,\tau + il(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}) + 2k\pi.$$

4. Wir haben noch zu entscheiden, welcher Werth von $Arc\,sin\,\tau$ und welches Vorzeichen von $\sqrt{\sigma^2-1}$ gilt.

Aus No. 3, 2 folgt, dass $\sin u$ dasselbe Vorzeichen hat, wie x.

Durch Subtraction der in No. 3 gegebenen Werthe für $z \pm \sqrt{z^2-1}$ folgt

1. $$\sqrt{1-z^2} = \tfrac{1}{2}(e^v+e^{-v})\cos u - \tfrac{1}{2}i(e^v-e^{-v})\sin u.$$

Bezeichnet man die Abstände eines Punktes P des oberen Blattes von den Punkten $+1$ und -1 mit ρ und ρ_1, sowie mit φ den Winkel, um den ρ in positiver Richtung (entgegengesetzt den Uhrzeigern) gedreht werden muss, um mit der von $+1$ nach -1 sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, und mit φ_1 den kleinsten Winkel, um den ρ_1 zu drehen ist, um mit der von -1 nach $+1$ sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, rechnet φ_1 positiv oder negativ, je nachdem die Drehungsrichtung negativ oder positiv ist und nimmt für den Nullpunkt des obern Blattes $\sqrt{1-z^2} = +1$ (nicht -1) an, so ist für jeden Punkt des obern Blattes, wie man sich leicht überzeugt

2. $$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{\rho\rho_1}\cdot[\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) + i\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)],$$

wodurch nun diese Wurzel ohne jede Zweideutigkeit bestimmt ist. Vergleicht man dies mit 1. und bemerkt, dass $\frac{1}{2}(e^v+e^{-v})$ positiv ist, so erkennt man, dass $\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ und $\cos u$ gleiche Zeichen haben.

Durch die beiden Bemerkungen, dass $\sin u$ mit x und $\cos u$ mit $\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ dem Vorzeichen nach übereinstimmt, ist u bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π unzweideutig bestimmt. Die Untersuchung der Werthe von $\varphi+\varphi_1$ ergiebt ohne Schwierigkeit folgende Uebersicht

3. $$\begin{array}{llll} \text{Ist} & x > 0, & y > 0, & \text{so ist } 0 < u < \tfrac{1}{2}\pi; \\ \text{„} & x > 0, & y < 0, & \text{„ „ } \tfrac{1}{2}\pi < u < \pi. \\ \text{„} & x < 0, & y < 0, & \text{„ „ } \pi < u < \tfrac{3}{2}\pi; \\ \text{„} & x < 0, & y > 0, & \text{„ „ } \tfrac{3}{2}\pi < u < 2\pi; \end{array}$$

Aus 3. folgt, dass y dasselbe Vorzeichen hat, wie $\cos u$; da nun nach No. 3, 7
$$\tfrac{1}{2}(e^v - e^{-v}) = \sqrt{\sigma^2-1},$$
so ergiebt sich mit Rücksicht auf No. 3, dass $\sqrt{\sigma^2-1}$ für Punkte des obern Blattes positiv zu nehmen ist.

Bezeichnet (τ) den absoluten Werth von τ, so erhält man daher
$$Arc\,sin\,z = \left\{\begin{array}{l} arc\,sin(\tau) \\ \pi - arc\,sin(\tau) \\ \pi + arc\,sin(\tau) \\ 2\pi - arc\,sin(\tau) \end{array}\right\} + il(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}) + 2k\pi.$$

Die vier Zeilen gelten der Reihe nach für Punkte der Quadranten $+x, +y$; $+x, -y$; $-x, -y$; $-x, +y$; dabei ist zu beachten, dass die Verwachsung als Doppellinie aufzufassen ist, als Uebergang von der $(+Y)$-Seite des oberen Blattes zur $(-Y)$-Seite des unteren, so wie als Uebergang von der $(-Y)$-Seite des oberen zur $(+Y)$-Seite des unteren; für zwei Punkte der Verwachsung, die geometrisch identisch sind, aber als verschiedenen Uebergängen angehörig betrachtet werden, haben die zugehörigen Functionen $Arc\,sin\,z$ die Differenz $\pm\pi$.

5. Um zu entscheiden, welche Werthe $Arc\,sin\,z$ für einen Punkt des unteren Blattes hat, wollen wir einen solchen Punkt mit (z) bezeichnen, zum Unterschiede von dem im oberen Blatte über ihm liegenden Punkte z. Wir integriren nun auf irgend einem Wege (Fig. 560) im oberen Blatte von 0 bis z und erhalten

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = Arc\,sin\,\tau + il(\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}) + 2k\pi.$$

Um nun das Integral von 0 bis (z) zu erhalten, benutzen wir folgenden Integrationsweg: Wir gehen von 0 auf der realen Achse bis dicht vor $+1$, umgehen dann in einem verschwindenden Kreise den Punkt $+1$, kehren entlang der realen Achse bis zum Nullpunkte zurück, und verfolgen dann weiter bis (z)

den Weg (a), der im zweiten Blatte unter a liegt. Auf dem Wege (a) sind die Elemente des Integrals

$$\int_{(0)}^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

den Elementen des über a erstreckten Integrals

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

entgegengesetzt gleich, wegen der entgegengesetzt gleichen Werthe, welche $\sqrt{1-z^2}$ in zwei unter einander liegenden Punkten hat; folglich ist entlang a und (a)

$$\int_{(0)}^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun das Kreisintegral verschwindet, und jedes der beiden entlang der realen Achse erstreckten den Werth $\frac{1}{2}\pi$ hat, so folgt

$$\int_0^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi - Arc\sin z.$$

Daher ist für Punkte des unteren Blattes

12. $$Arc\sin(z) = \pi - Arc\sin z,$$

wobei z den über dem Punkte (z) des unteren Blattes liegenden Punkt des oberen Blattes bezeichnet.

6. Die Function $(1+z)^m$, in welcher unter m ein realer echter oder unechter Bruch verstanden werden mag, hat einen Windungspunkt in $z = -1$, in dem sie unendlich wird, wenn $m < 0$; sie kann daher für alle Werthe, deren Modul < 1 ist, nach steigenden Potenzen von z entwickelt werden. Die binomische Reihe

1. $$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \ldots$$

gilt daher für alle complexen z, deren Modul < 1.

Die linke Seite ist m-deutig, die rechte nur eindeutig. Die rechte Seite reducirt sich für $z = 0$ auf 1, und ändert sich mit z stetig. Construiren wir die m-blätterige Riemann'sche Fläche, für welche $(1+z)^m$ eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist, so stellt die unendliche Reihe den Werth der Function für die Punkte im Innern des Kreises auf der Fläche dar, für dessen Centrum $(1+z)^m = 1$ ist; die Functionswerthe für die andern Blätter ergeben sich durch Multiplication der Reihe mit den $m$ten Wurzeln der Einheit.

Ersetzen wir in 1. z durch $-z^2$ und nehmen $m = -\frac{1}{2}$, so entsteht

2. $$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot z^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \ldots$$
$$mod\, z < 1.$$

Die Integration dieser Reihe liefert

3. $$Arc\sin z = \frac{z}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \ldots + 2k\pi$$
$$mod\, z < 1.$$

Diese unendliche Reihe giebt die Werthe von $Arc\sin z$ für die Punkte z desselben Kreises, für welche die Reihe 2. die Werthe von $1:\sqrt{1-z^2}$ liefert. Wenn wir in der Gleichung

$$Arc\sin z = iL\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i},$$

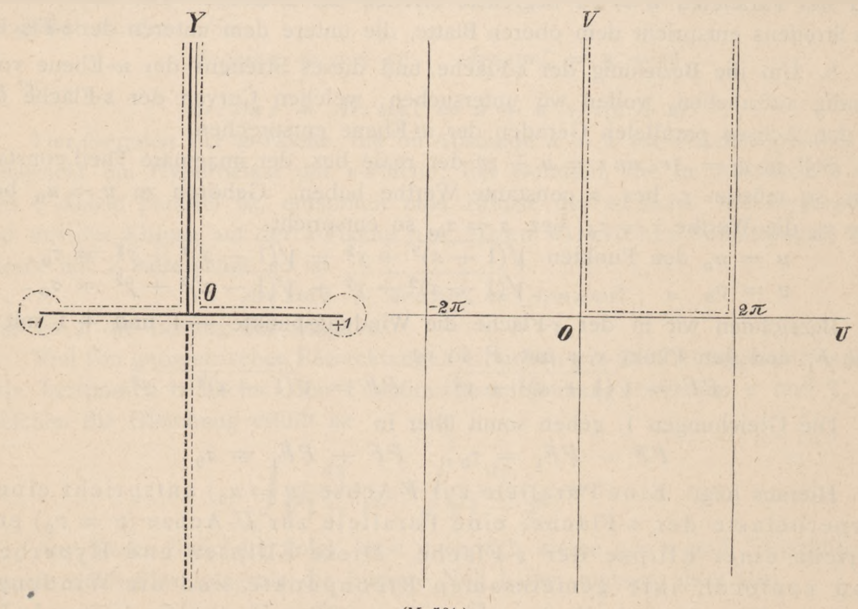
z durch iz ersetzen, so entsteht

$$Arc\sin iz = iL(z+\sqrt{z^2+1});$$

wird dieselbe Substitution in 3. ausgeführt, so ergiebt sich

4. $$L(z+\sqrt{z^2+1}) = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + i\cdot 2k\pi$$
$$mod\, z < 1.$$

7. Wollen wir $Arc\sin z$ als eindeutige Function des Ortes der für $1:\sqrt{1-z^2}$ construirten Riemann'schen Fläche darstellen, so muss die Fläche, die zweifach zusammenhängend ist, durch einen geeigneten Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden. Zu diesem Zwecke zerschneiden wir die z-Fläche im oberen Blatte entlang der positiven imaginären Achse, und setzen diesen Schnitt über die Verwachsung hinweg ins untere Blatt fort. (In Fig. 561 ist der Schnitt durch eine Doppellinie angedeutet, durch welche die beiden Ränder



(M. 561.)

des Schnittes dargestellt werden sollen). Den Nullpunkt, von welchem die Integration ausgeht, nehmen wir, wie immer, im oberen Blatte, oberhalb der Verwachsung und rechts vom Querschnitte an.

Wird ferner angenommen, dass $Arc\sin z$ für den Nullpunkt den Werth $2k\pi$ hat, wo nun k eine bestimmte reale ganze Zahl bedeutet, so ist für jeden Punkt der z-Fläche die Function $Arc\sin z$ eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, dass die z-Fläche durch die Ränder des Querschnitts begrenzt ist, dass also die Integrationscurve den Querschnitt nirgends überschreiten darf. Um von einem Punkte des Querschnitts zu dem auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte zu gelangen, haben wir eine Curve zu beschreiben, die beide Windungspunkte umkreist; in zwei gegenüberliegenden Punkten des Querschnitts hat also $Arc\,sin\,z$ Werthe, die um 2π von einander verschieden sind.

Nehmen wir zunächst $k = 0$ an, so entspricht dem Nullpunkte der z-Fläche der Nullpunkt der w-Ebene. Geht z von 0 entlang der Verwachsung bis 1, so durchläuft $w = arc\,sin\,z$ die reale Achse von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$; geht z (nach Umgehung des Windepunkts 1 in einem verschwindend kleinen Kreise) auf der andern Seite der Verwachsung bis -1, so geht w von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$; kehrt z oberhalb der Verwachsung bis zu dem Punkte des Querschnitts zurück, der O gegenüberliegt, so geht w weiter bis zu 2π. Geht z entlang des Querschnitts von 0 bis $i\eta$, so ist

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = i\int_0^\eta \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = i\,l(\eta + \sqrt{1+\eta^2}).$$

Dem positiven Theile des rechten Querschnittrandes entspricht daher die positive imaginäre Achse der w-Ebene, dem negativen Theile die negative. Dem andern Rande des Querschnitts entspricht die Gerade, welche die w-Werthe $2\pi + iv$ enthält, also im Abstande 2π zur imaginären Achse parallel ist. Der ganzen durch den Querschnitt begrenzten z-Fläche entspricht der von der v-Achse und der Parallelen $u = 2\pi$ begrenzte Streifen der w-Ebene. Die obere Hälfte des Streifens entspricht dem oberen Blatte, die untere dem unteren der z-Fläche.

8. Um die Beziehung der z-Fläche und dieses Streifens der w-Ebene vollständig aufzuhellen, wollen wir untersuchen, welchen Curven der z-Fläche die zu den Achsen parallelen Geraden der w-Ebene entsprechen.

Soll in $w = Arc\,sin\,z = u + iv$ der reale bez. der imaginäre Theil constant sein, so müssen τ, bez. σ constante Werthe haben. Gehören zu $u = u_0$ bez. $v = v_0$ die Werthe $\tau = \tau_0$, bez. $\sigma = \sigma_0$, so entspricht

1. $$\begin{aligned} u &= u_0 \text{ den Punkten } \sqrt{(1+x)^2+y^2} - \sqrt{(1-x)^2+y^2} = \tau_0\,, \\ v &= v_0 \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad \sqrt{(1+x)^2+y^2} + \sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sigma_0\,. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir in der z-Fläche die Windungspunkte -1 und $+1$ mit F und F_1 und den Punkt x, y mit P, so ist

$$PF = \sqrt{(1+x)^2+y^2}, \quad PF = \sqrt{(1-x)^2+y^2}\,.$$

Die Gleichungen 1. gehen somit über in

$$PF - PF_1 = \tau_0\,, \quad PF + PF_1 = \sigma_0\,.$$

Hieraus folgt: Eine Parallele zur V-Achse ($u = u_0$) entspricht einem Hyperbelaste der z-Fläche; eine Parallele zur U-Achse ($v = v_0$) entspricht einer Ellipse der z-Fläche. Diese Ellipsen und Hyperbeln sind confocal, ihre gemeinsamen Brennpunkte sind die Windungspunkte. Eine innerhalb der obern (untern) Streifenhälfte liegende Parallele zur U-Achse entspricht einer Ellipse im obern (untern) Blatte der z-Fläche. Die beiden Aeste derselben Hyperbel gehören zwei entgegengesetzt gleichen Werthen von τ, mithin zwei Normalen der U-Achse zu, die gleichweit von den Rändern des Streifens in der w-Ebene abstehen; zwei Hyperbeläste, von denen der eine aus der obern Hälfte des ersten Blattes in die untere des zweiten Blattes sich fortsetzt, während der andere aus der untern Hälfte des ersten Blattes nach der obern des zweiten geht, und mit dem ersten Aste sich deckt, gehören zu zwei Normalen zur U-Achse, deren Abscissen den Bedingungen genügen

$$arc\,sin\,u = \tau_0\,, \quad 0 < u < 2\pi\,.$$

Hieraus folgt, dass die Abscissen u_0 und u_0' der Parallelen zur V-Achse, die zwei sich deckenden Hyperbeln entsprechen, die Summe π oder 3π haben.

Hieraus erkennen wir: Jedem Punkte des Streifens der w-Ebene entspricht ein und nur ein Punkt der z-Fläche.

Wenn wir nun die Function $Arc\,sin\,z$ im Nullpunkte statt mit dem Werthe Null mit den Werthen

$$\ldots -6\pi,\ -4\pi,\ -2\pi,\ +2\pi,\ +4\pi,\ +6\pi \ldots$$

beginnen lassen, so ist ersichtlich, dass den Punkten der z-Fläche immer andere Streifen der w-Ebene entsprechen, alle normal zur U-Achse und von der Breite 2π, so dass nun die ganze W-Ebene von solchen Streifen bedeckt wird.

9. Das Additionstheorem für den Arcussinus. Neben den Additionstheoremen für den Logarithmus und Arcustangens

$$Lz + L\zeta = L(z\zeta)\,,$$

$$Arc\,tang\,z + Arc\,tang\,\zeta = Arc\,tang\frac{z+\zeta}{1-z\zeta}\,,$$

existirt ein verwandtes Theorem für den Arcussinus, das für reale Werthe der Variabeln bereits aus den Elementen bekannt ist. Die Aufgabe, die Summe

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta$$

als einen Arcussinus einer Function von z und ζ darzustellen, kann geometrisch so gelöst werden: Sei

$$Arc\,sin\,z = u + iv\,, \quad Arc\,sin\,\zeta = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v}\,,$$

so ist

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = u + \mathfrak{u} + i(v + \mathfrak{v})\,.$$

Der Geraden der w-Ebene, die im Abstande $u + \mathfrak{u}$ zur V-Achse parallel ist, entspricht ein Hyperbelast der z-Fläche; der Geraden, die im Abstande $v + \mathfrak{v}$ der U-Achse parallel ist, entspricht eine Ellipse der z-Fläche; der Hyperbelast hat mit der Ellipse auf der z-Fläche nur einen wirklichen Schnittpunkt; wird dieser mit Z bezeichnet, so ist

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = Arc\,sin\,Z\,,$$

also ist Z die Lösung der Aufgabe.

Frei von geometrischen Betrachtungen erreichen wir das Ziel folgendermassen: Wir bestimmen zunächst den Functionszusammenhang zwischen z und ζ, für welchen die Gleichung erfüllt ist

1. $$\int_0^z \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = c\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass unendlich kleine von z und ζ herrührende Zunahmen beider Integrale die Summe Null haben müssen, dass also

2. $$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0\,.$$

Werden die Nenner beseitigt, so entsteht

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,dz + \sqrt{1-z^2}\,d\zeta = 0\,.$$

Hier integriren wir theilweis und erhalten

$$z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} + \int z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = Const.$$

Das letzte Integral verschwindet gemäss der Gleichung 1., daher ergiebt sich der gesuchte Zusammenhang zu

3. $$z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = \gamma\,.$$

Um den Zusammenhang der Constanten γ und c zu erkennen, vergleichen wir die unendlich kleinen Aenderungen, die γ und c erleiden, wenn z und ζ sich um verschwindende Beträge verändern. Wir erhalten aus 1. und 3.

$$dc = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$d\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}\cdot dz + \sqrt{1-z^2}\cdot d\zeta - z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right),$$

$$= -\left(z\zeta - \sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\right)dc\,.$$

Nun ist

$$1 - \gamma^2 = 1 - z^2 - \zeta^2 + 2z^2\zeta^2 + 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$= (1-z^2)(1-\zeta^2) + z^2\zeta^2 + 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\,.$$

Daher folgt

4. $$dc = \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,.$$

Für $x = y = 0$ verschwindet γ, und c hat einen der Werthe $k\cdot 2\pi$; hieraus und aus 4. folgt

$$c = \int_0^\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}\,.$$

Wir haben daher das Additionstheorem

$$\int_0^z \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = \int_0^\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}},$$

$$\gamma = z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\,;$$

oder kürzer

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = Arc\,sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right).$$

10. Als den Sinus der complexen Zahl $w = u + iv$ definiren wir die Zahl z, welche der Gleichung genügt

$$Arc\,sin\,z = w\,.$$

Zu jedem Werthe von w gehört ein eindeutig bestimmtes z, die Function $sin\,w$ ist also eine eindeutige Function der Variabeln w. Nimmt w alle Werthe an, die innerhalb des Streifens zwischen $u = 0$ und $u = 2\pi$ liegen, so durchläuft $z = sin\,w$ alle möglichen Werthe; dabei nimmt $sin\,w$ jeden Werth zweimal an, nämlich für $w = u + iv$ denselben wie für $w = \pi - (u + iv)$, es ist also

$$sin\,w = sin(\pi - w)\,.$$

Für alle Zahlen w, die sich um gerade Vielfache von 2π unterscheiden, hat $sin\,w$ denselben Werth, es ist

$$sin\,w = sin(w + 2k\pi)\,.$$

Der Sinus ist somit eine periodische Function und hat die reale Periode 2π. Aus den Gleichungen No. 2, 4 und 5 ergiebt sich sofort

$$sin(u+iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\,sin\,u + i\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}\,cos\,u\,.$$

11. Die Function $Arc\,cos\,z$ definiren wir durch die Gleichung

1. $$Arc\,cos\,z = \frac{\pi}{2} - Arc\,sin\,z\,.$$

Die Function $Arc\,cos\,z$ ist daher unendlich vieldeutig und hat denselben Periodicitätsmodul 2π, wie $Arc\,sin\,w$. Drückt man in dem Additionstheorem

$$Arc\,sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right) - Arc\,sin\,z = Arc\,sin\,\zeta,$$

ζ durch $z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = z_1$ und z aus, so entsteht

2. $$Arc\,sin\,z_1 - Arc\,sin\,z = Arc\,sin\left(z_1\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-z_1^2}\right).$$

Schreibt man für 1.

$$Arc\,cos\,z = Arc\,sin\,1 - Arc\,sin\,z\,,$$

und benutzt 2. indem man z_1 durch 1 ersetzt, so folgt

3. $$Arc\,cos\,z = Arc\,sin\sqrt{1-z^2}\,.$$

Welchen Werth der Quadratwurzel man hierin zu nehmen hat, ist ebensowenig unbestimmt, wie bei den Quadratwurzeln im Additionstheorem.

Ist $Arc\,cos\,z = w$, so gehört zu jedem w ein eindeutig bestimmtes z. Wir definiren die Function $z = cos\,w$ als die Zahl, welche der Gleichung genügt

$$Arc\,cos\,z = w\,;$$

es ist mithin $cos\,w$ eine eindeutige Function von w. Aus der Vieldeutigkeit von $Arc\,cos\,z$ folgt: Die Function $cos\,w$ ist periodisch und hat die reale Periode 2π. Aus 3. folgt

4. $$cos\,w = \sqrt{1 - sin^2 w}\,.$$

Schreibt man für 1.

$$Arc\,sin\,z = \tfrac{1}{2}\pi - Arc\,cos\,z\,,$$

und setzt $Arc\,cos\,z = w$, so folgt $z = sin(\frac{1}{2}\pi - w)$, oder

5. $$cos\,w = sin(\tfrac{1}{2}\pi - w)\,.$$

Durch 5. ist vollständig bestimmt, welcher Werth der Quadratwurzel in 4. zu nehmen ist. Ferner folgt aus 5. und No. 7

6. $$cos(u+iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\,cos\,u - i\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}\,sin\,u\,.$$

Setzt man im

$$Arc\,sin\,z + Arc\,sin\,\zeta = Arc\,sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$Arc\,sin\,z = w\,, \quad Arc\,sin\,\zeta = \mathfrak{w}\,,$$

so folgt

7. $$sin(w + \mathfrak{w}) = sin\,w\,cos\,\mathfrak{w} + cos\,w\,sin\,\mathfrak{w}\,,$$

und hieraus, wenn man w durch $\frac{1}{2}\pi - w$ ersetzt,

8. $$cos(w - \mathfrak{w}) = cos\,w\,cos\,\mathfrak{w} + sin\,w\,sin\,\mathfrak{w}\,.$$

12. Ist $w = Arc\,sin\,z$, so ist

$$dw = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

mithin
$$dz = \sqrt{1-z^2}\,dw\,,$$

d. i.
$$d\,sin\,w = cos\,w\,dw\,.$$

Hieraus folgt, dass die für reale w bewiesenen Differentialquotienten des Sinus und Cosinus auch für complexe w unverändert gelten. Da nun $sin\,w$ und $cos\,w$ für alle endlichen $w = u + iv$ endlich bleiben, so folgt, dass die Taylor-schen Reihen

$$sin\,w = w - \frac{w^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{w^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots,$$

$$cos\,w = 1 - \frac{w^2}{1\cdot 2} + \frac{w^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{w^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

für alle endlichen Werthe von w gültig sind.

§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale.

1. Unter einem elliptischen Integrale versteht man jedes Integral von der Form

$$\int f\left(z,\ \sqrt{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e}\right)dz\,,$$

wobei f eine rationale Function von z und der Quadratwurzel bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass sich das Integral nicht infolge besonderer Werthe der Coefficienten $a \,.\,.\, e$ oder besonderer Art der Function f durch algebraische oder cyklometrische Functionen oder Logarithmen ausdrücken lässt.

2. Wir beschäftigen uns zunächst damit, die irrationale Grösse
$$\sqrt{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e}$$
durch eine rationale Substitution zu transformiren. Zu diesem Zwecke zerlegen wir den Radicanden in seine linearen Faktoren; es sei
$$az^4 + \,.\,.\, + e = a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta).$$
Hierauf setzen wir
$$z = \frac{U}{V},$$
worin U und V Polynome einer neuen Variabeln ζ bezeichnen mögen, und zwar beide vom Grade p, oder U vom Grade p, V vom Grade $p-1$. Hierdurch erhalten wir
$$\sqrt{az^4 + \,.\,.\, + e} = \frac{1}{V^2}\sqrt{(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)}.$$

Soll nun der transformirte Ausdruck nicht wesentlich complicirter erscheinen als der ursprüngliche, so muss die rechts stehende Wurzel in das Produkt einer rationalen Function mit einer Wurzel aus einem Polynom vierten Grades zerfallen; es müssen daher in der Function
$$(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)$$
alle linearen Faktoren doppelt vorkommen, ausgenommen vier, welche dann den Radicanden zusammensetzen.

Zwei der vier Functionen
$$U-\alpha V,\quad U-\beta V,\quad U-\gamma V,\quad U-\delta V$$
können nicht einen gemeinsamen linearen Faktor haben; denn derselbe würde dann auch gemeinsamer Faktor von U und V sein, während doch als selbstverständlich vorauszusetzen ist, dass U und V keinen gemeinsamen Faktor haben. Die noch unbestimmten Functionen U und V sind daher so zu wählen, dass ausser vier einfachen linearen Faktoren jede der Functionen $U-\alpha V$, $U-\beta V$, $U-\gamma V$, $U-\delta V$ nur lineare Faktoren doppelt enthält.

3. Es ist bemerkenswerth, dass durch jede solche Substitution das einfachste elliptische Differential, als welches
$$\frac{dz}{\sqrt{a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$
zu bezeichnen ist in
$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + c_1\zeta^2 + d_1\zeta + e_1}},$$
also in ein Differential von derselben Form, transformirt wird.

Ist nämlich in Folge der Substitution
$$\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)} = \frac{M}{V^2}\sqrt{a_1\zeta^4 + \,.\,.\, + e_1},$$
so ist
$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = \frac{1}{M\sqrt{a_1\zeta^4 + \,.\,.}}\left(V\frac{dU}{d\zeta} - U\frac{dV}{d\zeta}\right)d\zeta.$$
Jeden linearen Faktor, der in $U-\alpha V$ doppelt vorkommt, enthält M einfach; es lässt sich nun leicht nachweisen, dass jeder solche Faktor auch in $VU' - UV'$ aufgeht. Hierzu bemerken wir zunächst, dass, wenn die ganze Function $\varphi(\zeta)$ den linearen Faktor $m\zeta + n$ doppelt enthält, wenn also

$$\varphi(\zeta) = (m\zeta + n)^2 \cdot \psi(\zeta),$$
für den Differentialquotienten nach ζ sich ergiebt
$$\begin{aligned}\varphi' &= (m\zeta + n)^2 \cdot \psi' + 2m\,(m\zeta + n)\cdot\psi\\ &= (m\zeta + n)\,[(m\zeta + n)\,\psi' + 2m\psi].\end{aligned}$$
Wir sehen daher: Jeder lineare Faktor, der in φ doppelt vorkommt, theilt auch φ'.

Da nun
$$VU' - UV' = V\cdot\frac{d(U-\alpha V)}{d\zeta} - (U-\alpha V)\frac{dV}{d\zeta},$$
und da nach dem soeben bewiesenen Satze jeder Doppelfaktor von $U-\alpha V$ auch ein Faktor von $d(U-\alpha V) : d\zeta$ ist, so folgt, dass jeder Doppelfaktor von $U-\alpha V$ auch Faktor der Function $VU' - UV'$ ist.

Die Function M ist vom Grade $2p-2$. Sind U und V beide vom Grade p, etwa
$$\begin{aligned}U &= m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + m_2\zeta^{p-2} + \,.\,.\,.\\ V &= n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + n_2\zeta^{p-2} + \,.\,.\,.\end{aligned}$$
so ist
$$\begin{aligned}VU' - UV' &= (n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + \,.\,.)\cdot[pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + \,.\,.]\\ &\quad - (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + \,.\,.)\cdot[pn\zeta^{p-1} + (p-1)n_1\zeta^{p-2} + \,.\,.]\\ &= (mn_1 - nm_1)\zeta^{2p-2} + \,.\,.\,.\,.\,.\end{aligned}$$
Ist V vom Grade $p-1$, etwa
$$V = n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + \,.\,.\,.$$
so ist
$$\begin{aligned}VU' - UV' &= (n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + \,.\,.)[pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + \,.\,.]\\ &\quad - (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + \,.\,.\,.)[(p-1)n\zeta^{p-2} + (p-2)n_1\zeta^{p-3} + \,.\,.]\\ &= mn\zeta^{2p-2} + \,.\,.\,.\,.\,.\end{aligned}$$
In beiden Fällen hat also $VU' - UV'$ den Grad $2p-2$. Da nun M und $VU' - UV'$ gleichen Grades sind, und jeder Faktor von M auch in $VU' - UV'$ enthalten ist, so folgt, dass der Quotient
$$\frac{VU' - UV'}{M}$$
eine reine Zahl ist*).

4. Jede lineare Substitution

1. $$z = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1 + \nu\zeta}$$

genügt den angegebenen Bedingungen in einfachster Weise; denn in diesem Falle ist
$$U = \lambda + \mu\zeta,\quad V = 1 + \nu\zeta,$$
also sind $U-\alpha V\,.\,.\,.$ sämmtlich linear. Man kann daher über die unbestimmten Zahlen λ, μ, ν so verfügen, dass der Radicand des transformirten Differentials
$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + c_1\zeta + d_1\zeta + e_1$$
eine möglichst einfache Gestalt erhält, nämlich so, dass
$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + \,.\,.\, + e_1 = A(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2),$$
worin k noch unbestimmt ist.

Alsdann hat $a_1\zeta^4 + \,.\,.$ die linearen Faktoren
$$\zeta - 1,\quad \zeta + 1,\quad \zeta - \frac{1}{k},\quad \zeta + \frac{1}{k}.$$
Den Werthen von z_1, für welche
$$(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)$$

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomonti 1829. § 3, 4.

verschwindet, entsprechen die Werthe von ζ, für welche der transformirte Radicand verschwindet. Nehmen wir an, dass den Werthen $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach die Werthe $\zeta = +1, -1, +1:k, -1:k$ entsprechen sollen, so haben wir zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten λ, μ, ν und der Zahl k folgende Gleichungen, die sich durch Einsetzung der entsprechenden Werthe von z und ζ in die Substitutionsgleichung 1. ergeben,

$$2.\quad \alpha = \frac{\lambda + \mu}{1 + \nu}, \qquad 4.\quad \gamma = \frac{\lambda k + \mu}{k + \nu},$$

$$3.\quad \beta = \frac{\lambda - \mu}{1 - \nu}, \qquad 5.\quad \delta = \frac{\lambda k - \mu}{k - \nu}.$$

Durch Subtraction der Gleichungen 2. und 4., sowie der Gleichungen 3. und 4. erhalten wir leicht

$$6.\quad \alpha - \gamma = \frac{(\lambda\nu - \mu)(1 - k)}{(1 + \nu)(k + \nu)}, \qquad \beta - \gamma = \frac{(\lambda\nu - \mu)(1 + k)}{(1 - \nu)(k + \nu)}.$$

Hieraus folgt durch Division

$$7.\quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Vertauschen wir μ und ν mit $-\mu$ und $-\nu$, so gehen $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ in $\beta - \delta$ und $\alpha - \delta$ über, wie man aus den Gleichungen 2. bis 5. erkennt; daher ist

$$8.\quad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 + k}{1 - k}.$$

Aus 7. und 8. folgt zur Bestimmung von k

$$9.\quad \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}.$$

Die beiden Werthe von k, die sich hieraus ergeben, sind reciprok; wir können daher immer k so wählen, dass der Modul von k ein echter Bruch ist.

Sind insbesondere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämmtlich real, und setzt man $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ voraus, so ist k real.

Haben wir uns entschieden, welche Wurzel der Gleichung 9. für k genommen werden soll, so folgt der zugehörige Werth von ν eindeutig aus der Gleichung 7. Für λ und μ ergeben 2. und 3.

$$\lambda + \mu = \alpha(1 + \nu),$$
$$\lambda - \mu = \beta(1 - \nu);$$

also folgt

$$10.\quad \lambda = \tfrac{1}{2}[(\alpha + \beta) + \nu(\alpha - \beta)],$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta) + \nu(\alpha + \beta)].$$

Führen wir die berechneten Werthe in die Substitutionsgleichung ein, so erhalten wir

$$11.\quad z = \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\nu + \zeta}{1 + \nu\zeta}.$$

Um die Grösse A zu bestimmen, bilden wir

$$z - \alpha = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1 + \nu\zeta} - \alpha = \frac{\lambda - \alpha + (\mu - \alpha\nu)\zeta}{1 + \nu\zeta}$$

und ebenso $z - \beta$, $z - \gamma$, $z - \delta$.

Aus den Gleichungen 2. bis 5. folgt sofort

$$\mu - \alpha\nu = \alpha - \lambda, \qquad \mu - \gamma\nu = k(\gamma - \lambda),$$
$$\alpha - \beta\nu = \lambda - \beta, \qquad \mu - \delta\nu = k(\lambda - \delta).$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergeben sich

$$12.\quad z - \alpha = (\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 - \zeta}{1 + \nu\zeta}, \qquad z - \gamma = (\lambda - \gamma) \cdot \frac{1 - k\zeta}{1 + \nu\zeta}$$
$$z - \beta = (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 + \zeta}{1 + \nu\zeta}, \qquad z - \delta = (\lambda - \delta) \cdot \frac{1 + k\zeta}{1 + \nu\zeta}.$$

Hieraus folgt weiter die Transformation

$$13.\quad (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) \cdot \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + \nu\zeta)^4}.$$

Aus 10. folgt

$$14.\quad \lambda - \alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\nu - 1), \qquad \lambda - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\nu + 1).$$

Aus 4. und 5. erhalten wir

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(\gamma + \delta) + \frac{\nu}{k}(\gamma - \delta)\right],$$

und hieraus weiter

$$15.\quad \lambda - \gamma = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)\left(\frac{\nu}{k} - 1\right), \qquad \lambda - \delta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)\left(\frac{\nu}{k} + 1\right).$$

Somit ist

$$16.\quad (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) = \frac{1}{16}(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right).$$

Daher ergiebt sich schliesslich

$$17.\quad \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)} = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)\sqrt{(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{1}{(1 + \nu\zeta)^2} \cdot \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}.$$

Durch Differentiation der Formeln 12. erhalten wir zunächst

$$18.\quad dz = -(\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 + \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta, \qquad dz = -(\lambda - \gamma) \cdot \frac{k + \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta,$$
$$dz = (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta, \qquad dz = (\lambda - \delta) \cdot \frac{k - \nu}{(1 + \nu\zeta)^2} d\zeta.$$

Durch Multiplication dieser Formeln ergiebt sich in Rücksicht auf 16.

$$19.\quad dz = \frac{1}{2}\sqrt{k(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{d\zeta}{(1 + \nu\zeta)^2}.$$

Für das einfachste elliptische Differential haben wir somit die Transformation

$$20.\quad \frac{dz}{\sqrt{a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{a(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

5. Ist δ unendlich gross, so verschwindet in

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$$

der Coefficient a und das Polynom reducirt sich somit auf ein Polynom dritten Grades

$$bz^3 + cz^2 + dz + e = b(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma).$$

Aus No. 4, 9 folgt für $\delta = \infty$

$$1.\quad \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}.$$

Ferner folgt aus No. 4, 5

$$2.\quad \nu = k.$$

In Rücksicht auf 2. haben wir an Stelle von No. 4, 13

$$3.\quad (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \cdot \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + k\zeta)^4},$$

und anstatt No. 4, 18

$$4.\qquad dz = -(\lambda-\alpha)\,\frac{1+k}{(1+k\zeta)^2}\,d\zeta, \qquad dz = (\lambda-\beta)\cdot\frac{1-k}{(1+k\zeta)^2},$$
$$dz = -(\lambda-\gamma)\,\frac{2k}{(1+k\zeta)^2}\,d\zeta.$$

Ersetzen wir in No. 4, 20 das Produkt $a\delta$ durch $(-b)$ und gehen zur Grenze für $\delta = \infty$ über, so erhalten wir

$$5.\qquad \frac{dz}{\sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b(\alpha-\beta)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Die Resultate der beiden Nummern 4. und 5. können wir in dem Satze aussprechen: Die Quadratwurzel aus einem Polynome vierten oder dritten Grades in Bezug auf die Variable z kann man durch eine lineare Substitution in einen Ausdruck von der Form transformiren

$$\frac{1}{M}\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)},$$

worin der Modulus von k kleiner als 1 ist, und M eine Function zweiten Grades von ζ bezeichnet.

---

6. Für die Anwendungen der elliptischen Integrale in Geometrie und Mechanik ist insbesondere der Fall von Interesse, dass das Polynom $az^4 + bz^3 + \ldots + e$ nur reale Coefficienten hat und der Variabeln z nur solche realen Werthe beigelegt werden, für welche die Wurzel aus diesem Polynom reale Werthe erhält. Wir wollen nun zeigen, dass in diesem Falle sich jederzeit reale Substitutionen angeben lassen, durch welche

$$\int f(z, \sqrt{az^4 + \ldots})\,dz$$

durch algebraische Functionen, Logarithmen, cyklometrische Functionen und ein Integral von der Form ausgedrückt werden kann

$$\int\frac{F(\mathfrak{z})}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}\,d\mathfrak{z},$$

wobei $F(\mathfrak{z})$ eine rationale Function bezeichnet und k und $\mathfrak{z}$ reale echte Brüche sind. Diese Transformation lässt sich allerdings nicht immer durch eine rationale Substitution erreichen, wir müssen uns vielmehr dazu bequemen, irrationale, von sehr einfacher Art, zu verwenden.

Wir wenden zunächst die lineare Substitution an

$$1.\qquad z = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1+\zeta},$$

um dadurch die Transformation zu erhalten

$$a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta) = \frac{a_1}{(1+\zeta)^4}(p^2-\zeta^2)(q^2-\zeta^2).$$

Entsprechen den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach die Wurzeln $p, -p, q, -q$, so erhalten wir aus 1. die vier Gleichungen

$$2.\qquad \alpha = \frac{\lambda+\mu p}{1+p}, \quad \gamma = \frac{\lambda+\mu q}{1+q}, \qquad \beta = \frac{\lambda-\mu p}{1-p}, \quad \delta = \frac{\lambda-\mu q}{1-q}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich

$$3.\qquad \alpha-\gamma = \frac{(\lambda-\mu)(q-p)}{(1+p)(1+q)}.$$

Wechseln wir hier der Reihe nach das Vorzeichen von p, von q; von p und q, so erhalten wir

$$4.\qquad \beta-\gamma = \frac{(\lambda-\mu)(q+p)}{(1-p)(1+q)},$$
$$5.\qquad \alpha-\delta = \frac{-(\lambda-\mu)(q+p)}{(1+p)(1-q)},$$
$$6.\qquad \beta-\delta = \frac{-(\lambda-\mu)(q-p)}{(1-p)(1-q)}.$$

Aus 4., 5., 6. folgt weiter

$$7.\qquad \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = -\frac{(1-p)(1-q)}{(1+p)(1+q)}, \qquad \frac{\alpha-\delta}{\beta-\gamma} = -\frac{(1-p)(1+q)}{(1+p)(1-q)}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplication und Division

$$8.\qquad \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta},$$
$$9.\qquad \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}.$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ real und $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, so folgen aus 8. und 9. reale Werthe für p und q. Sind α und β real, γ und δ conjugirt complex, so sind auch $\alpha-\gamma$ und $\alpha-\delta$, sowie $\beta-\gamma$ und $\beta-\delta$ conjugirt complex, mithin die rechte Seite in Gleichung 8. real und positiv, folglich p real. Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i$, $\delta = \gamma_1 - \gamma_2 i$, so ergiebt sich für die rechte Seite von 9.

$$\frac{\alpha-\gamma_1-\gamma_2 i}{\alpha-\gamma_1+\gamma_2 i}\cdot\frac{\beta-\gamma_1-\gamma_2 i}{\beta-\gamma_1+\gamma_2 i}.$$

Hierin sind Zähler und Nenner conjugirt complex; der Quotient der Quadratwurzeln ist mithin ebenfalls der Quotient zweier conjugirt Complexen, also erhält man aus 9. ein Resultat von der Form

$$\frac{1-q}{1+q} = \pm\frac{\rho-\sigma i}{\rho+\sigma i} = \frac{\rho-\sigma i}{\rho+\sigma i} \quad\text{oder}\quad \frac{\sigma+\rho i}{\sigma-\rho i},$$

woraus sofort hervorgeht

$$10.\qquad q = \frac{\sigma}{\rho}\,i \quad\text{oder}\quad -\frac{\rho}{\sigma}\,i,$$

also ist q rein imaginär.

Sind α und β, sowie γ und δ conjugirt complex,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i, \qquad \beta = \alpha_1 - \alpha_2 i,$$

so ist

$$11.\qquad \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 = \frac{(\alpha_1-\gamma_1)+(\alpha_2-\gamma_2)i}{(\alpha_1-\gamma_1)-(\alpha_2+\gamma_2)i}\cdot\frac{(\alpha_1-\gamma_1)+(\alpha_2+\gamma_2)i}{(\alpha_1-\gamma_1)-(\alpha_2-\gamma_2)i},$$
$$\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2 = \frac{(\alpha_1-\gamma_1)+(\alpha_2-\gamma_2)i}{(\alpha_1-\gamma_1)+(\alpha_2+\gamma_2)i}\cdot\frac{(\alpha_1-\gamma_1)-(\alpha_2+\gamma_2)i}{(\alpha_1-\gamma_1)-(\alpha_2-\gamma_2)i}.$$

Zähler und Nenner der rechten Seiten sind bei beiden Gleichungen conjugirt complex, daher folgen aus beiden rein imaginäre Werthe für p und q.

Setzen wir $\qquad p^2 = b_1, \quad q^2 = b_2,$

so haben wir

	wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ real sind	$b_1 > 0, \quad b_2 > 0,$
12.	„ nur α und β „ „	$b_1 > 0, \quad b_2 < 0,$
	„ α und β, sowie γ und δ conjugirt complex	$b_1 < 0, \quad b_2 < 0.$

Ist δ unendlich gross, reducirt sich also $\sqrt{R}$ auf

$$\sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)},$$

so folgt aus 8. und 9.

$$13.\qquad \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}, \qquad q = 1.$$

Daher ist

$$\sqrt{R} = \sqrt{b\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)} = \frac{1}{(1+\zeta)^2}\sqrt{a_1\,(1-\zeta^2)\,(p^2-\zeta^2)}.$$

Ersetzt man hier p^2 durch b_2, so erhält man wie bei einem endlichen Werthe von δ für die transformirte Wurzel

$$\sqrt{a_1\,(b_1-\zeta^2)\,(b_2-\zeta^2)},$$

wobei $b_1 = 1$, $b_2 = p^2$ ist.

Führt man die lineare Substitution in

$$f(z, \sqrt{R})\,dz, \quad R = az^4 + bz^3 + \ldots$$

aus, so erhält man

$$f_1(\zeta, \sqrt{R_1})\,d\zeta,$$

wobei f_1 eine rationale Function von ζ und $R_1 = a_1\,(b_1-\zeta^2)\,(b_2-\zeta^2)$ bezeichnet. Diese Function lässt sich immer auf die Form bringen

14. $$f_1(\zeta, \sqrt{R_1}) = \frac{\varphi + \psi\sqrt{R_1}}{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R_1}},$$

worin φ, ψ, φ_1, ψ_1 ganze rationale Functionen von ζ sind. Macht man rechts den Nenner rational, so entsteht

$$f_1 = \frac{\Phi + \Psi\sqrt{R_1}}{L},$$

wo nun L, Φ, Ψ ganze Functionen von ζ sind. Daher ist schliesslich

$$\int f(z, \sqrt{R})\,dz = \int\frac{\Phi}{L}\,d\zeta = \int\frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\,d\zeta.$$

Das erste Integral rechts enthält ein rationales Differential und führt daher auf algebraische Functionen und Logarithmen. Im zweiten schreiben wir

15. $$\int\frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\cdot d\zeta = \int\frac{\Psi_1}{L\cdot\sqrt{R_1}}\cdot d\zeta,$$

worin $\Psi_1 = \Psi\cdot R_1$ ist.

7. Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Transformation des Ausdrucks

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1(b_1-\zeta^2)\,(b_2-\zeta^2)}}.$$

A. Ist $a_1 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so hat die Wurzel

$$\sqrt{a_1\,(b_1-\zeta^2)\,(b_2-\zeta^2)}$$

reale Werthe, sobald $b_2 > \zeta^2$ oder $b_1 < \zeta^2$. Im ersten Unterfalle setzen wir

$$\zeta = \sqrt{b_2}\cdot\mathfrak{z}, \quad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}},$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

Im zweiten Unterfalle nehmen wir

$$\zeta = \sqrt{b_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}},$$

woraus folgt

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{a_1 b_2}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

B. Ist $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muss $\zeta^2 > b_1$ sein; wir setzen

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{-b_2}{b_1-b_2}},$$

und haben

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1\,(b_1-b_2)}\cdot\frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}^{\,3}}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{a_1(b_1-b_2)}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

C. Ist $a_1 > 0$, $b_1 < b_2 < 0$, so kann ζ alle realen Werthe annehmen. Die Substitution

$$\zeta = \sqrt{-b_2}\cdot\frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1-b_2}{-b_2}}$$

liefert

$$\sqrt{R_1} = \frac{b_2\sqrt{a}}{\mathfrak{z}^2\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1 b_2}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

D. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so muss ζ^2 zwischen b_1 und b_2 liegen. Durch

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1-b_2}{b_1}}$$

ergiebt sich

$$\sqrt{R_1} = k^2\sqrt{-a_1 b_1 b_2}\cdot\frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}^{\,3}}\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{-a_1 b_1}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

E. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muss $\zeta^2 < b_1$ sein; wir substituiren

$$\zeta = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1}{b_1-b_2}},$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{-a_1 b_1\,(b_1-b_2)}\cdot\frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1\,(b_1-b_2)}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)\,(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}.$$

Im Falle $a_1 < 0$, $b_1 < b_2 < 0$ ist die Wurzel für jedes reale ζ imaginär. Führt man die Substitution A aus, so gelangt man zu denselben Formeln wie bei A, und erhält für k ebenfalls einen realen, echten Bruch.

8. Wir wenden uns nun zu dem Integrale No. 6, 15 zurück. Sondern wir in Ψ_1 und L die Glieder geraden Grades in Bezug auf ζ von den Gliedern ungeraden Grades, so erhalten wir

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 + \zeta M_2}{L_1 + \zeta L_2}$$

worin M_1, M_2, L_1, L_2 nur Glieder mit geraden Exponenten enthalten.

Durch Erweiterung mit $L_1 - \zeta L_2$ beseitigen wir die ungeraden Potenzen des Nenners; es entsteht

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 L_1 - \zeta^2 M_2 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} + \frac{\zeta(M_2 L_1 - M_1 L_2)}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2}.$$

Daher haben wir

$$1.\quad \int \frac{\Psi_1}{L} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{M_2 L_1 - M_1 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} \cdot \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{R_1}} + \int \frac{M_1 L_1 - \zeta^2 M_2 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}}.$$

Im ersten Integrale rechts setzen wir $\zeta^2 = z$ und erhalten dadurch ein Integral

$$\int \Pi \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(b_1 - \mathfrak{z})(b_2 - \mathfrak{z})}},$$

worin Π eine rationale Function von $\mathfrak{z}$ ist. Dieses Integral ist im vorigen Paragraphen behandelt worden. Im letzten Integrale von 1. führen wir eine der Substitutionen No. 7, A, B, C, D, E aus; da dieselben alle unter der Form enthalten sind

$$\zeta^2 = \frac{e_1 + e_2 \mathfrak{z}^2}{f_1 + f_2 \mathfrak{z}^2},$$

so geht die Function von ζ, die nur gerade Potenzen enthält, in eine eben solche Function von $\mathfrak{z}$ über. Wir behalten daher ein Integral übrig

$$\int \frac{N}{N_1} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}},$$

worin N und N_1 nur gerade Potenzen von $\mathfrak{z}$ enthalten.

Zerlegen wir $N : N_1$ in eine ganze Function und in Partialbrüche, und betrachten bei dieser Zerlegung $\mathfrak{z}^2$ als Variable, so sehen wir, dass das Integral 2. in Integrale von der Form zerfällt

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}, \quad \int \frac{\mathfrak{z}^{2n} d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z})}},$$

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{(1 + \lambda \mathfrak{z}^2)^n \sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}.$$

Die letzten beiden Arten können noch weiter reducirt werden.

9. Betreffs des an zweiter Stelle aufgeführten Integrals wollen wir zeigen, wie jedes Integral

$$\int (A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

auf einen algebraischen Theil und auf die Integrale

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \text{ und } \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

reducirt werden kann, indem wir nachweisen, dass sich die unbekannten Zahlen B_1, B_2, B_3 . . . B_{n-1}, C, D gemäss der Gleichung bestimmen lassen

$$\begin{aligned} &\int (A_1 z^{2n} + \ldots + A_n z^2) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \\ &= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)} \\ &+ C \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + D \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation und nachfolgende Multiplication mit $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ folgt aus dieser Gleichung

$$\begin{aligned} &A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2 \\ &= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z)[2k^2 z^3 - (k^2 + 1) z] \\ &+ [(2n - 3) B_1 z^{2n-4} + (2n - 5) B_2 z^{2n-6} + \ldots + B_{n-1}] \cdot [k^2 z^4 - (k^2 + 1) z^2 + 1] \\ &+ Cz^2 + D. \end{aligned}$$

Vergleicht man beiderseits die gleich hohen Potenzen von z, so erhält man zur Bestimmung von B_1, B_2, B_3, . . . B_{n-1}, C, D die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 &= (2n - 1) k^2 \cdot B_1, \\ A_2 &= (2n - 3) k^2 \cdot B_2 - (2n - 2)(k^2 + 1) B_1, \\ A_3 &= (2n - 5) k^2 \cdot B_3 - (2n - 4)(k^2 + 1) B_2 + (2n - 3) B_1, \\ A_4 &= (2n - 7) k^2 \cdot B_4 - (2n - 6)(k^2 + 1) B_3 + (2n - 5) B_2, \\ A_5 &= (2n - 9) k^2 \cdot B_5 - (2n - 8)(k^2 + 1) B_4 + (2n - 7) B_3, \\ &\ldots \\ A_{n-1} &= 3k^2 \cdot B_{n-1} - 4 \cdot (k^2 + 1) B_{n-2} + 5 \cdot B_{n-3}, \\ A_n &= 2 \cdot (k^2 + 1) B_{n-1} + 3 \cdot B_{n-2} + C, \\ 0 &= B_{n-1} + D. \end{aligned}$$

Aus den ersten n Gleichungen ergeben sich die n Unbekannten B_1, B_2, . . B_{n-1}, C; aus der letzten folgt $D = -B_{n-1}$.

Statt des Integrales

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

betrachten wir das folgende

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} - k^2 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

10. Das Integral

$$\int \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)^n \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

lässt sich ebenfalls reduciren; man kann die Coefficienten A_1, A_2, . ., B_1, B_2, C immer so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)^n \sqrt{R}} &= \frac{\sqrt{R}}{(1 + \lambda z^2)^{n-1}} (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3}) \\ &+ \int \frac{(B_1 + B_2 z^2) dz}{\sqrt{R}} + C \int \frac{dz}{(1 + \lambda z^2) \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \lambda z^2)^n \sqrt{R}} &= \left[\frac{2k^2 z^3 - (k^2 + 1) z}{(1 + \lambda z^2)^{n-1} \cdot \sqrt{R}} - \frac{2(n - 1) \lambda z \cdot \sqrt{R}}{(1 + \lambda z^2)^n} \right] (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots) \\ &+ \frac{\sqrt{R}}{(1 + \lambda z^2)^{n-1}} (A_1 + 3 A_2 z^2 + \ldots) + \frac{B_1 + B_2 z^2}{\sqrt{R}} + \frac{C}{(1 + \lambda z^2) \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Beseitigt man die Nenner, so entsteht

$$\begin{aligned} 1 = &(-2k^2 \lambda (n - 2) z^5 + [2k^2 + \lambda (k^2 + 1)(2n - 3)] z^3 - [k^2 + 1 - 2\lambda(n - 1)] z) \\ &\cdot (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3}) \\ &+ [k^2 \lambda z^6 + (k^2 - \lambda k^2 - \lambda) z^4 + (\lambda - k^2 - 1) z^2 + 1][A_1 + 3 A_2 z^2 + \ldots + (2n - 3) A_{n-1} z^{2n-4}] \\ &+ (B_1 + B_2 z^2)(1 + \lambda z^2)^n + C(1 + \lambda z^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom Grade $2n + 2$; sie enthält nur Glieder gerader Potenz, die Zahl derselben ist also $n + 2$; ebenso gross ist die Zahl der Coefficienten A_1, A_2, . . A_{n-1}, B_1, B_2, C. Man kann dieselben so wählen, dass die letzte Gleichung identisch erfüllt ist und hat zu ihrer Bestimmung $n + 2$ lineare Gleichungen, deren Auflösung bei gegebenen Werthen von k, λ, n ohne Schwierigkeit erfolgt.

11. Hiernach sind alle elliptischen Integrale auf drei Normalintegrale zurückgeführt, nämlich auf

$$\int\frac{dz}{\sqrt{R}},\qquad \int\frac{(1-k^2z^2)dz}{\sqrt{R}},\qquad \int\frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}},$$

Sie nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man z durch eine neue Variable φ ersetzt gemäss

$$z = \sin\varphi;$$

denn dann ist

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = d\varphi,$$

und die drei Integrale gehen über in

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi,\qquad \int\frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Grösse $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ wird gewöhnlich mit $\Delta(\varphi)$ oder, wenn es der Unterscheidung wegen nöthig ist, mit $\Delta(k,\varphi)$ bezeichnet.

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und z, bez. φ genommen, so bezeichnet man sie nach Legendre*) als die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung; k heisst der Modulus, die obere Grenze φ die Amplitude, λ der Parameter; man benutzt die Functionszeichen

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi,k),\qquad \int_0^\varphi\Delta(\varphi)d\varphi = E(\varphi,k),\qquad \int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \Pi_0(\varphi,k,\lambda).$$

---

12. Wir transformiren nun das Integral erster Art durch eine Substitution zweiten Grades; es wird dadurch ein Integral erster Art mit anderm Modul und anderer Amplitude hervorgehen. An diese Transformation anknüpfend, werden wir später brauchbare Methoden zur numerischen Berechnung elliptischer Integrale finden. Damit durch die Substitution

$$z = U:V,$$

wo U und V quadratische Functionen der neuen Variabeln ζ sind, die Transformation erzielt werde

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{A\,d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)}},$$

ist nach den Entwicklungen in No. 3 nöthig und ausreichend, dass von den vier quadratischen Faktoren des Produkts

$$(V-U)(V+U)(V-kU)(V+kU)$$

zwei die zweiten Potenzen linearer Functionen in ζ sind, während die andern beiden die vier Faktoren liefern

$$(1-\zeta)(1+\zeta)(1-\lambda\zeta)(1+\lambda\zeta).$$

Man überzeugt sich leicht, dass nur folgende Fälle wesentlich von einander verschieden sind:

$$1.\ \begin{cases} V-U = a(1-\zeta)(1-\lambda\zeta),\\ V+U = (1+\zeta)(1+\lambda\zeta),\\ V-kU = b(1+m\zeta)^2,\\ V+kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases} V-U = a(1-\zeta)(1-\lambda\zeta),\\ V-kU = (1+\zeta)(1+\lambda\zeta),\\ V+U = b(1+m\zeta)^2,\\ V+kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} V-U = a(1-\zeta^2),\\ V+U = 1-\lambda^2\zeta^2,\\ V-kU = b(1+m\zeta)^2,\\ V+kU = c(1+n\zeta)^2; \end{cases}\qquad 4.\ \begin{cases} V-U = a(1-\zeta^2),\\ V-kU = 1-\lambda^2\zeta^2,\\ V+U = b(1+m\zeta)^2,\\ V+kU = c(1+n\zeta)^2. \end{cases}$$

*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825.

Aus den Beziehungen zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen folgen Beziehungen zwischen den Grössen k, λ, a, b, c. Wir beschränken uns hier darauf, die aus 1. hervorgehenden Transformationsformeln aufzustellen.

13. Den Werthen

$$\zeta = 1,\quad -1,\quad \frac{1}{\lambda},\quad -\frac{1}{\lambda},$$

entsprechen $\qquad V = U,\quad -U,\quad U,\quad -U,$

wie die ersten beiden Gleichungen lehren. Wir bilden

$$\frac{V-kU}{V+U} = \frac{b(1+m\zeta)^2}{(1+\zeta)(1+\lambda\zeta)}$$

und ersetzen rechts ζ der Reihe nach durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U; dadurch entsteht

$$\frac{1-k}{2} = b\cdot\frac{(1+m)^2}{2(1+\lambda)},\qquad \frac{1-k}{2} = b\cdot\frac{\lambda\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)^2}{2(1+\lambda)}.$$

Hieraus ergiebt sich für m und λ die Gleichung

$$\lambda\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)^2 = (1+m)^2,$$

aus welcher folgt

$$m = \sqrt{\lambda}.$$

Ersetzen wir in gleicher Weise in dem Quotienten

$$\frac{V+kU}{V+U} = \frac{c(1+n\zeta)^2}{(1+\zeta)(1+\lambda\zeta)},$$

rechts ζ durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U, so erhalten wir

$$n = \sqrt{\lambda}.$$

Da m und n nicht gleich sein können, so wählen wir

$$m = -\sqrt{\lambda},\qquad n = \sqrt{\lambda},$$

wobei von nun an die Wurzel positiv gerechnet wird. Aus den Gleichungen No. 12, 1 folgt weiter, wenn für m und n die gefundenen Werthe benutzt werden,

$$1.\qquad \frac{V-kU}{V+kU} = \frac{b}{c}\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}\cdot\zeta}{1+\sqrt{\lambda}\cdot\zeta}\right)^2.$$

Ersetzen wir hier rechts ζ der Reihe nach durch 1 und -1, links V durch U und $-U$, so entstehen die Gleichungen

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{b}{c}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right)^2,$$

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{b}{c}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Hieraus folgt durch Multiplication

$$\frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Da in den vorigen Gleichungen beiderseits positive Werthe stehen, so haben wir $b = c$ zu nehmen. Hiernach ergiebt sich weiter

$$\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}};$$

daher ist

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{1+k}-\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}}.$$

Macht man den Nenner rational, so folgt

2. $\sqrt{\lambda} = \dfrac{1 - k'}{k}, \quad \lambda = \dfrac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$

Dividirt man in 1. links Zähler und Nenner durch z, so erhält man die Substitutionsgleichung

3. $$\frac{1 - kz}{1 + kz} = \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}\cdot\zeta}{1 + \sqrt{\lambda}\cdot\zeta}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich leicht mit Berücksichtigung von 2.

$$z = \frac{(1 + \lambda)\zeta}{1 + \lambda\zeta^2}, \quad dz = (1 + \lambda)\cdot\frac{1 - \lambda\zeta^2}{(1 + \lambda\zeta^2)^2}d\zeta,$$

4. $$\sqrt{1 - z^2} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}\cdot\sqrt{1 - \lambda^2\zeta^2}}{1 + \lambda\zeta^2}, \quad \sqrt{1 - k^2 z^2} = \frac{1 - \lambda\zeta^2}{1 + \lambda\zeta^2},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = (1 + \lambda)\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2\zeta^2)}}.$$

Der Grenze $z = 0$ entspricht $\zeta = 0$; es ist daher

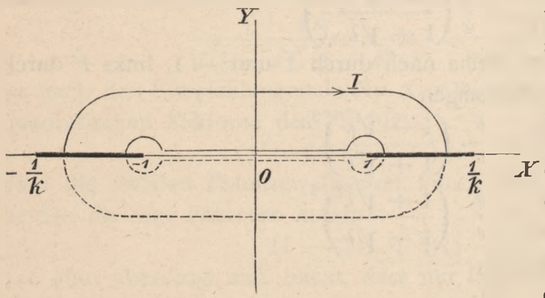
4. $$\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = (1 + \lambda)\int\limits_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2\zeta^2)}}.$$

Diese Transformation ist deswegen besonders verwendbar, weil auch im transformirten Integrale die untere Grenze Null ist.

14. Um die zweideutige irrationale Grösse

$$\sqrt{R} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

als eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche darzustellen, haben wir eine zweiblätterige RIEMANN'sche Fläche zu construiren, die vier Windungspunkte hat: $z = -1 : k, \; -1, \; +1, \; +1 : k$; entlang der Strecken von $-1 : k$ bis -1 und von $+1$ bis $+1 : k$ mögen die beiden Blätter verwachsen sein. Jeder Weg, der, auf das obere Blatt projicirt, eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine ungerade Anzahl Male umkreist, führt aus einem Blatte ins andere; wird hingegen eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine gerade Anzahl Male oder eine gerade Anzahl von Windungspunkten umkreist, so liegen Anfang und Ende des Weges in demselben Blatte.



(M. 562.)

Wir nehmen an, dass im Nullpunkte des oberen Blattes $\sqrt{R}$ den Werth $+1$ hat; für den des unteren Blattes ist alsdann $\sqrt{R} = -1$. Auf der realen Achse des oberen Blattes nimmt $\sqrt{R}$ von $z = 0$ bis $z = +1$ die Werthe von $+1$ bis 0, von $z = 0$ bis $z = -1$ ebenfalls die Werthe von $+1$ bis 0, und in den entsprechenden Punkten der realen Achse des unteren Blattes die entgegengesetzt gleichen Werthe an.

15. Wir untersuchen nun die Werthe, um welche das Integral erster und das zweiter Art sich ändern, wenn z einen Theil eines verschwindend kleinen Kreisbogens beschreibt, der einen Windungspunkt zum Centrum hat.

Ist z auf einem Kreise gelegen, der a zum Centrum und ρ zum Radius hat, so ist

$$z = a + \rho e^{i\varphi},$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, um den ρ gedreht werden muss, um aus der Richtung der positiven realen Achse in die Richtung az überzugehen.

Aus 1. ergiebt sich

2. $$dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi.$$

Ferner ist

3. $$\sqrt{(a - z)(b - z)(c - z)(d - z)} = i\sqrt{\rho e^{i\varphi}(b - a - \rho e^{i\varphi})(c - a - \rho e^{i\varphi})(d - a - \rho e^{i\varphi})}.$$

Daher ist

4. $$\frac{dz}{\sqrt{(a - z)(b - z)(c - z)(d - z)}} = \frac{\sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi}{\sqrt{(b - a - \rho e^{i\varphi})(c - a - \rho e^{i\varphi})(d - a - \rho e^{i\varphi})}},$$

5. $$\sqrt{(a - z)(b - z)(c - z)(d - z)}\,dz = -\rho^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\varphi}{2}}\sqrt{(b - a - \rho e^{i\varphi})\ldots}\,d\varphi.$$

Wird ρ verschwindend klein, so ist

$$lim\sqrt{(b - a - \rho e^{i\varphi})\ldots} = \sqrt{(b - a)(c - a)(d - a)}$$

Setzen wir a, b, c, d als endliche, von einander verschiedene Zahlen voraus, so ist dieser Grenzwerth weder unendlich gross, noch verschwindend klein. Integrirt man die Differentiale 4. und 5. unter der Voraussetzung eines verschwindend kleinen ρ zwischen den Grenzen φ_0 und φ_1, so erhält man

6. $$lim\sqrt{\rho}\cdot\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{1}{2}i\varphi}d\varphi, \quad \text{bez.} \quad -lim\sqrt{\rho^3}\cdot A\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{3}{2}i\varphi}d\varphi.$$

Hierin sind die Integrale endlich, die Faktoren $1 : A$ und A nicht unendlich, während die Grenzwerthe von $\sqrt{\rho}$ und $\sqrt{\rho^3}$ verschwinden. Dies ergiebt: Werden die Integrale

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad \text{und} \quad \int\Delta(\varphi)\,d\varphi$$

über Wege erstreckt, die einem einzigen Windungspunkte sich unendlich nahe anschmiegen, so haben beide den Werth Null.

16. Geht z auf der realen Achse im oberen Blatte von 0 bis $+1$, so erhält $F(k, \varphi)$ den Werth

1. $$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

wobei durch die Variable x der geradlinige Weg angedeutet ist. Das Differential wird an der oberen Grenze für $x = 1$ unendlich gross; man überzeugt sich aber leicht, dass trotzdem das Integral einen endlichen Werth hat.

Denn der Faktor $1 : \sqrt{1 - k^2x^2}$ hat innerhalb der Integralgrenzen für $x = 1$ seinen grössten Werth $1 : \sqrt{1 - k^2}$; daher ist

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ d. i. } < \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Das Integral 1. hat in der Theorie der elliptischen Integrale eine ähnliche Bedeutung wie bei den cyklometrischen Integralen die Zahl $\frac{1}{2}\pi$; es wird mit K bezeichnet, so dass man also hat

2. $$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

Umgeht man den Windungspunkt $+1$ in einem verschwindend kleinen Kreise, so ist der auf diesen Weg entfallende Zuwachs des Integrals F gleich Null. Geht man alsdann im unteren Blatte entlang der realen Achse bis zum unteren Nullpunkte zurück, so haben $\sqrt{R}$, sowie dz dabei entgegengesetzt gleiche Werthe wie in den darüber liegenden Punkten des oberen Blattes bei der Integration von 0 bis 1. Wird daher das Integral F im oberen Blatte entlang der realen Achse von 0 bis $+1$ und dann weiter im unteren von $+1$ bis 0 erstreckt, so hat es den Werth $2K$. In Punkten, die in demselben Blatte auf der realen Achse zwischen $+1$ und -1 gleich weit vom Nullpunkte entfernt sind, haben dz und $\sqrt{R}$ dieselben Werthe, wenn ein geschlossener Weg zurückgelegt wird, der $+1$ und -1 in unendlich kleinen Kreisen umgeht. Daher ist

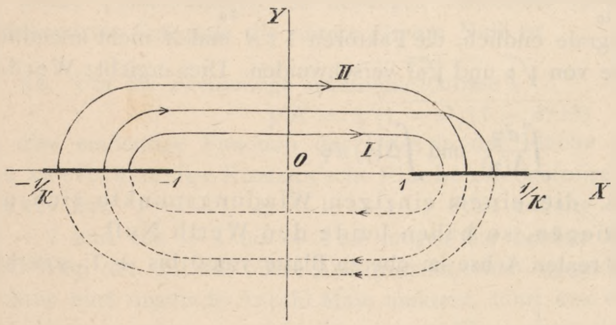
$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \begin{array}{l} 2K \text{ im oberen Blatte,}\\ -2K \text{ im unteren Blatte,}\end{array}$$

und das Integral über den ganzen beschriebenen Weg ist $4K$. Wir schliessen daher: Wird das Integral

$$F=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

über einen Weg (I, Fig. 563) erstreckt, der nur die beiden Windungspunkte -1 und $+1$ einfach umkreist, so hat es den Werth $4K$.

Ueber den geschlossenen Weg II erstreckt, hat daher F den Werth $8K$ u. s. w.



(M. 563.)

17. Befindet sich z auf der realen Achse im oberen Blatte in dem unendlich nahe vor $+1$ liegenden Punkte $1-\rho$, so ist, wenn im Radicanden Glieder zweiten Grades in ρ vernachlässigt werden, und die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$\sqrt{R}=\sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Geht z in einem verschwindend kleinen Halbkreise in der Richtung der abnehmenden Winkel um den Punkt $+1$ bis wieder auf die reale Achse, so durchläuft es die Werthe $1+\rho e^{i\varphi}$ von $\varphi=\pi$ bis $\varphi=0$; $\sqrt{R}$ erlangt den Endwerth $i\sqrt{2\rho(1-k^2)}$, ist also verschwindend klein positiv imaginär. Geht nun z auf der realen Achse weiter bis zu dem unendlich nahe vor $1:k$ liegenden Punkte $1:k-\rho$, so ist am Ende dieses Weges

$$\sqrt{R}=i\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)2k\rho}.$$

Wird z weiter auf einem verschwindenden Kreise um den Punkt $1:k$ geführt, so durchläuft es die Werthe

$$\frac{1}{k}+\rho e^{i\varphi} \text{ von } \varphi=\pi \text{ bis } \varphi=-\pi,$$

und am Ende ist

$$\sqrt{R}=-i\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\cdot 2k\rho}.$$

Auf dem weiteren Wege im oberen Blatte entlang der realen Achse bis zu dem dicht vor $+1$ liegenden Punkte $1+\rho e^{2i\pi}$ nimmt $\sqrt{R}$ anfangs zu und dann wieder ab und ist schliesslich

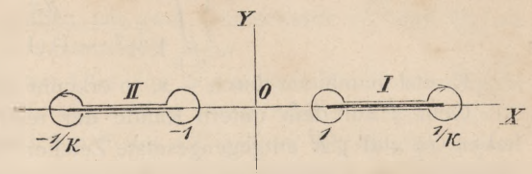
$$\sqrt{R}=-i\sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Durchläuft dann z in der Richtung abnehmender Winkel einen verschwindend

kleinen Halbkreis um den Punkt $+1$, so erlangt $\sqrt{R}$ wieder seinen Ausgangswerth

$$\sqrt{R}=\sqrt{2\rho(1-k^2)}.$$

Dieser Weg ist in Fig. 564 durch I veranschaulicht. Das Integral F über diesen Weg erstreckt besteht aus den beiden Integralen über die verschwindend kleinen Kreise und aus zwei geradlinigen Integralen. Die ersten beiden sind bekanntlich Null. Der geradlinige Theil entlang des oberen Randes der realen Achse liefert



(M. 564.)

$$\frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Substituirt man hier

$$k'^2=1-k^2,\quad x=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}},$$

so erhält man leicht

$$\frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}=-i\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}}.$$

Das letztere Integral, eine zweite charakteristische Constante in der Theorie der elliptischen Integrale erster Art, wird mit K' bezeichnet, es ist also

$$K'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Geht z auf dem unteren Rande der realen Achse von $1:k$ bis 1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am andern Rande der realen Achse gegenüberliegenden Punkten; daher hat das Integral von $1:k$ bis 1 denselben Werth, wie entlang des oberen Randes von 1 bis $1:k$. Das ganze in der angegebenen Richtung über den Weg Fig. 564, I erstreckte Integral F hat also den Betrag

$$-2iK'.$$

Wir überzeugen uns leicht, dass das Integral entlang des Weges, der im unteren Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, den entgegengesetzt gleichen Weg hat.

In den Punkten der realen Achse, die unendlich nahe bei -1 in der Richtung nach $-1:k$ zu auf dem oberen bez. unteren Rande der realen Achse liegen, hat $\sqrt{R}$ die Werthe*)

$$\sqrt{R}=i\sqrt{2\rho(1-k^2)},\quad \text{bez.} = -i\sqrt{2\rho(1-k^2)}$$

für die Punkte der realen Achse, die unmittelbar vor $-1:k$, nach -1 zu, auf dem oberen bez. unteren Rande liegen, ist

$$\sqrt{R}=i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2}-1\right)} \text{ bez. } -i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2}-1\right)}.$$

Das entlang des oberen Randes der realen Achse von -1 bis $-1:k$ erstreckte Integral F hat somit den Werth

*) wenn im Radicanden Glieder zweiten Grades in ρ vernachlässigt werden.

$$\frac{1}{i}\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

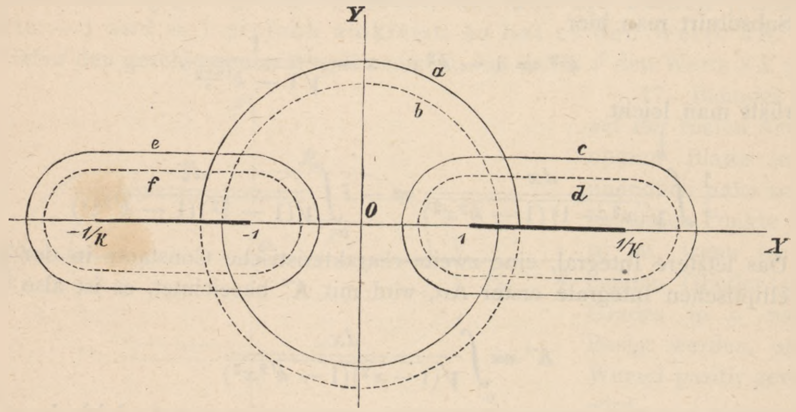
Ersetzt man hier x durch $-x$, so erkennt man, dass dieser Werth gleich iK' ist.

Geht z auf dem untern Rande der realen Achse von $-1:k$ bis -1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am obern Rande gegenüberliegenden Punkten; also ist auch das Integral F über diesen Weg erstreckt gleich iK'. Verbindet man diese beiden Integrationsstrecken durch verschwindende Kreise um die Punkte -1 und $-1:k$, so ist für diese Integrationswege $F=0$, mithin ist das Integral über den Weg II (Fig. 564) gleich

$$2iK',$$

das über den im zweiten Blatte darunter liegenden Weg ist daher $-2iK'$.

18. Wir erkennen leicht, dass jeder Weg, der vom Nullpunkte auf der Riemann'schen Fläche bis zu einem gegebenen Endpunkte irgendwie führt, auf

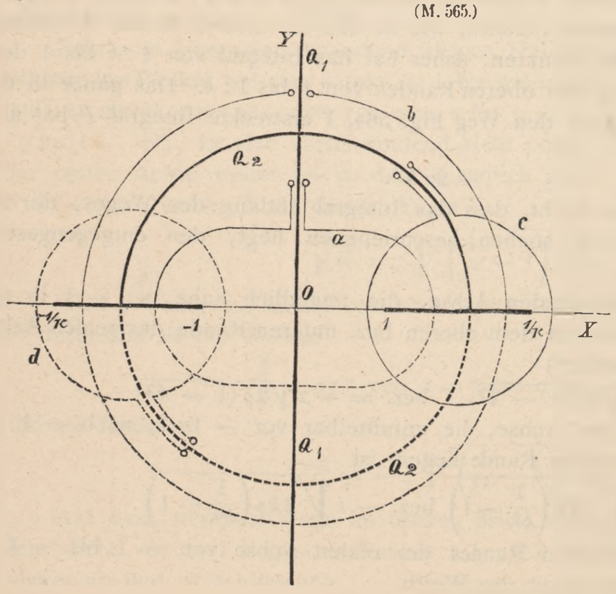


(M. 565.)

einen Weg reducirt werden kann, der keinen Ausnahmepunkt umkreist und auf Wege von der Art a, b, c, d, e, f, im positiven oder negativen Sinne durchlaufen, und auf einmalige oder zweimalige Umkreisungen der einzelnen Windungspunkte. Hieraus folgt: Das Integral erster Art

$$\int\limits_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ist unendlich vieldeutig und hat zwei Periodicitätsmoduln, nämlich den realen $4K$ und den imaginären $2iK'$.



(M. 566.)

Um das elliptische Integral erster Art als eindeutige Function des Ortes der Riemann'schen Fläche darzustellen, haben wir zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 zu ziehen, die wir so anordnen, wie in vorstehender Figur.

Um von einem Punkte am rechten Ufer von Q_1 zu dem am linken gegenüberliegenden zu kommen, haben wir einen Weg wie a oder b zurückzulegen; daher ist für jeden Punkt des linken Ufers F um $4K$ grösser als für den gegenüberliegenden des rechten Ufers. Von einem Punkte des innern Ufers von Q_2 gelangt man zu einem Punkte des äussern Ufers auf einem Wege c oder d; mithin ist F für einen Punkt des innern Ufers um $2iK'$ kleiner, als für den am andern Ufer gegenüberliegenden Punkt.

Für jeden Punkt der Fläche ist das Integral eindeutig bestimmt, sobald es in einem Punkte einen gegebenen (nicht willkürlichen) Werth hat, sobald z. B. festgestellt ist, dass es im obern Blatte im Nullpunkte rechts vom Querschnitte den Werth

$$m\cdot 4K+n\cdot 2K'i$$

haben soll, wo m und n gegebene ganze positive oder negative Zahlen sind.

19. Im Anschlusse an No. 15, 16 und 17 ergeben sich die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Art.

Wird das Integral $\int\sqrt{R}\,dz$, $R=\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}$ im obern Blatte entlang der realen Achse von 0 bis $+1$ erstreckt, so hat es den Werth

$$\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx,$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Dies ist eine charakteristische Constante für die Integrale zweiter Art; sie wird mit E bezeichnet, so dass also

$$E=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx.$$

Geht z in einem unendlich kleinen Kreise dann um den Punkt $+1$ bis ins untere Blatt, so ist für diesen Theil des Weges das Integral $\int\sqrt{R}\,dz=0$.

In den Punkten der realen Achse des untern Blattes haben $\sqrt{R}$ und dz entgegengesetzt gleiche Werthe wie in den darüber liegenden Punkten des obern, also ist für diesen Weg im untern Blatte

$$\int\limits_1^0\sqrt{R}\,dz=E.$$

In Punkten der realen Achse, die in demselben Blatte und gleichweit vom Nullpunkte gelegen sind, hat $\sqrt{R}$ denselben Werth. Integrirt man daher im untern Blatte in der bisherigen Richtung weiter bis zum Punkte -1, umgeht denselben in einem verschwindenden Kreise, der ins obere Blatt führt, und kehrt hier entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück, so hat für den ganzen in der angegebenen Richtung beschriebenen Weg das Integral zweiter Art den Werth $4E$.

Wird das Integral zweiter Art über den Weg I in Fig. 564 erstreckt, so ist es doppelt so gross wie das im obern Blatte genommene Integral

$$\int\limits_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{R}\,dx.$$

Wir substituiren

$$x=\frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2\xi^2};$$

den Grenzen $x = 1$ und $x = 1:k$ entsprechen dann die Grenzen $\xi = 1$ und $\xi = 0$. Ferner findet man

$$1 - x^2 = \frac{1}{k^2}(k^2 - 1 + k'^2\xi^2) = -\frac{k'^2}{k^2}(1 - \xi^2), \quad 1 - k^2x^2 = k'^2\xi^2,$$

$$dx = -\frac{k'^2}{k^2} \cdot \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - k'^2\xi^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = i\int_0^1 \frac{-k'^2\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}}$$

$$= i\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi - i\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}}.$$

Das erste Integral rechts bezeichnen wir mit E', es ist also

$$E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2x^2}{1 - x^2}}\, dx.$$

Daher ist

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = i(E' - K').$$

Das Integral zweiter Art, erstreckt über den Weg I oder II Fig. 564, hat somit den Betrag $i \cdot 2(E' - K')$. Wir schliessen daher: Das elliptische Integral zweiter Art ist unendlich vieldeutig; es hat den realen Periodicitätsmodul $4E$ und den imaginären $i \cdot 2(E' - K')$.

Führen wir die Riemann'sche Fläche durch dieselben Querschnitte, wie bei Integralen erster Art, auf eine einfach zusammenhängende Fläche zurück, so ist das Integral zweiter Art eine eindeutige Function des Ortes der Fläche. Für einen Punkt auf dem rechten Ufer von Q_1 ist das Integral um $4E$ kleiner als für den gegenüberliegenden Punkt des linken Ufers; und für einen Punkt des innern Ufers von Q_2 ist es um $i \cdot 2(E' - K')$ grösser als für den gegenüberliegenden Punkt des äussern Ufers.

Wir werden später sehen, dass sich jedes Integral zweiter Art durch ein Multiplum eines Integrals erster Art mit derselben obern Grenze, vermehrt um eine periodische transcendente Function dieses Integrals ausdrücken lässt; das Integral dritter Art wird in ähnlicher Weise dargestellt werden.

Aus diesen Darstellungen — bis zu denen wir uns vorwiegend mit den Integralen erster Art beschäftigen werden — folgen dann ohne Weiteres die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter und dritter Art.

§ 17. Das Additionstheorem für elliptische Integrale. Numerische Berechnung von Integralen erster und zweiter Art.

1. Euler hat zuerst nachgewiesen, welche von Differentialen freie Bedingungsgleichung zwischen z und ζ bestehen muss, wenn die elliptischen Integrale erster Art

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}} \text{ und } \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{A\zeta^4 + B\zeta^3 + C\zeta^2 + D\zeta + E}}$$

eine gegebene Summe G haben sollen. Insofern man die Zahl G als ein elliptisches Integral

$$G = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{A\mathfrak{z}^4 + B\mathfrak{z}^3 + C\mathfrak{z}^2 + D\mathfrak{z} + E}}$$

ansehen kann, lehrt die Entdeckung Euler's, die Summe zweier elliptischen Integrale erster Art mit gleichem Modul in eins zu verwandeln. Angewendet auf Normalintegrale erster Art lautet dieser Additionssatz: Es ist

$$1. \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} + \int_0^\zeta \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}},$$

wenn

$$\mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2}.$$

Beweis. Wir setzen zunächst $\mathfrak{z}$ als constant voraus; zwischen unendlich kleinen Aenderungen der Veränderlichen z und ζ besteht dann die Differentialgleichung

$$2. \quad \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} = 0,$$

aus welcher wir die folgende ableiten

$$3. \quad \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2}\, dz + \frac{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2}\, d\zeta = 0.$$

Beide Glieder links integriren wir theilweis; das erste Glied ergiebt

$$4. \quad z\frac{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2} - \int \frac{P d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} - \int Q\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}\, dz,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$P = \frac{z\zeta[2k^2(z^2 + \zeta^2) - (1 + k^2)(1 + k^2z^2\zeta^2)]}{(1 - k^2z^2\zeta^2)^2}, \quad Q = \frac{2k^2z^2\zeta^2}{(1 - k^2z^2\zeta^2)^2}.$$

Vertauscht man in 4. z mit ζ, so erhält man das Ergebniss der theilweisen Integration des zweiten Theils der linken Seite in 3.; dabei ändern P und Q ihre Werthe nicht; daher folgt aus 3. schliesslich

$$5. \quad \begin{aligned} &\frac{z\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2} \\ &- \int P\left[\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}\right] \\ &- \int Q\left[\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}\, dz + \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}\, d\zeta\right] = c, \end{aligned}$$

wobei c eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Zufolge der Differentialgleichung 2. verschwinden die Integrale in 5. und es ergiebt sich daher die Gleichung

$$6. \quad \frac{z\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}{1 - k^2z^2\zeta^2} = c.$$

Setzt man in 1. $\zeta = 0$, so ergiebt sich $z = \mathfrak{z}$; führt man dieselbe Substitution in 6. aus, so folgt $z = c$; daher ist $c = \mathfrak{z}$, w. z. b. w.

Substituirt man $z = \sin\varphi$, $\zeta = \sin\psi$, $\mathfrak{z} = \sin\sigma$, so nimmt das Additionstheorem die Gestalt an: Es ist

$$7. \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^\sigma \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Für $\zeta = z$ ergiebt sich insbesondere: Es ist

8. $$\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\delta \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wenn

$$\delta = \frac{2z\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^4}.$$

Hat in der durch die beiden angegebenen Querschnitte auf einfachen Zusammenhang reducirten RIEMANN'schen Fläche das Integral erster Art für den Nullpunkt des obern Blattes den Werth Null, so ist

$$\int\limits_0^{-\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Ersetzt man in 7. ψ durch $-\psi$, so folgt daher: Es ist

9. $$\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\limits_0^{\sigma}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

2. Von der Gleichung ausgehend

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

kann man $\cos\sigma$ und $\Delta(\sigma)$ als rationale Functionen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ erhalten. Wir wählen zu dieser Ableitung folgenden Weg*): Aus der Gleichung

1. $$\sin\sigma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

folgt bekanntlich

2. $$\cos\sigma = \pm(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Das Vorzeichen in 2. wird bestimmt, indem man angiebt, ob dem Werthe $\beta = 0$, für welchen $\sin\sigma = \sin\alpha$, der Werth $\cos\sigma = +\cos\alpha$, oder $\cos\sigma = -\cos\alpha$ entsprechen soll; entscheiden wir uns für das erstere, so gilt in 2. das obere Vorzeichen. Ferner bemerken wir, dass mit 1. und 2. die Gleichungen gelten

3. $$\cos\beta = \cos\sigma\cos\alpha + \sin\sigma\sin\alpha,$$

4. $$\cos\alpha = \cos\sigma\cos\beta + \sin\sigma\sin\beta.$$

Hieraus können wir neue Formeln ableiten, indem wir $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ durch ganz willkürlich gewählte Werthe ersetzen; für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ haben wir dann Werthe zu nehmen, welche den Bedingungen genügen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

Wir ersetzen

$$\sin\alpha \text{ durch } \frac{\cos\varphi}{n}, \quad \sin\beta \text{ durch } \frac{\cos\psi}{n},$$

wobei

$$n = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

und haben somit zu ersetzen

$$\cos\alpha \text{ durch } \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{n^2}} = \pm\frac{\sin\varphi\Delta(\psi)}{n},$$

*) Vergl. SCHELLBACH, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin 1864, pag. 109.

$$\cos\beta \text{ durch } \pm\frac{\sin\psi\Delta(\varphi)}{n}.$$

Wir wählen in den letzten beiden Substitutionen die oberen Vorzeichen und erhalten aus 1. und 2.

5. $$\sin\sigma = \frac{\cos\varphi\sin\psi\Delta(\varphi) + \cos\psi\sin\varphi\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

6. $$\cos\sigma = \pm\frac{\sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - \cos\varphi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus der Gleichung 5 folgen also 6., sowie die durch die gleichen Substitutionen aus 3. und 4. hervorgehenden Gleichungen.

Sollen σ, φ, ψ die im Additionstheorem auftretenden Grössen sein, so entspricht dem Werthe $\psi = 0$ der Werth $\sigma = \varphi$; daher haben wir in 6. das untere Zeichen zu wählen und erhalten somit

7. $$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus den Gleichungen 3. und 4. erhalten wir

8. $$\cos\psi = \sin\varphi\sin\sigma\Delta(\psi) + \cos\varphi\cos\sigma,$$

9. $$\cos\varphi = \sin\psi\sin\sigma\Delta(\varphi) + \cos\psi\cos\sigma.$$

Aus allen diesen Gleichungen gehen neue Gleichungen hervor, wenn σ, φ, ψ der Reihe nach durch φ, σ, $-\psi$ ersetzt werden. Hierdurch entsteht aus 9.

10. $$\cos\sigma = -\sin\psi\sin\varphi\Delta(\sigma) + \cos\psi\cos\varphi.$$

Berechnen wir hieraus $\Delta(\sigma)$ und benutzen dabei 7., so erhalten wir

11. $$\Delta(\sigma) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Aus 5. und 7. folgt noch die für die numerische Berechnung von σ brauchbare Gleichung

12. $$\operatorname{tang}\sigma = \frac{\operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi) - \operatorname{tang}\varphi\Delta(\psi)}{1 - \operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\varphi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

Hiernach ist $\operatorname{tang}\sigma = \operatorname{tang}(\mu + \nu)$, wenn

$$\operatorname{tang}\mu = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\psi, \quad \operatorname{tang}\nu = \Delta(\psi)\operatorname{tang}\varphi.$$

3. Es liegt nahe zu fragen, ob unter der Voraussetzung, dass φ, ψ und σ durch die in No. 1. und 2. entwickelten Gleichungen verbunden sind, das Normalintegral zweiter Art

$$E(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

mit der Summe

$$E(\varphi) + E(\psi) = \int\limits_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi + \int\limits_0^\psi \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

in einfacher Weise zusammenhängt. Wir setzen*)

1. $$E(\varphi) + E(\psi) = S,$$

und nehmen σ als gegeben, φ und ψ dagegen als veränderlich an. Durch Differentiation folgt aus 1.

2. $$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = dS.$$

Fügt man hierzu die unter der für σ gemachten Annahme geltende von No. 1, 2 nicht verschiedene Gleichung

3. $$\Delta(\psi)\,d\varphi + \Delta(\varphi)\,d\psi = 0,$$

so erhält man

4. $$[\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)](d\varphi + d\psi) = dS.$$

*) SCHLÖMILCH, Compendium d. höh. Analysis, 2. Band, 2. Aufl. pag. 333. Braunschweig 1874.

Setzt man den Werth für $\cos\sigma$ aus No. 2, 10 in 8. und 9. ein, so erhält man leicht

5.
$$\Delta(\varphi) = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\sigma) + \cos\varphi\sin\psi}{\sin\sigma},$$
$$\Delta(\psi) = \frac{\sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\sigma) + \cos\psi\sin\varphi}{\sin\sigma},$$

Hieraus folgt

6.
$$\Delta(\varphi) \pm \Delta(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) \pm 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi \pm \psi),$$

wobei entweder die oberen oder die unteren Zeichen gelten.

Setzt man diesen Werth für $\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)$ in 4. ein, so entsteht
$$-\frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,d\cos(\varphi + \psi) = dS,$$
und hieraus durch Integration und in Rücksicht auf 1.
$$E(\varphi) + E(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,[C - \cos(\varphi + \psi)].$$

Für $\psi = 0$ wird $\varphi = \sigma$; wählt man $E(\psi) = 0$, so ist
$$E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,(C - \cos\sigma).$$

Durch Subtraction von der vorhergehenden Gleichung ergiebt sich
$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\varphi).$$

Nach No. 2, 10. ist
$$\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma),$$
und daher
$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{1 - \Delta^2(\sigma)}{\sin\sigma}\cdot\sin\varphi\sin\psi.$$

Ersetzt man hier $\Delta^2(\sigma)$ durch $1 - k^2\sin^2\sigma$, so folgt schliesslich

7.
$$E(\varphi) + E(\psi) = E(\sigma) + k^2\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi.$$

Dieser Satz wird als das **Additionstheorem für elliptische Integrale zweiter Art** bezeichnet.

Es ist selbstverständlich, dass man τ so bestimmen kann, dass der Gleichung genügt wird
$$E(\varphi) + E(\psi) = E(\tau);$$
dann würde aber $\sin\tau$ sich nicht, wie $\sin\sigma$, rational durch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ ausdrücken lassen.

4. Aehnlich wie bei Integralen zweiter Art verfahren wir bei den Integralen dritter Art
$$\Pi_0(h, k, \varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}.$$

Wir setzen

1.
$$\Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = S$$

und nehmen wieder σ als gegeben, φ und ψ als veränderlich an.

Durch Differentiation folgt aus 1.
$$\frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{(\Delta + h\sin^2\psi)\,\Delta(\psi)} = dS.$$

Da nun

2.
$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0,$$

so folgt

3.
$$dS = \left(\frac{1}{1 + h\sin^2\varphi} - \frac{1}{1 + h\sin^2\psi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$
$$= \frac{h(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Aus No. 3, 7 folgt durch Differentiation
$$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = k^2\sin\sigma\,d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Führt man hier $\Delta(\psi)$ aus 2. ein, so entsteht
$$(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \sin\sigma\,d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Dies in 3. eingesetzt, ergiebt
$$dS = \frac{h\sin\sigma}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)}\,d(\sin\varphi\sin\psi).$$

Setzen wir
$$\sin\varphi\sin\psi = q, \quad \sin^2\varphi + \sin^2\psi = p,$$
so wird
$$dS = \frac{h\sin\sigma}{1 + hp + h^2q^2}\,dq.$$

Um p durch q auszudrücken, gehen wir von der Gleichung aus
$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma)$$
und erhalten
$$[\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi = (1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi)$$
$$= 1 - p + q^2.$$

Daher ist
$$p = 1 + q^2 - [\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2$$
$$= \sin^2\sigma - 2\cos\sigma\,\Delta(\sigma)\cdot q + k^2\sin^2\sigma\cdot q^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung
$$A = 1 + h\sin^2\sigma, \quad B = h\cos\sigma\,\Delta(\sigma), \quad C = hk^2\sin^2\sigma + h^2,$$
so wird
$$dS = \frac{h\sin\sigma\,dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Daher ist schliesslich
$$S = h\sin\sigma\int\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const.$$

Die Integrationsconstante wird bestimmt, indem wir $\psi = 0$ setzen; alsdann wird $q = 0$, $\varphi = \sigma$, $S = \Pi_0(h, k, \sigma)$, und es ist daher
$$\Pi_0(\sigma) = h\sin\sigma\int_{(q=0)}\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const,$$
folglich
$$S = \Pi_0(\sigma) + h\sin\sigma\int_0^q\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Wird dies in 1. eingeführt, so entsteht schliesslich
$$\Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = \Pi_0(\sigma) + h\sin\sigma\int_0^q\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2},$$

Sind also die Winkel φ, ψ, σ durch die vom Parameter unabhängige Gleichung verbunden
$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$
so wird durch das Integral $\Pi_0(h, k, \sigma)$ die Summe $\Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi)$

bis auf ein Glied dargestellt, welches das Integral einer $sin\sigma$, $cos\sigma$, und $\Delta(\sigma)$ rational enthaltenden algebraischen Function ist.

Dies ist das Additiontheorem für LEGENDRE's Normalintegrale dritter Art.

---

5. Setzen wir in § 16 No. 12 und 13 $z = sin\varphi$, $\zeta = sin\psi$, so entsteht

1. $$F(k, \varphi) = (1 + \lambda) F(\lambda, \psi),$$

wenn $$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \qquad sin\varphi = \frac{(1 + \lambda) sin\psi}{1 + \lambda sin^2\psi},$$

$$cos\varphi = \frac{cos\varphi \cdot \Delta(\lambda, \psi)}{1 + \lambda sin^2\psi}, \qquad \Delta(k, \varphi) = \frac{1 - \lambda sin^2\psi}{1 + \lambda sin^2\psi}.$$

Das Integral $F(\lambda, \psi)$ transformiren wir weiter nach No. 1, 8. Ersetzen wir dort z durch $sin\psi$, $\mathfrak{z}$ durch $sin\varphi_1$, k durch λ, so erhalten wir

2. $$F(\lambda, \psi) = \tfrac{1}{2} F(\lambda, \varphi_1)$$

wenn $$sin\varphi_1 = \frac{2 sin\psi\, cos\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2 sin^4\psi}.$$

Aus 1. folgt

$$\frac{cos\varphi\, sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \frac{(1 + \lambda) cos\psi\, sin\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2 sin^4\psi}.$$

Daher ist

3. $$sin\varphi_1 = \frac{(1 + k') cos\varphi\, sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Hieraus findet sich leicht

4. $$cos\varphi_1 = \frac{cos^2\varphi - k' sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \qquad \Delta(\lambda, \varphi_1) = \frac{cos^2\varphi + k' sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Setzt man in 4. $cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + cos 2\varphi)$, $sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - cos 2\varphi)$, so erhält man

5. $$cos\varphi_1 = \frac{1 - k' + (1 + k') cos 2\varphi}{2\Delta(k, \varphi)} = \frac{1 + k'}{2} \cdot \frac{\lambda + cos 2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}.$$

Aus 3. und 5. folgt nun

6. $$tang\varphi_1 = \frac{sin 2\varphi}{\lambda + cos 2\varphi},$$

und hieraus

7. $$sin(2\varphi - \varphi_1) = \lambda sin\varphi_1.$$

Diese Gleichung ist brauchbar zur Berechnung von φ, wenn φ_1 gegeben ist. Will man φ_1 aus φ finden, so kann man statt 3. oder 4. bequemere Formeln haben, indem man aus 3. und 4. durch Division bildet

$$tang\varphi_1 = \frac{(1 + k') tang\varphi}{1 - k' tang^2\varphi};$$

mit Hülfe dieses Werthes erhält man leicht

8. $$tang(\varphi_1 - \varphi) = k' tang\varphi.$$

Aus 1. 2. und 8. hat man daher die Transformation

9. $$F(k, \varphi) = \frac{1 + \lambda}{2} F(\lambda, \varphi_1) = \frac{1}{1 + k'} F(\lambda, \varphi_1),$$

wenn $$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad tang(\varphi_1 - \varphi) = k' tang\varphi.$$

Um die reciproke Transformation zu erhalten, berechnen wir k' aus

$$\lambda = (1 - k')(1 + k'),$$

und erhalten

10. $$k' = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad k = \sqrt{1 - k'^2} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda},$$

und vertauschen in 1., 2., 7. und 10. die Bezeichnungen φ, φ_1, k, λ der Reihe nach mit φ_1, φ, λ, k. Dadurch erhalten wir

11. $$F(k, \varphi) = \frac{2}{1 + k} F(\lambda, \varphi_1),$$

wenn $$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}, \quad sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\, sin\varphi.$$

Beide Transformationen, 9. und 11., sind für die numerische Berechnung von Integralen erster Art sehr gut zu gebrauchen*).

6. Bezüglich der letzten Transformation bemerken wir zunächst, dass $(1 + k) : 2 < 1$, also $\lambda > \sqrt{k}$ und um so mehr also, da k echt gebrochen ist,

$$\lambda > k;$$

ferner sieht man sofort, dass

$$\varphi_1 < \varphi.$$

Durch diese Transformation wird also der Modul vergrössert und die Amplitude verkleinert. Wenden wir diese Transformation wiederholt an, berechnen also eine Reihe λ, λ_2, λ_3 . . . von Moduln

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1 + \lambda_2}, \; . \; . \; \lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1 + \lambda_{n-1}}$$

und die zugehörigen Amplituden aus

$$sin(2\varphi_1 - \varphi) = k sin\varphi, \quad sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda sin\varphi_1, \quad sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \lambda_2 sin\varphi_1,$$
$$. \; . \; . \; . \; sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} sin\varphi_{n-1},$$

so fragt es sich, gegen welche Grenze diese zunehmenden Moduln und die abnehmenden Amplituden convergiren, wenn n unendlich wächst. Aus

$$\lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1 + \lambda_{n-1}}$$

folgt $$1 - \lambda_n = \frac{(1 - \sqrt{\lambda_{n-1}})^2}{1 + \lambda_{n-1}}.$$

Da nun $\sqrt{\lambda_{n-1}} > \lambda_{n-1} > k$, so folgt

$$1 - \lambda_n < \frac{(1 - \lambda_{n-1})^2}{1 + k}.$$

Wendet man dies wiederholt an, so erhält man

$$1 - \lambda < \frac{(1 - k)^2}{1 + k}, \quad 1 - \lambda_1 < \frac{(1 - \lambda)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^4}{(1 + k)^3},$$

$$1 - \lambda_3 < \frac{(1 - \lambda_2)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^8}{(1 + k)^7}, \quad 1 - \lambda_4 < \frac{(1 - \lambda_3)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^{16}}{(1 + k)^{15}}$$

$$. \; . \; . \; . \; , \quad 1 - \lambda_n < \frac{(1 - k)^{2^n}}{(1 + k)^{2^n - 1}}.$$

Hieraus folgt, dass sich $1 - \lambda_n$ der Grenze Null nähert, und zwar sehr rasch, wenn k nicht zu klein ist; also ist

$$lim \lambda_n = 1.$$

Der Grenzwerth von φ_n ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} sin\varphi_{n-1}$$

im Verlaufe der Rechnung von selbst; wird derselbe mit Φ bezeichnet, so kommt man schliesslich auf das Integral

---

*) Die erstere heisst nach ihrem Erfinder LANDEN'sche Substitution. Philosophical Transactions 1775.

$$F(1, \Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und hat daher

$$F(k, \varphi) = lim\left(\frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+\lambda} \cdot \frac{2}{1+\lambda_2} \cdot \frac{2}{1+\lambda_3} \cdot \ldots\right) l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da $2 : (1 + \lambda_n) = \lambda_{n+1} : \sqrt{\lambda_n}$, so kann man hierfür auch setzen

$$F(k, \varphi) = \frac{lim \sqrt{\lambda \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots}}{\sqrt{k}} \cdot l\,tang\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

7. Die Transformation No. 5, 9 gestaltet sich besonders einfach, wenn sie auf das Integral angewendet wird

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \varphi\right).$$

Alsdann ist

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad k' = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{1 + k'} = \frac{a}{a + b}, \quad \lambda = \frac{a - b}{a + b},$$

$$tang(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} tang\varphi.$$

Da nun

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin^2\varphi}} = \frac{a+b}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2\varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2\varphi}},$$

so ergiebt sich aus No. 5, 9 die Transformation

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\varphi + b_1^2 \sin^2\varphi}},$$

wobei $\quad a_1 = \frac{a + b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad tang(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} tang\varphi.$

Wendet man diese Transformation wiederholt an, so hat man die Grössen zu berechnen

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{2}(a + b), & b_1 &= \sqrt{ab}; & tang(\varphi_1 - \varphi) &= \frac{b}{a} tang\varphi; \\
a_2 &= \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1}; & tang(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{b_1}{a_1} tang\varphi_1; \\
a_3 &= \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2), & b_3 &= \sqrt{a_2 b_2}; & tang(\varphi_3 - \varphi_2) &= \frac{b_2}{a_2} tang\varphi_2; \\
a_4 &= \tfrac{1}{2}(a_3 + b_3), & b_4 &= \sqrt{a_3 b_3}; & tang(\varphi_4 - \varphi_3) &= \frac{b_3}{a_3} tang\varphi_3;
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Bekanntlich ist

$$a_n - b_n < \tfrac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1});$$

daher hat man

$$\begin{aligned}
a_1 - b_1 &< \tfrac{1}{2}(a - b), \\
a_2 - b_2 &< \tfrac{1}{2}(a_1 - b_1) < \tfrac{1}{4}(a - b) \\
a_3 - b_3 &< \tfrac{1}{2}(a_2 - b_2) < \tfrac{1}{8}(a - b) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n - b_n &< \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) < \frac{1}{2^n}(a - b).
\end{aligned}$$

Wächst n unendlich, so ist daher

$$lim\,(a_n - b_n) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Zahlen a_n und b_n sich einer gemeinsamen Grenze c nähern; diese wird nach GAUSS*) als das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b bezeichnet.

Wenn a_r von b_r innerhalb der angenommenen Genauigkeitsgrenzen nicht mehr von einander (und von c) zu unterscheiden sind, so hat φ_r eine bestimmte, durch die Rechnung sich ergebende Grenze Φ erreicht, und es ist

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r} \cdot \Phi.$$

8. Auch durch das Additionstheorem allein, ohne Combination mit einer quadratischen Transformation, kann man ein Normalintegral erster Art, und auf demselben Wege eins zweiter Art berechnen. Ist

1. $$\sin\varphi = \frac{2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin^4\varphi_1},$$

so ist bekanntlich

2. $$F(k, \varphi) = 2 F(k, \varphi_1)$$

und nach dem Additionstheorem für Integrale zweiter Art

3. $$E(k, \varphi) = 2 E(k, \varphi) - k^2 \sin\varphi \sin^2\varphi_1.$$

Statt der Gleichung 1. kann zur Bestimmung des Winkels φ_1 durch den Winkel φ passender die Gleichung benutzt werden, die aus No. 2, 10 folgt, wenn darin φ_1 für φ, und ψ und φ für σ gesetzt wird:

$$\cos\varphi = \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1 \Delta(\varphi),$$

woraus sofort folgt

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \Delta(\varphi)}}.$$

Berechnet man einen Hülfswinkel γ durch die Gleichung

$$\sin\gamma = k \sin\varphi,$$

so ist $\Delta(\varphi) = \cos\gamma$, und

$$\sin\varphi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Berechnet man nun eine Reihe von Winkeln nach den Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\gamma, & \sin\gamma_1 &= k \sin\varphi_1; \\
\sin\varphi_2 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_1 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_1, & \sin\gamma_2 &= k \sin\varphi_2; \\
\sin\varphi_3 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_2 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_2, & \sin\gamma_3 &= k \sin\varphi_2; \\
\sin\varphi_4 &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_3 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_3, & \sin\gamma_4 &= k \sin\varphi_4; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sin\varphi_r &= \sin\tfrac{1}{2}\varphi_{r-1} : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_{r-1},
\end{aligned}$$

so ist

$$F(k, \varphi) = 2^r F(k, \varphi_r)$$

$$E(k, \varphi) = 2^r E(k, \varphi_r)$$

$$- (\sin\varphi \sin^2\gamma_1 + 2 \sin\varphi_1 \sin^2\gamma_2 + 2^2 \sin\varphi_2 \sin^2\gamma_3 + \ldots + 2^{r-1} \sin\varphi_{r-1} \sin^2\gamma_r).$$

Setzt man die Berechnung so weit fort, bis höhere, als die fünfte Potenz von φ vernachlässigt werden können, so hat man zu setzen, wenn vorübergehend φ_r durch φ ersetzt wird:

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1 + k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 + \frac{3k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4,$$

$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 - \frac{k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4;$$

*) GAUSS, Sämmtliche Werke, herausgeg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 3, pag. 361. 1866.

also
$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = 1 + \frac{k^2}{2}\varphi^2 - \left(\frac{k^2}{6} - \frac{3k^4}{8}\right)\varphi^4 ,$$
$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\varphi^2 + \left(\frac{k^2}{6} - \frac{k^4}{8}\right)\varphi^4 .$$
Daher ist
$$F(k, \varphi_r) = \varphi_r + \frac{k^2}{6}\varphi_r{}^3 - \frac{k^2(4 - 9k^2)}{120}\varphi_r{}^5 ,$$
$$E(k, \varphi_r) = \varphi_r - \frac{k^2}{6}k_r{}^3 + \frac{k^2(4 - 3k^2)}{120}k_r{}^5 .$$
Für hinlänglich kleine Werthe von k können diese Werthe selbst als erste Annäherungen für $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ benutzt werden, indem man φ^r durch φ ersetzt.

Führt man diese Rechnungen mit fünfstelligen Logarithmen für die Zahlenwerthe durch
$$k = 0{,}93270 , \quad \varphi = 80^\circ 0',00 ,$$
so erhält man
$$\begin{array}{llll}
\varphi & = 80^\circ\ 0',0 & \gamma & = 67^\circ 44',0 \\
\varphi_1 & = 50^\circ 43',6 & \gamma_1 & = 46^\circ 40',4 \\
\varphi_2 & = 27^\circ 48',5 & \gamma_2 & = 26^\circ\ 0',1 \\
\varphi_3 & = 14^\circ 16',7 & \gamma_3 & = 13^\circ 24',0 \\
\varphi_4 & = 7^\circ 11{,}3 & \gamma_4 & = 6^\circ 45{,}2 \\
\varphi_5 & = 3^\circ 36{,}0 & \log\sin\gamma_5 & = 0{,}77094 - 2 .
\end{array}$$
Bezeichnet man, wie in den Formeln, mit φ wieder den Arcus, so ist
$$\varphi_5 = 0{,}062831 ,$$
daher ist $\varphi_5^5 < 0{,}0000001$; in den Formeln für $F(\varphi_r)$ und $E(\varphi_r)$ genügen somit die ersten beiden Glieder. Man erhält
$$F(\varphi_5) = 0.062867_5 ,$$
$$E(\varphi_5) = 0.062794_5 .$$
Aus dem ersten dieser Werthe folgt
$$F(k, \varphi) = 32 \cdot F(k, \varphi_5) = 2.01176 .$$
Um $E(k, \varphi)$ zu finden, berechnet man noch folgende Glieder, die sich leicht ergeben, da man die nöthigen Logarithmen schon bei der Hand hat,
$$\begin{array}{rl}
\sin\varphi\ \sin^2\gamma_1 & = 0.52116_3 \\
2\sin\varphi_1\ \sin^2\gamma_2 & = 0.29757_1 \\
4\sin\varphi_2\ \sin^2\gamma_3 & = 0.10023_0 \\
8\sin\varphi_3\ \sin^2\gamma_4 & = 0.02728_1 \\
16\sin\varphi_4\ \sin^2\gamma_5 & = 0.00697_2 \\
\hline
\text{Summe} & = 0.95322
\end{array}$$
Subtrahirt man dies von
$$32E(k, \varphi_5) = 2.0094 ,$$
so erhält man
$$E(k, \varphi) = 1{,}0562 .$$
Das Beispiel zeigt, dass man nach dieser Methode selbst bei ungünstigen Voraussetzungen, nämlich bei grossen Werthen von k und φ, rasch zum Ziele kommt.

---

9. Das geradlinige Integral
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$$

wird rein imaginär, wenn die obere Grenze z rein imaginär ist; in jedem andern Falle ist es real oder complex. Ersetzt man z durch iy, so entsteht
$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = i\int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2y^2)}} .$$
Führt man hier $y = tang\,\varphi$ ein, so erhält man
$$i\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{cos^2\varphi + k^2 sin^2\varphi}} = i\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 sin^2\varphi}} ,$$
und hat daher schliesslich
$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = iF(k', \varphi) ,$$
wobei
$$tang\,\varphi = y .$$
Hierdurch ist die Berechnung eines rein imaginären elliptischen Integrals erster Art auf die eines realen Integrals mit complementärem Modul reducirt.

10. Mit Hülfe des Additionstheorems lässt sich **jedes elliptische Integral erster Art, dessen obere Grenze complex ist, in die Summe eines realen und eines rein imaginären Integrals zerlegen.** Aus der Gleichung
$$\int_0^{a+ib} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = \int_0^{x} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} + \int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$$
folgt nach dem Additionssatze
$$a + ib = \frac{x\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2y^2)} + y\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)} \cdot i}{1 + k^2x^2y^2} .$$
Durch Vergleichung des Realen und Imaginären ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen
$$\frac{x\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2y^2)}}{1 + k^2x^2y^2} = a , \quad \frac{y\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}{1 + k^2x^2y^2} = b ,$$
oder die rationalen

2. $$x^2[1 + (k^2 + 1)y^2 + k^2y^4] = a^2(1 + k^2x^2y^2)^2 ,$$
3. $$y^2[1 - (k^2 + 1)x^2 + k^2x^4] = b^2(1 + k^2x^2y^2)^2 .$$

Durch Addition folgt, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gesetzt wird,
$$x^2 + y^2 + k^2x^2y^2(y^2 + x^2) = c^2(1 + k^2x^2y^2)^2 ,$$
und hieraus nach Division durch $1 + k^2x^2y^2$

4. $$x^2 + y^2 = c^2(1 + k^2x^2y^2) .$$

Dieser Gleichung entnehmen wir

5. $$y^2 = \frac{c^2 - x^2}{1 - k^2c^2x^2} .$$

und erhalten hieraus durch Addition von x^2

6. $$x^2 + y^2 = \frac{c^2(1 - k^2x^4)}{1 - c^2k^2x^2} .$$

Aus 3. und 4. folgt
$$y^2[1 - (k^2 + 1)x^2 + k^2x^4) = \frac{b^2}{c^4}(x^2 + y^2)^2 .$$
Führt man hier die in 5. und 6. berechneten Werthe ein, so entsteht
$$(c^2 - x^2)(1 - x^2)(1 - k^2x^2)(1 - c^2k^2x^2) = b^2(1 - k^2x^4)^2 .$$
Hieraus erhält man schliesslich

7. $$\begin{aligned} a^2 - (1 + c^2)(1 + k^2c^2)x^2 + (1 + 2k^2c^2 + c^4k^4 + k^2 + c^4k^2 + 2b^2k^2)x^4 \\ - k^2(1 + c^2)(1 + k^2c^2)x^6 + a^2k^4x^8 = 0 . \end{aligned}$$

Dividirt man durch x^4 und fasst die Glieder folgendermaassen zusammen

$$a^2\left(\frac{1}{x^4} + k^4x^4\right) - (1+c^2)(1+k^2c^2)\left(\frac{1}{x^2} + k^2x^2\right) + A = 0\,,$$

wobei $A = 1 + 2c^2k^2 + c^4k^4 + k^2 + c^4k^2 + 2b^2k^2$, und setzt

8. $$k^2x^2 + \frac{1}{x^2} = t\,,$$

so erhält man für t die quadratische Gleichung

$$a^2t^2 - (1+c^2)(1+k^2c^2)\,t + A - 2k^2a^2 = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung erhält man t, hierauf x^2 aus 8. und schliesslich y^2 aus 5.

Ebenso wie die Gleichung 7. für x^2, erhält man eine Gleichung achten Grades zur direkten Bestimmung von y^2.

Beispiel. $k = 0{,}6$, $a = 1{,}623$, $b = 0{,}6114$.

Die quadratische Gleichung für t ist

$$t^2 - 2\cdot 1{,}5844_4\cdot t + 6{,}330_6 = 0\,;$$

die Wurzeln sind $t_1 = 1{,}913_2$, $t_2 = 1{,}255_6$.

Die Wurzel t_2 führt auf Werthe von x, die grösser als 1 und daher unbrauchbar sind, da das entlang der realen Achse erstreckte Integral nur für $x < 1$ real ist. Aus t_1 folgt

$$x = 0{,}7665\,,\quad y = 2{,}580\,.$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\int\limits_0^{1,623+i\cdot 0,6114} dz:\sqrt{R} = \int\limits_0^{0,7665} dz:\sqrt{R} + \int\limits_0^{i\cdot 2,580} dz:\sqrt{R}\,,$$

$$\sqrt{R} = \sqrt{(1-z^2)(1-0{,}36\cdot z^2)}\,.$$

In Rücksicht auf No. 9 erhält man hieraus

$$\int\limits_0^{1,623+i\cdot 0,6114} dz:\sqrt{R} = F(0{,}6;\ 50^\circ 2',0) + iF(0{,}8;\ 68^\circ 48',8)\,.$$

11. Denkt man sich in 7. x gegeben, dagegen a und b veränderlich, so ist 7. die Gleichung der Curve, auf welcher sich der veränderliche Punkt $a + ib$ der Variabelnfläche bewegen muss, wenn der reale Theil der Function

$$F = \int\limits_0^{a+ib} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

den durch x gegebenen Betrag haben soll; diese Curve entspricht daher einer Parallelen zur imaginären Achse der Functionsebene. Wie man sieht, ist diese Curve vom vierten Grade und symmetrisch gegen die reale und gegen die imaginäre Achse. Die Gleichung achten Grades in y ist ebenso wie Gleichung 7. vierten Grades in a und b und stellt, wenn a und b veränderlich sind, y gegeben ist, die Curve dar, die einer Parallelen zur realen Achse der Functionsebene entspricht; sie ist ebenfalls symmetrisch gegen die reale und die imaginäre Achse.

§ 18. Die elliptischen Functionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen und in periodische Reihen.

1. In der Theorie der Kreisfunctionen stellt man dem Integrale

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = w$$

die Umkehrung gegenüber

$$sin\,w = z\,,$$

und neben diese Function treten noch eine Reihe algebraisch mit ihr zusammenhängende, $cos\,w$, $tang\,w$, $cot\,w$, $sec\,w$, $cosec\,w$; es zeigt sich, dass diese einfach periodischen Functionen für die Theorie sowol, wie für die Verwendung von grösserer Bedeutung sind, als die unendlich vieldeutigen algebraischen Integrale, deren Umkehrungen sie sind. Von dem dort befolgten Gedankengange angeleitet, betrachten wir die Umkehrung des elliptischen Integrals

1. $$\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w\,.$$

Ausgehend von der goniometrischen Form

2. $$\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = w\,,$$

die mit der algebraischen durch die Gleichung $z = sin\,\varphi$ zusammenhängt, führte Jacobi*) für φ, als Function von w betrachtet, das Zeichen ein

$$\varphi = am\,w \quad (= \text{Amplitude von } w)\,.$$

Hieraus ergiebt sich dann für die Umkehrung von 1. die Functionsbezeichnung

$$z = sin\,am\,w \quad (\text{Sinus amplitudinis } w)\,.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{1-z^2} = cos\,am\,w\,.$$

Neben diesen beiden Functionen ist noch $\sqrt{1-k^2z^2}$ von besonderer Wichtigkeit; sie wird nach Jacobi mit

$$\Delta am\,w \quad (\text{Delta amplitudinis } w)$$

bezeichnet; $sin\,am\,w$, $cos\,am\,w$, $\Delta am\,w$ nennt man elliptische Functionen im Gegensatze zu den elliptischen Integralen.

Aus 2. folgt $d\varphi = \Delta(\varphi)\,dw$; daher ist

$$\frac{d\,am\,w}{dw} = \Delta\,am\,w\,.$$

Hieraus ergiebt sich ferner

3. $$\begin{aligned}
\frac{d\,sin\,am\,w}{dw} &= \frac{d\,sin\,am\,w}{d\,am\,w}\cdot\frac{d\,am\,w}{dw} = cos\,am\,w\,\Delta\,am\,w\,,\\
\frac{d\,cos\,am\,w}{dw} &= \frac{d\,cos\,am\,w}{d\,am\,w}\cdot\frac{d\,am\,w}{dw} = -\,sin\,am\,w\,\Delta\,am\,w\,,\\
\frac{d\Delta\,am\,w}{dw} &= \frac{d\Delta\,am\,w}{d\,am\,w}\cdot\frac{d\,am\,w}{dw} = -\,k^2\,sin\,am\,w\,cos\,am\,w\,.
\end{aligned}$$

Ueber die Vorzeichen verfügen wir so, dass dem Werthe $z = sin\,am\,w = 0$ die Werthe $cos\,am\,w = \Delta\,am\,w = +1$ (nicht -1) entsprechen.

2. Bezeichnet w den Werth, den das elliptische Integral erster Art für die Punkte der mit den nöthigen Querschnitten versehenen Variabelnfläche hat, in welcher w mit z zugleich verschwindet, so ist

$$z = sin\,am\,w\,.$$

Der allgemeine Werth des Integrals ist $w + m\cdot 4K + n\cdot 2K'i$, es ist daher auch

$$z = sin\,am(w + m\cdot 4K + n\cdot 2K'i)\,.$$

Daher haben wir

$$sin\,am(w + m\cdot 4K + n\cdot 2K'i) = sin\,am\,w\,.$$

Hieraus ergiebt sich die Haupteigenschaft des Amplitudensinus,

*) Jacobi, Fundamenta nova etc., pag. 30.

durch welche er sich von allen bisher untersuchten Functionen wesentlich unterscheidet: Die Function $sin\, am\, w$ ist doppelt periodisch; sie hat die reale Periode $4K$ und die rein imaginäre $2K'i$.

3. Wir stellen hier einige Werthe zusammen, welche die drei elliptischen Hauptfunctionen für besondere Werthe der Variabeln w haben. Zunächst ist

$$\begin{array}{lll} sin\, am\, 0 = 0\,, & cos\, am\, 0 = 1\,, & \Delta\, am\, 0 = 1\,, \\ sin\, am\, K = 1\,, & cos\, am\, K = 0\,, & \Delta\, am\, K = k', \\ sin\, am\, 2K = 0\,, & cos\, am\, 2K = -1\,, & \Delta\, am\, 2K = 1\,. \end{array}$$

Aus

$$K + iK' = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

folgt weiter

$$sin\, am\,(K+iK') = \frac{1}{k}, \quad cos\, am\,(K+iK') = i\,\frac{k'}{k}, \quad \Delta\, am\,(K+iK') = 0.$$

Aus § 17, No. 9 folgt

$$\int\limits_0^{i\,tang\,\varphi} \frac{dz}{\sqrt{R}} = i \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\,sin^2\,\varphi}}.$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt dies

$$sin\, am\,(iK') = \infty\,, \quad cos\, am\,(iK') = \infty\,, \quad \Delta\, am\, iK' = \infty\,.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} sin\, am\,(-w) &= -\,sin\, am\, w\,, \\ cos\, am\,(-w) &= \,cos\, am\, w\,, \\ \Delta\, am\,(-w) &= \,\Delta\, am\, w\,. \end{aligned}$$

4. Aus dem Additionstheorem ergeben sich sofort die Gleichungen

$$sin\, am\,(w \pm w_1) = \frac{sin\, am\, w\, cos\, am\, w_1\, \Delta\, am\, w_1 \pm sin\, am\, w_1\, cos\, am\, w\, \Delta\, am\, w}{1 - k^2\, sin^2\, am\, w\, sin^2\, am\, w_1}\,,$$

1. $$cos\, am\,(w \pm w_1) = \frac{cos\, am\, w\, cos\, am\, w_1 \mp sin\, am\, w\, sin\, am\, w_1\, \Delta\, am\, w\, \Delta\, am\, w_1}{1 - k^2\, sin^2\, am\, w\, sin^2\, am\, w_1}\,,$$

$$\Delta\, am\,(w \pm w_1) = \frac{\Delta\, am w\, \Delta\, am w_1 \mp k^2\, sin\, am w\, cos\, am w\, sin\, am w_1\, cos\, am w_1}{1 - k^2\, sin^2\, am\, w\, sin^2\, am\, w_1}\,.$$

Wendet man die Additionsformeln auf das complexe Argument $u + iv$ an, so erhält man die Hauptfunctionen für ein complexes Argument in ihre realen und imaginären Bestandtheile zerlegt. Aus § 17, No. 9 ergiebt sich

$$sin\, am\,(iv) = i\, tang\, am\,(v,\, k')\,.$$

Mithin ist

$$cos\, am\,(iv) = \frac{1}{cos\, am\,(v,\, k')}, \quad \Delta\, am\,(iv) = \frac{\Delta\, am\,(v,\, k')}{cos\, am\,(v,\, k')}.$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$sin\, am\,(u+iv) = \frac{sin\, am\, u\, \Delta\, am\,(v,\, k') + i\, cos\, am\, u\, \Delta\, am\, u\, sin\, am\,(v,\, k')\, cos\, am\,(v,\, k')}{cos^2\, am\,(v,\, k') + k^2\, sin^2\, am\, u\, sin^2\, am\,(v,\, k')}\,,$$

2. $$cos\, am\,(u+iv) = \frac{cos\, am\, u\, cos\, am\,(v,\, k') - i\, sin\, am\, u\, \Delta\, am\, u\, sin\, am\,(v,\, k')\, \Delta\, am\,(v,\, k')}{cos^2\, am\,(v,\, k') + k^2\, sin^2\, am\, u\, sin^2\, am\,(v,\, k')}\,,$$

$$\Delta\, am\,(u+iv) = \frac{\Delta\, am\, u\, \Delta\, am\,(v,\, k') - ik^2\, sin\, am\, u\, cos\, am\, u\, sin\, am\,(v,\, k')}{cos^2\, am\,(v,\, k') + k^2\, sin^2\, am\, u\, sin^2\, am\,(v,\, k')}\,.$$

Unter Berücksichtigung der in No. 3 gegebenen Werthe ergeben die Additionssätze

6. $$\begin{aligned} sin\, am\,(w \pm K) &= \pm\, \frac{cos\, am\, w}{\Delta\, am\, w}\,, \\ cos\, am\,(w \pm K) &= \mp\, k'\, \frac{sin\, am\, w}{\Delta\, am\, w}\,, \\ \Delta\, am\,(w \pm K) &= \frac{k'}{\Delta\, am\, w}\,; \end{aligned}$$

sowie

7. $$\begin{aligned} sin\, am\,(w \pm 2K) &= -\, sin\, am\, w\,, \\ cos\, am\,(w \pm 2K) &= -\, cos\, am\, w\,, \\ \Delta\, am\,(w \pm 2K) &= \,\Delta\, am\, w\,. \end{aligned}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, dass die Function $\Delta\, am\, w$ die reale Periode $2K$ hat.

Aus der zweiten ergiebt sich

$$cos\, am\,(w \pm 4K) = cos\, am\, w;$$

die Function $cos\, am\, w$ hat daher die reale Periode $4K$.

Um $sin\, am\,(w \pm iK')$, $cos\, am\,(w \pm iK')$, $\Delta\, am\,(w \pm iK')$ zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{sin\, am w}{cos\, am w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{sin^2\, am\, w} - 1}\,, \quad \frac{sin\, am\, w}{\Delta\, am\, w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{sin^2\, am\, w} - k^2}\,.$$

Substituiren wir hier $w = iK'$, so wird $sin\, am\, w = \infty$ und es folgt

$$\frac{sin\, am\, iK'}{cos\, am\, iK'} = -\,i\,, \quad \frac{sin\, am\, iK'}{\Delta\, am\, iK'} = -\,i \cdot \frac{1}{k}\,.$$

Dividirt man nun in den Additionsgleichungen Zähler und Nenner durch $sin^2\, am\, w'$ und setzt dann $w' = iK'$, so erhält man

8. $$\begin{aligned} sin\, am\,(w + iK') &= \frac{1}{k\, sin\, am\, w}\,, \\ cos\, am\,(w + iK') &= -\, i \cdot \frac{\Delta\, am\, w}{k\, sin\, am\, w}\,, \\ \Delta\, am\,(w + iK') &= -\, i \cdot \frac{cos\, am\, w}{sin\, am\, w}\,. \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung entsteht

9. $$\begin{aligned} sin\, am\,(w + i \cdot 2K') &= \, sin\, am\, w\,, \\ cos\, am\,(w + i \cdot 2K') &= -\, cos\, am\, w\,, \\ \Delta\, am\,(w + i \cdot 2K') &= -\, \Delta\, am\, w\,. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 9. und 7. folgt

$$cos\, am\,(w + 2K + i \cdot 2K') = cos\, am\, w\,.$$

und aus der letzten in 9.

$$\Delta\, am\,(w + i \cdot 4K') = \Delta\, am\, w\,.$$

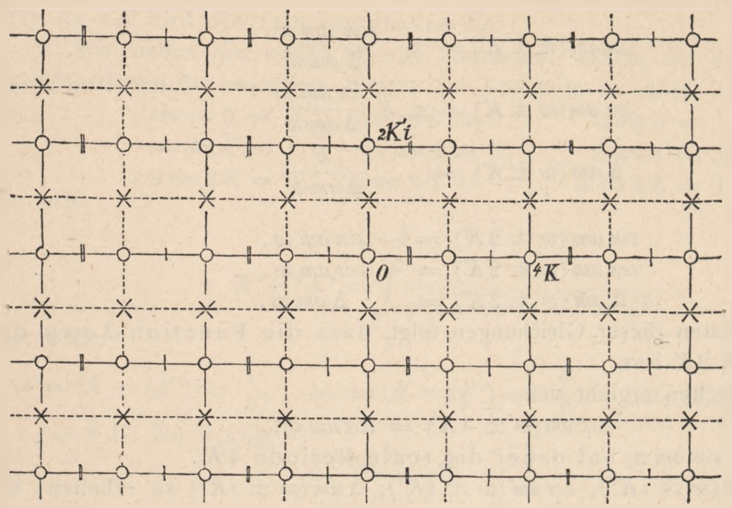
In Verbindung mit dem im Anschluss an die Gleichungen 7. haben wir somit: die Function $cos\, am\, w$ hat die reale Periode $4K$ und die complexe $2K + i \cdot 2K'$; die Function $\Delta\, am\, w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i4K'$.

5. Um uns diese Ergebnisse anschaulich zu machen, zeichnen wir auf der w-Ebene zunächst die Linien, für welche eine elliptische Function dieselben Werthe hat, wie für die Punkte der realen und der imaginären Achse; die Punkte, für welche die Function verschwindet, unendlich gross oder gleich der positiven oder negativen Einheit wird, sind der Reihe nach durch kleine Kreise, Sternchen, einfache und doppelte verticale Striche ausgezeichnet.

Der Amplitudensinus*) hat die reale Periode $4K$ und hat daher für die Punkte der imaginären Achse dieselben Werthe, wie für Parallele zur imaginären Achse, die dnrch die Punkte

$$\ldots - 8K, \quad -4K, \; 0, \; 4K, \; 8K, \; 12K \ldots$$

gehen; wegen der imaginären Periode $i \cdot 2K'$ hat $sin\, am\, w$ in den Punkten der realen Achse dieselben Werthe, wie in den Parallelen zu dieser Achse durch die Punkte

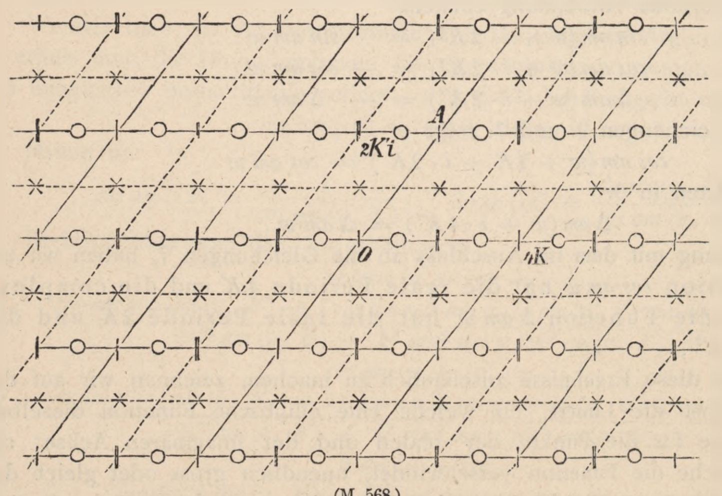


(M. 567.)

$$\ldots - i \cdot 6K', \quad - i \cdot 4K', \quad - i \cdot 2K', \quad 0, \quad i \cdot 2K', \quad i \cdot 4K', \quad i \cdot 6K', \ldots.$$

Durch beide Schaaren von Parallelen wird die ganze w-Ebene in congruente Rechtecke getheilt, welche die Länge $4K$ und die Breite $2K'$ haben. Durchläuft w das ganze Gebiet des Rechtecks, das die Ecken hat: 0, $4K$, $4K + i \cdot 2K'$, $2K'$, so nimmt $sin\, am\, w$ alle möglichen realen und complexen Werthe an. Denkt man sich jeden Punkt dieses Rechtecks mit dem zugehörigen Werthe von $sin\, am w$ belegt, so erhält man die Werthe, die $sin\, am\, w$ für die Punkte irgend eines andern der Rechtecke annimmt, indem man das erste Rechteck parallel verschiebt, bis es mit dem andern zur Deckung kommt.

6. Die Punkte, in denen der Amplitudencosinus infolge der complexen Periode $2K + i \cdot 2K'$ denselben Werth hat wie im Nullpunkte, liegen auf der Geraden OA, die den Nullpunkt mit dem Punkte $2K + i \cdot 2K'$ verbindet, und zwar liegen sie hier zu beiden Seiten von O um Vielfache der Strecke OA entfernt. Die Punkte, in denen $cos\, am w$ infolge der complexen Periode denselben Werth hat, wie in B, liegen auf der durch B gehenden Parallelen zu OA, und sind von B um Vielfache von OA getrennt.



(M. 568.)

*) In Fig. 567 ersetze man die einfachen Verticalstriche durch doppelte und umgekehrt.

Die Punkte, in denen $cos\, am\, w$ infolge der realen Periode $4K$ dieselben Werthe hat, wie in den Punkten dieser Parallelen, sind auf Parallelen zu OA enthalten, die von B in der Richtung der realen Achse um Vielfache von $4K$ abstehen, und zwar liegen die Punkte dieser Parallelen, die einem bestimmten Punkte B entsprechen, auf der durch B gehenden Parallelen zur realen Achse.

Zerlegt man die w-Ebene durch Parallele zu OA, welche die Punkte enthalten

$$\ldots. - 8K, \quad - 4K, \quad 0, \quad 4K, \quad 8K, \ldots.,$$

sowie durch Parallelen zur realen Achse, welche die Punkte enthalten

$$\ldots. - i \cdot 4K', \quad - i \cdot 2K', \quad 0, \quad i \cdot 2K', \quad i \cdot 4K', \ldots.,$$

so zerfällt sie in congruente Parallelogramme; eins derselben hat die Ecken 0, $4K$, $6K + i \cdot 2K'$, $2K + i \cdot 2K'$.

Durchläuft w dieses Parallelogramm, so nimmt $cos\, am\, w$ alle möglichen realen und complexen Werthe an. Denken wir uns wieder jeden Punkt dieses Parallelogramms mit dem zugehörigen Werthe von $cos\, am\, w$ behaftet, so erhalten wir die Werthe, welche den in einem andern Parallelogramme enthaltenen w-Werthen zugehören, indem wir das erstere mit dem letzteren durch Parallelverschiebung zur Deckung bringen.

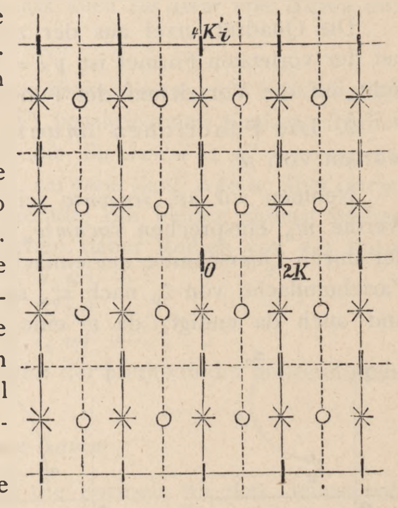
7. Die Function $\Delta\, am\, w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i \cdot 4K'$; daher ziehen wir in der w-Ebene Parallele zur realen Achse durch die Punkte

$$\ldots - i \cdot 8K', \; - i \cdot 4K', \; 0, \; i \cdot 4K', \; i \cdot 8K', \ldots$$

sowie Parallele zur imaginären Achse durch die Punkte

$$\ldots - 4K, \; - 2K, \; 0, \; 2K, \; 4K, \ldots$$

Durchläuft w das Rechteck, das die Ecken hat 0, $2K$, $2K + i \cdot 4K'$, $i \cdot 4K'$, so nimmt $\Delta\, am\, w$ alle möglichen Werthe an. Denken wir uns auch diesmal die Punkte dieses Rechtecks mit den zugehörigen Functionswerthen behaftet, so erhalten wir die Functionswerthe für die Punkte eines andern der Rechtecke, indem wir das erstere parallel verschieben, bis es mit dem letzteren zusammenfällt.



(M. 569.)

8. Setzt man im Additionstheoreme $w_1 = w$, so folgen die Formeln

$$sin\, am 2w = \frac{2\, sin\, am\, w\, cos\, am\, w\, \Delta\, am\, w}{1 - k^2\, sin^4\, am\, w},$$

$$cos\, am 2w = \frac{cos^2\, am w - sin^2\, am w \Delta^2\, am\, u}{1 - k^2\, sin^4\, am u} = \frac{1 - 2 sin^2\, am\, w + \varphi^2\, sin^4\, am w}{1 - k^2\, sin^4\, am w},$$

$$\Delta am 2w = \frac{\Delta^2 am\, w - k^2 sin^2\, am w\, cos^2 am w}{1 - k^2\, sin^4\, am w} = \frac{1 - 2k^2\, sin^2\, am w + k^2\, sin^4\, am w}{1 - k^2\, sin^4\, am w}.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung $w = \frac{1}{2} K$, so erhält man

$$1 - 2 sin^2\, am \tfrac{1}{2} K + k^2\, sin^4\, am \tfrac{1}{2} K = 0.$$

In Rücksicht darauf, dass $sin\, am \frac{1}{2} K$ positiv und kleiner als 1 ist, folgen hieraus die Werthe

$$sin\, am \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}, \quad cos\, am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1 + k}}, \quad \Delta\, am \frac{K}{2} = \sqrt{k'}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$sin\,am\,i\frac{K'}{2} = i\frac{1}{\sqrt{k}},\quad cos\,am\,i\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}},\quad \Delta am\,i\frac{K'}{2} = \sqrt{1+k}\,.$$

Mit Hülfe der Additionsformeln findet sich dann noch

$$sin\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}},\quad cos\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'}\,;$$

$$sin\,am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}},\quad cos\,am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\Delta\,am\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \sqrt{1-k}\,;$$

$$sin\,am\frac{K \pm iK'}{2} = \sqrt{1 \pm i\frac{k'}{k}},\quad cos\,am\frac{K \pm iK'}{2} = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta\,am\frac{K \pm iK'}{2} = k'\sqrt{1 \mp i\frac{k}{k'}}\,.$$

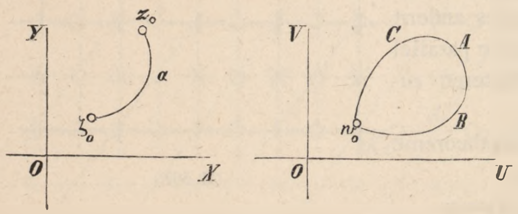
Für den drittletzten Werth erhält man nämlich zunächst

$$\sqrt{\frac{1+k'}{k}\cdot\frac{1+k+ik'}{1+k+k'}} = \sqrt{\frac{1+k'}{k}}\cdot\frac{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}}\,.$$

Die Quadratwurzel aus der zweiten Potenz hiervon liefert das Mitgetheilte; bei der vorletzten Formel ist $\sqrt{i} = \pm(1+i):2$ verwendet worden, unter Rücksicht auf die Vorzeichen der Functionen; die Wurzeln sind positiv zu nehmen.

9. Die Functionen $sin\,am w$, $cos\,am w$, $\Delta\,am w$ sind eindeutige Functionen von w.

Nehmen wir an, $sin\,am w$ sei eine mehrdeutige Function von w und dem Werthe w_0 entsprechen $sin\,am w_0 = \zeta_0$ und $sin\,am w_0 = z_0$; bewegt sich z auf der durch Querschnitte auf einfachen Zusammenhang gebrachten Riemann'schen Variabelnfläche von ζ_0 nach z_0, so beschreibt w eine Curve, die in w_0 anfängt und auch da endigt, da w eine eindeutige Function der Punkte der einfach zusammenhängenden z-Fläche ist.



(M. 570.)

Der Weg $\zeta_0 z_0$ sei so gewählt, dass der zugehörige Weg von w keinen Windungspunkt enthält. Geht w über B nach A und hierauf denselben Weg zurück, so geht ein Werth der Variabeln z von ζ_0 bis zu einem A entsprechenden Punkte a und dann denselben Weg zurück nach ζ_0. Wir wollen nun den Weg $l = ABw_0$ stetig so verändern, dass er in den Weg ACw_0 übergeht. So lange bei diesen Veränderungen der Weg nicht einem Punkte unendlich nahe kommt, für welchen $dz:dw$ unendlich gross ist, so lange gehört zu jeder unendlich kleinen Verrückung eines Punktes der Curve l auch eine unendlich kleine Verrückung des zugehörigen Punktes der Z-Fläche, so lange ist also auch die Deformation des Weges $a\zeta_0$ stetig und ζ_0 der Endpunkt. Da nun der Weg $a\zeta_0$ nicht durch stetige Aenderungen in den ACw_0 entsprechenden Weg az_0 übergeführt werden kann, so folgt, dass, wenn anders die Annahme der Vieldeutigkeit von $sin\,am\,w$ zutreffen soll, die Curve w_0CAB einen Punkt einschliessen muss, für welchen

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

unendlich gross wird. Dies tritt nur ein, wenn $z = \infty$, und hierfür ist

$$w = iK' + 2mK + 2niK'.$$

Es müsste also, wenn w einen geschlossenen Weg beschreibt, der einen dieser Punkte umgiebt, z von einem Anfangswerthe ζ_0 zu einem andern Endwerthe z_0 gelangen. Wir können uns dabei darauf beschränken, w einen unendlich kleinen Kreis beschreiben zu lassen, der einen dieser Punkte einschliesst. Nun ist

$$sin\,am(iK' + 2mK + i2nK' + \rho e^{i\varphi}) = \pm\, sin\,am(iK' + \rho e^{i\varphi})$$
$$= \pm\,\frac{1}{k\,sin\,am\,\rho e^{i\varphi}}\,;$$

wächst φ von 0 bis 2π, so beschreibt $w = \rho e^{i\varphi}$ einen unendlich kleinen Kreis um den Nullpunkt; dieser schliesst keinen Punkt ein, für welchen $dz:dw = \infty$, also erlangt $sin\,am\,\rho^{i\varphi}$ am Ende desselben Wegs denselben Werth, wie am Anfange; mithin gilt das gleiche auch für $sin\,am w$, wenn w einen der Punkte $iK' + 2mK + i2nK'$ umkreist. Hieraus folgt, dass bei jedem geschlossenen Wege von w auch $z = sin\,am w$ einen geschlossenen Weg beschreibt; folglich kann $sin\,am w$ nicht eine mehrdeutige Function von w sein.

Da $z = sin\,am w$ eine eindeutige Function von w ist, und $cos\,am w = \sqrt{1-z^2}$ und $\Delta am w = \sqrt{1-k^2z^2}$ eindeutige Functionen von z, d. i. der Punkte der Riemann'schen Variabelnfläche sind, so folgt, dass auch $cos\,am w$ und $\Delta am w$ eindeutige Functionen von w sind.

---

10. Die elliptischen Functionen $sin\,am w$, $cos\,am w$, $\Delta am w$ sind eindeutig und endlich innerhalb des mit dem Halbmesser K' beschriebenen Kreises; folglich lassen sie sich in Potenzreihen entwickeln, die für $mod w < K'$ convergiren.

Da $sin\,am w$ mit w das Zeichen wechselt, $cos\,am w$ und $\Delta am w$ aber nicht, so folgt, dass die Reihe für $sin\,am w$ nur ungerade, die beiden andern Reihen nur gerade Potenzen von w enthalten; wir haben daher Reihen von der Form

$$sin\,am\,w = a_1 w + a_3 w^3 + a_5 w^5 + \ldots$$
$$cos\,am\,w = 1 + b_2 w^2 + b_4 w^4 + \ldots$$
$$\Delta\,am\,w = 1 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + \ldots.$$

Zur Bestimmung der a, b, c bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten. Nach No. 1, 3 ist

$$\frac{d\,sin\,am w}{dw} = cos\,am w\,\Delta am w\,.$$

Differenziren wir nochmals, und benutzen die Formeln für den Differentialquotienten von $cos\,am w$ und $\Delta am w$, so erhalten wir

$$\frac{d^2\,sin\,am w}{dw^2} = -(1+k^2)\,sin\,am w + 2k^2\,sin^3 am w\,.$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Potenzreihe für $sin\,am w$ ein und vergleichen die gleich hohen Potenzen von w, so erhalten wir für die Coefficienten a_1, a_3, a_5, ... die Gleichungen

$$3\cdot 2\cdot a_3 = -(1+k^2)\,a_1\,,$$
$$5\cdot 4\cdot a_5 = -(1+k^2)\,a_3 + 2k^2 a_1^3\,,$$
$$7\cdot 6\cdot a_7 = -(1+k^2)\,a_5 + 6k^2 a_1^2 a_3\,,$$
$$9\cdot 8\cdot a_9 = -(1+k^2)\,a_7 + 6k^2(a_1^2 a_5 + a_1 a_3^2)\,,$$
$$11\cdot 10\cdot a_{11} = -(1+k^2)\,a_9 + 2k^2(3a_1^2 a_7 + a_3^3 + 6a_1 a_3 a_5)\,,$$
$$13\cdot 12\cdot a_{13} = -(1+k^2)\,a_{11} + 2k^2(3a_1^2 a_9 + 3a_1 a_5^2 + 6a_1 a_3 a_7 + 3a_3^2 a_5)\,.$$

. . . .

Den ersten Coefficienten a_1 erhalten wir, indem wir die Reihe für *sin amw* differenziren und davon Gebrauch machen, dass

$$\left(\frac{d \sin am w}{dw}\right)_{w=0} = 1\,;$$

hieraus ergiebt sich

$$a_1 = 1\,.$$

Berechnen wir nun aus dem gegebenen Systeme die übrigen Coefficienten, so erhalten wir

$$\sin am w = w - \frac{1+k^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot w^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot w^5$$

$$- \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot w^7 + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot w^9$$

$$- \frac{1+11069k^2+165826k^4+165826k^6+11069k^8+k^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}\cdot w^{11} + \dots$$

$$\mod w < K'.$$

11. Wir bilden in gleicher Weise

$$\frac{d^2 \cos am w}{dw^2} = -(1-2k^2)\cos am w - 2k^2 \cos^3 am w\,,$$

und setzen auf beiden Seiten die Potenzreihe für *cos amw* ein; dadurch gelangen wir zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
2\cdot 1\cdot b_2 &= -1\,,\\
4\cdot 3\cdot b_4 &= -(1+4k^2)\,b_2\,,\\
6\cdot 5\cdot b_6 &= -(1+4k^2)\,b_4 - 6k^2 b_2^2\,,\\
8\cdot 7\cdot b_8 &= -(1+4k^2)\,b_6 - 2k^2(b_2^3 + 6b_2 b_4)\,,\\
10\cdot 9\cdot b_{10} &= -(1+4k^2)\,b_8 - 6k^2(b_2^2 b_4 + 2b_2 b_6 + b_4^2)\,,\\
12\cdot 11\cdot b_{12} &= -(1+4k^2)\,b_{10} - 6k^2(b_2 b_4^2 + b_2^2 b_6 + 2b_2 b_8 + 2b_4 b_6)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Hieraus findet sich

$$\cos am w = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}\cdot w^2 + \frac{1+4k^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot w^4$$

$$- \frac{1+44k^2+16k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot w^6 + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot w^8$$

$$- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\cdot w^{10} + \dots$$

$$\mod w < K'.$$

12. Für die Function $\Delta\, am w$ ergiebt sich

$$\frac{d^2 \Delta am w}{dw^2} = (2-k^2)\,\Delta am w - 2\Delta^3 am w\,,$$

woraus die Gleichungen folgen

$$\begin{aligned}
2\cdot 1\cdot c_2 &= -k^2\\
4\cdot 3\cdot c_4 &= -(4+k^2)\,c_2\\
6\cdot 5\cdot c_6 &= -(4+k^2)\,c_4 - 6c_2^2\\
8\cdot 7\cdot c_8 &= -(4+k^2)\,c_6 - 2(c_2^3 + 6c_2 c_4)\\
10\cdot 9\cdot c_{10} &= -(4+k^2)\,c_8 - 6(c_2^2 c_4 + 2c_2 c_6 + c_4^2)\\
12\cdot 11\cdot c_{12} &= -(4+k^2)\,c_{10} - 6(c_2^2 c_6 + c_2 c_4^2 + 2c_2 c_8 + 2c_4 c_6)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Diese ergeben

$$\Delta am w = 1 - \frac{k^2}{1\cdot 2}\cdot w^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot w^4$$

$$- \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot w^6 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot w^8 - \dots$$

$$\mod w < K'.$$

Die Reihen für die Produkte je zweier der Functionen *sin amw*, *cos amw*, Δ *amw* erhalten wir, indem wir die soeben entwickelten Reihen nach w differenziren; es entsteht:

$$\cos am w \cdot \Delta am w$$

$$= 1 - \frac{1+k^2}{1\cdot 2}\,w^2 + \frac{1+14k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,w^4 - \dots$$

$$\sin am w \cdot \Delta am w$$

$$= w - \frac{1+4k^2}{1\cdot 2\cdot 3}\,w^3 + \frac{1+44k^2+16k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,w^5 - \dots$$

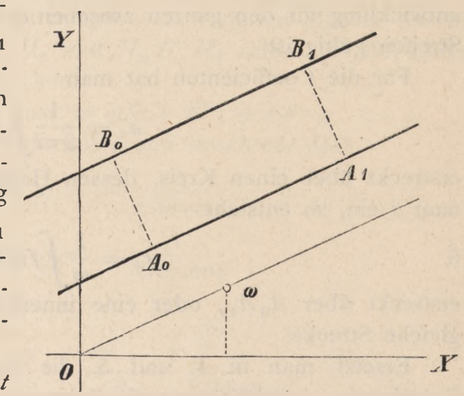
$$\sin am w \cdot \cos am w$$

$$= w - \frac{4+k^2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot w^3 + \frac{16+44k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot w^5 - \dots$$

$$\mod w < K'.$$

13. Wir werden nun die elliptischen Functionen in FOURIER'sche Reihen entwickeln; vorher wollen wir die FOURIER'schen Reihen auf complexe Variable ausdehnen*).

Die Function $f(z)$ sei periodisch und habe die reale oder complexe Periode ω; sie sei ferner endlich und eindeutig innerhalb eines unendlichen Streifens $A_0\,A_1\,B_0\,B_1$, dessen Ränder mit der vom Nullpunkte nach dem Punkte ω gezogenen Geraden parallel sind. Nach der Voraussetzung zerfällt dieser Streifen in congruente Rechtecke, deren in der Richtung des Streifens gemessene Länge $A_0\,A_1$ einer Aenderung des z um den Periodicitätsmodul ω zugehört, so dass für homologe Punkte dieser Rechtecke $f(z)$ denselben Werth hat.



(M. 571.)

Wir führen eine neue Variable t durch die Gleichung ein

1. $$e^{\frac{2\pi z}{\omega} i} = t$$

und setzen $t = re^{i\vartheta}$; dann ist

2. $$z = -\frac{i\omega}{2\pi}\,lr + \frac{\omega}{2\pi}\,\vartheta\,.$$

Bewegt sich z auf einer Parallelen zu $A_0\,A_1$, so durchläuft es die Werthe $z + m\omega$, wobei m real ist. Gehören r_1 und ϑ_1 zu $z + m\omega$, so ist

3. $$z + m\omega = -\frac{i\omega}{2\pi}\,lr_1 + \frac{\omega}{2\pi}\,\vartheta_1\,.$$

Durch Subtraction von 2. und Division durch ω ergiebt sich

$$m = -\frac{i}{2\pi}\,l\,\frac{r_1}{r} + \frac{1}{2\pi}(\vartheta_1 - \vartheta).$$

Da m real ist, so folgt hieraus $r_1 = r$; ferner folgt für $m = 1$ der Werth $\vartheta_1 = \vartheta + 2\pi$; beschreibt also z eine Parallele zur Streifenrichtung, so bewegt sich t auf einem Kreise, schreitet z um ω fort, so durchläuft t einen vollen Kreis.

Hieraus folgt, dass den Normalen zur Streifenrichtung in der z-Ebene Strahlen durch den Nullpunkt in der t-Ebene entsprechen.

*) BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions elliptiques, 2. éd. Paris 1875. pag. 161. KÖNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der Ellipt. Funct., Leipzig 1874. pag. 230.

Gehören nun zu $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ die Werthe $r = r_0$ und $r = r_1$, so entspricht dem Rechtecke $A_0 A_1 B_1 B_0$ der zwischen den mit den Radien r_0 und r_1 beschriebenen Kreisen enthaltene Ring. Da nach der Voraussetzung $f(z)$ innerhalb dieses Rechtecks eindeutig und endlich ist, so ist die Function

$$f\left(-i \cdot \frac{\omega}{2\pi}\, lt\right),$$

die aus $f(z)$ durch Ersetzung von z durch t hervorgeht, eindeutig und endlich für den zwischen $r = r_0$ und $r = r_1$ enthaltenen Kreisring. Daher kann diese Function (§ 13, No. 13) in eine Reihe von der Form entwickelt werden

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n .$$

Wenn man t wieder durch z ersetzt, so hat man daher

4. $$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$$

gültig zunächst für das Rechteck $A_0 A_1 B_1 B_0$; da aber für zwei Werthe z und $z + \omega$ sowohl $f(z)$ als $e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$ denselben Werth haben, so folgt, dass die Reihenentwicklung für den ganzen zwischen den Geraden $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ enthaltenen Streifen gültig ist.

Für die Coefficienten hat man

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int f \cdot t^{-n-1}\, dt$$

erstreckt über einen Kreis, dessen Halbmesser zwischen r_0 und r_1 liegt; führt man z ein, so entsteht

5. $$a_n = \frac{1}{\omega}\int f(z)\, e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i}\, dz ,$$

erstreckt über $A_0 A_1$, oder eine innerhalb des Streifens liegende parallele und gleiche Strecke.

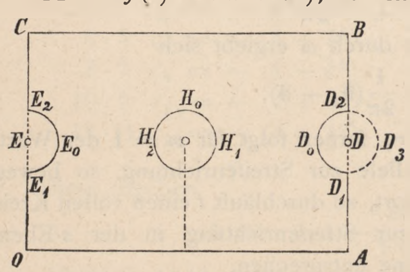
Ersetzt man in 4. und 5. die Exponentialgrössen durch goniometrische Functionen, so erhält man die Fourier'sche Reihe in der Form

$$f(z) = a_0 + i\sum_1^{\infty}(a_n - a_{-n}) \cdot \sin\frac{2n\pi z}{\omega}$$
$$+ \sum_1^{\infty}(a_n + a_{-n}) \cdot \cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

die mit der § 11, No. 12 mitgetheilten übereinstimmt.

14. Ist $f(z) = \sin am z$*), so schlagen wir zur Ermittelung des Integrals

$$a_n = \frac{1}{4K}\int_0^{4K} f(z)\, e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}\, dz$$



(M. 572.)

folgenden Weg ein.

Hat das Rechteck $OABC$ der Reihe nach die Eckpunkte $z = 0,\ 4K,\ 4K + 2K'i,\ 2K'i$, und umgehen wir die beiden Punkte D und E des Perimeters, für welche $z = iK'$ und $4K + iK'$ ist, für welche also $\sin am z$

*) Den bisher aus leicht erkennbaren Gründen festgehaltenen Gebrauch, die Variable in den elliptischen Functionen mit w zu bezeichnen, geben wir nun auf.

unendlich gross wird, durch verschwindend kleine Halbkreise, und schliessen den Punkt $2K + 2K'i$, in welchem $\sin am z$ ebenfalls unendlich ist, durch einen verschwindend kleinen Kreis $H_0 H_1 H_2$ aus, so ist für die Function $f(z)\, e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}\, dz$

$$\int OA + \int AD_1 + \int D_1 D_0 D_2 + \int D_2 B + \int BC + \int CE_2 + \int E_2 E_0 E_1$$
$$+ \int E_1 O + \int H_0 H_1 H_2 = 0 .$$

In correspondirenden Punkten von OC und AB haben $\sin am z$ und $e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}$ denselben Werth, dz aber entgegengesetzt gleiche Werthe, mithin verschwindet die Summe der auf diese Strecken bezüglichen Integrale. In correspondirenden Punkten der Seiten OA und BC hat $\sin am z$ gleiche Werthe, zur Exponentialgrösse tritt aber der Faktor $e^{n\frac{\pi K'}{K}}$.

Wir setzen

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q ,$$

und haben daher

$$\int OA + \int BC = (1 - q^{-n}) \int OA .$$

Statt des Integrals $\int E_2 E_0 E_1$ können wir $\int D_2 D_3 D_1$ setzen, da in correspondirenden Punkten beider Halbkreise die zu integrirende Function gleiche Werthe hat. Für die Kreisintegrale über $D_1 D_0 D_3$ und $H_0 H_1 H_2$ setzen wir der Reihe nach, indem wir den Radius mit r bezeichen,

$$z = 2K + K'i + re^{i\varphi}, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + re^{i\varphi},$$

bezeichnen die verschwindende Grösse $re^{i\varphi}$ mit ρ und beachten, dass

$$\sin am(2K + K'i + \rho) = -\frac{1}{k \sin am\rho},$$

$$\sin am(4K + K'i + \rho) = \frac{1}{k \sin am\rho}.$$

Somit erhalten wir

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k}\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sin am\,\rho}\, e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} i}\, d\varphi .$$

Wir gehen nun zur Grenze für ein verschwindendes ρ über; da

$$\lim \frac{\rho}{\sin am\rho} = 1, \quad \lim e^{-\frac{n\pi\rho}{2K}\cdot i} = 1,$$

so folgt

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = 2\pi \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot i .$$

Hieraus erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{4K} \cdot \int OA = i\,\frac{\pi}{2K} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n} = i\,\frac{\pi}{2K} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n}$$

Daher ist

$$a_n + a_{-n} = 0,$$

$$a_{2n} - a_{-2n} = 0, \quad a_{2n+1} - a_{-2n-1} = -\, i \cdot \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1 - q^{2n+1}} .$$

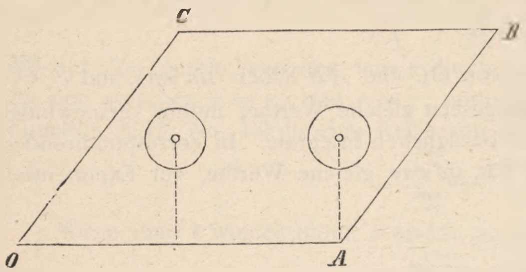
Dies ergiebt nun die gesuchte Entwicklung

$$\sin am z =$$
$$\frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1 - q} \cdot \sin\frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1 - q^3} \cdot \sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1 - q^5} \sin\frac{5\pi z}{2K} + \ldots\right).$$

15. Zur Ermittlung des geradlinigen Integrales

$$\int\limits_0^{4K} \cos am\, z \cdot e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}\, dz$$

bilden wir ein Parallelogramm $OABC$, für dessen Ecken $z = 0,\ 4K,\ 6K + 2K'i,\ 2K + 2K'i$ und schliessen die beiden Punkte $2K + K'i$ und $4K + K'i$ im Inneren dieses Parallelogramms, für welche $\cos am\, z$ unendlich wird, durch gleiche verschwindende Kreise aus. Das Integral erstreckt über den Perimeter des Parallelogramms ist gleich der Summe der beiden Kreisintegrale. In correspondirenden Punkten der Seiten AB und OC haben $\cos am\, z$ und die Exponentialgrösse gleiche, dz entgegengesetzt gleiche Werthe; also verschwindet die Summe der über AB und CO erstreckten Integrale.



(M. 573.)

In correspondirenden Punkten von OA und BC hat $\cos am\, z$ gleiche Werthe und zur Exponentialgrösse tritt der Faktor

$$e^{-\frac{n\pi}{2K}(2K + 2K'i)i} = (-q)^{-n}.$$

Die beiden Integrale geben daher vereint

$$[1 - (-q)^{-n}] \cdot \int OA.$$

In den Kreisintegralen setzen wir

$$z = 2K + K'i + \rho, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + \rho,$$
$$\rho = r^{i\varphi},$$

und beachten, dass

$$\cos am(2K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(2K + K'i + \rho)} = i \cdot e^{-n\pi i} \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am\, \rho}{k \sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} i},$$

$$\cos am(4K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(4K + K'i + \rho)} = -\ i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am\, \rho}{k \sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} i}.$$

Die Summe der beiden Kreisintegrale ist daher

$$\frac{1}{k}(1 - e^{-n\pi i})\, q^{-\frac{n}{2}} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho \Delta\, am\, \rho}{\sin am\, \rho} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{2K} i}\, d\varphi;$$

der Grenzwerth derselben für ein verschwindendes ρ ist

$$\frac{2\pi}{k}(1 - e^{-n\pi i}) q^{-\frac{n}{2}}.$$

Daher ergiebt sich

$$a_n = \frac{\pi}{2kK}(1 - e^{-n\pi i}) \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{1 - (-q)^{-n}}.$$

Ist n gerade, so ist $a_n = 0$; für ungerade n hat man

$$a_{2n+1} = \frac{\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1};$$

mithin ist

$$a_{2n+1} - a_{-2n-1} = 0, \quad a_{2n+1} + a_{-2n-1} = \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1}.$$

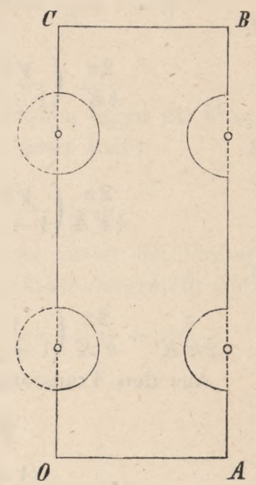
Dies ergiebt schliesslich die Entwicklung

$$\cos am\, z =$$
$$\frac{2\pi}{kK}\left[\frac{\sqrt{q}}{1 + q} \cos \frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1 + q^3} \cos \frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1 + q^5} \cos \frac{5\pi z}{2K} + \ldots\right].$$

16. Um $\Delta\, am\, z$ in eine Fourier'sche Reihe zu entwickeln, haben wir das geradlinige Integral auszuwerthen

$$\int\limits_0^{2K} \Delta\, am\, z\, e^{-\frac{n\pi z}{K} i}\, dz.$$

Wir integriren die unter dem Integralzeichen stehende Function auf dem Perimeter $OABC$, in dessen Ecken $z = 0,\ 2K,\ 2K + 4K'i,\ 4K'i$, und schliessen die Punkte $K'i,\ 3K'i,\ 2K + K'i,\ 2K + 3K'i$, in welche $\Delta\, am\, w$ unendlich gross wird, durch kleine Halbkreise aus. Die Integrale über AB und CO haben wieder die Summe Null. In correspondirenden Punkten von OA und CD hat $\Delta am\, z$ gleiche Werthe, die Exponentialgrösse nimmt den Faktor an



(M. 574.)

$$e^{\frac{4n\pi K'}{K}} = q^{-4n},$$

die beiden Integrale geben daher zusammen

$$(1 - q^{-4n}) \cdot \int OA.$$

Die vier Halbkreisintegrale kann man durch zwei Kreisintegrale um iK' und $3iK'$ ersetzen; wir substituiren in denselben

$$z = iK' + \rho, \quad \text{bez.} = 3iK' + \rho, \quad \rho = re^{i\varphi},$$

und bemerken, dass

$$\Delta\, am\, (iK' + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(iK' + \rho)} = -i \frac{\cos am\, \rho}{\sin am\, \rho} \cdot q^{-n} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{K} i},$$

$$\Delta am(3 \cdot iK' + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(3iK' + \rho)} = i \frac{\cos am\, \rho}{\sin am\, \rho} \cdot q^{-3n} \cdot e^{-\frac{n\pi\rho}{K} i}.$$

Für die beiden Kreisintegrale ergiebt sich, wenn man ρ unendlich klein nimmt,

$$2\pi(q^{-n} - q^{-3n}).$$

Daher ist

$$a_n = \frac{\pi}{K} \cdot \frac{q^{-n} - q^{-3n}}{1 - q^{-4n}} = \frac{\pi}{K} \cdot \frac{q^n}{1 + q^{2n}};$$

da $a_{-n} = a_n$, so ist

$$a_n - a_{-n} = 0,$$
$$a_n + a_{-n} = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q_n}{1 + q^{2n}}, \quad a_0 = \frac{\pi}{K}.$$

Dies liefert schliesslich

$$\Delta\, am\, z =$$
$$\frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1 + q^2} \cos \frac{\pi z}{K} + \frac{q^2}{1 + q^4} \cos \frac{2\pi z}{K} + \frac{q^3}{1 + q^6} \cos \frac{3\pi z}{K} + \ldots\right).$$

Diese Fourier'schen Reihen für $\sin am\, z$, $\cos am\, z$ und $\Delta\, am\, z$ gelten für alle Werthe von z, welche innerhalb des Streifens liegen, der sich parallel der realen Achse erstreckt und dessen Ränder durch die Punkte $\pm\, iK'$ gehen. Jenseit dieses Streifens wiederholen sich die Werthe der elliptischen Functionen, gemäss ihrer complexen Periode, und zwar bei $\cos am z$ und $\Delta am z$ mit Vorzeichenwechsel; die Fourier'schen Reihen sind aber nur einfach periodisch und setzen sich jenseit des Streifens mit andern Werthen fort, als die Functionen, mit denen sie für Punkte im Innern des Streifens übereinstimmen.

17. Aus den in No. 14, 15 und 16 entwickelten Reihen lassen sich durch Differentiation, Integration und geeignete Substitutionen eine grosse Anzahl brauchbarer Reihen ableiten. Wir beschränken uns hier auf wenige Beispiele.

Ersetzt man in den drei Reihen z durch $K - z$, so entsteht

1. $$\frac{\cos am\, z}{\Delta\, am\, z} = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi z}{2K} - \ldots\right),$$

2. $$\frac{\sin am\, z}{\Delta\, am\, z} = \frac{2\pi}{kk'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi z}{2K} - \ldots\right),$$

3. $$\frac{1}{\Delta\, am\, z} = \frac{\pi}{2k'K} - \frac{2\pi}{k'K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi z}{K} - \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi z}{K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi z}{K} - \ldots\right).$$

Aus den Transformationsformeln § 17, No. 5.

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \varphi_1\right) = (1+k')\,F(k, \varphi),$$

4. $$\sin\varphi_1 = \frac{(1+k')\cos\varphi\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\Delta(\varphi_1) = \frac{1-(1-k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

erhält man sofort, indem man $F(k, \varphi) = w$ setzt,

$$\sin am\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\cos am\, w \sin am\, w}{\Delta\, am\, w},$$

$$\cos am\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\sin^2 am\, w}{\Delta\, am\, w}.$$

Da nun nach 4. die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi_1 = \pi$ einander entsprechen, so ist

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = 2F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K, \quad \text{also}$$

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2}K.$$

Das Complement zu $\frac{1-k'}{1+k'}$ ist $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$. Aus § 17, No. 5, 11 erhält man leicht

$$F(k', \pi) = 2F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1+k'}F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{also}$$

$$F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K'.$$

Ersetzt man also

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'} \quad \text{und } w \text{ durch } (1+k')w,$$

so verwandelt sich

$$K \text{ in } \tfrac{1}{2}(1+k')K, \quad K' \text{ in } (1+k')K',$$

$$q \text{ in } q^2,$$

$$\sin am\, w \text{ in } \frac{(1+k')\sin am\, w \cos am\, w}{\Delta\, am\, w},$$

$$\cos am\, w \text{ in } \frac{1-(1+k')\sin^2 am\, w}{\Delta\, am\, w}.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der Reihe für $\sin am\, z$*):

$$\frac{\sin am\, z \cos am\, z}{\Delta\, am\, z} = \frac{4\pi}{k^2K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi z}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi z}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi z}{K} + \ldots\right).$$

§ 19. Die Thetafunctionen.

1. Die Fourier'schen Reihen für die elliptischen Functionen legen die Frage nahe, ob es nicht möglich sein wird, die Coefficienten a_n einer Reihe

1. $$S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i}$$

so zu bestimmen, dass durch dieselbe eine Function, welche ausser der Periode ω noch eine zweite Periode μ hat, für alle Werthe der Variabeln dargestellt wird.

Ersetzt man z durch $z + \mu$, so erhält man

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{2n\mu\pi}{\omega} i} \cdot e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i}.$$

Setzt man abkürzungsweise $e^{\frac{2\mu\pi i}{\omega}} = q$, so wird

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n q^{-n} e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i}.$$

Soll nun für alle Werthe von z die Gleichung bestehen

2. $$S(z+\mu) = S(z),$$

so folgt $q = 1$, mithin $\mu = m\omega$, wo m eine ganze Zahl ist. Durch die Gleichung 2. kommt man also über die Periode ω nicht hinaus, und erkennt, dass durch eine Fourier'sche Reihe eine doppelt periodische Function nicht dargestellt werden kann.

Man kann nun versuchen, eine Reihe zu erhalten, die dem Charakter der doppelten Periodicität möglichst nahe kommt, in dem Sinne, dass beim Uebergange von z auf $z + \mu$ die Reihe einen einfachen, von der Reihensumme nicht unmittelbar abhängigen Faktor annimmt; wenn es dann gelänge, eine zweite, ähnliche Reihe zu construiren, die bei demselben Wachsthum von z auf $z + \mu$ denselben Faktor annimmt, wie die erste, so würde dann der *Quotient beider Reihen* sich nicht verändern, wenn z durch $z + \mu$ ersetzt wird. Wir gelangen so zu dem Gedanken, *eine doppelt periodische Function durch den Quotienten zweier Reihen darzustellen.*

Die Forderung, dass bei der Substitution von $z + \mu$ für z die Reihe 1. sich bis auf einen einfach angebbaren Faktor reproducirt, lässt sich erfüllen, wenn wir die Coefficienten a der Bedingung unterwerfen

3. $$a_n q^{-n} = \gamma \cdot a_{n-1},$$

wobei γ eine noch unbestimmte Constante ist. Denn unter dieser Bedingung ist

$$S(z+\mu) = \gamma \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i} \cdot S(z).$$

Wir dürfen einen Coefficienten beliebig wählen; es sei $a_0 = 1$; alsdann folgt aus 3.

$$a_1 = \gamma q, \quad a_2 = \gamma^2 q^3, \quad a_3 = \gamma^3 q^6, \ldots$$

$$a_n = \gamma^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

*) Weitere Entwicklungen dieser Art und einen Uebergang von Fourier'schen Reihen auf unendliche Produkte siehe Schloemilch, Compendium Bd. 2. Abschn. Ellipt. Funct.

Um zunächst die einfachsten Bildungen zu erhalten, nehmen wir

$$\gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}};$$

dann wird

$$a_n = (\pm 1)^n q^{\frac{n^2}{2}},$$

und wir erhalten so zwei Formen für S, nämlich

4. $$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)}.$$

Um ähnlich gebaute Reihen zu erhalten, die beim Uebergange von z auf $z + \mu$ um einfache Faktoren wachsen, betrachten wir

5. $$S_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty +} b_n e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i}.$$

Setzt man hier $z + \mu$ für z, so entsteht

$$S_1(z + \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty +} b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i}.$$

Bestimmt man die b durch die Bedingung

6. $$b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} = \gamma_1 \cdot b_{n-1},$$

so wird

$$S_1(z + \mu) = \gamma_1 \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i} \cdot S_1(z).$$

Aus 6. folgt

$$b_1 = b_0 \gamma_1 q^{\frac{3}{2}}, \quad b_2 = b_1 \gamma_1 q^{\frac{5}{2}}, \quad b_3 = b_2 \gamma_1 q^{\frac{7}{2}}, \; \ldots$$

woraus sich ergiebt

$$b_n = b_0 \gamma_1^n \cdot q^{\frac{n^2+2n}{2}}.$$

Wir nehmen

$$\gamma_1 = \gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}}, \quad b_0 = q^{\frac{1}{8}},$$

und erhalten

$$b_n = (\pm 1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Für die Reihe S_1 erhalten wir somit die beiden Formen

7. $$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]}.$$

Wir sind hierdurch auf die Untersuchung der vier Reihen 4. und 7. geführt worden. Wir ersetzen in denselben $\pi z : \omega$ durch z und $i\mu\pi : \omega$ durch $-\rho$; ferner fügen wir zur letzten Reihe den Faktor i.

Die vier Reihen, welche wir so erhalten, führen nach Jacobi den Namen Thetafunctionen und werden durch die Functionszeichen

$$\vartheta(z, \rho), \quad \vartheta_1(z, \rho), \quad \vartheta_2(z, \rho), \quad \vartheta_3(z, \rho)$$

bezeichnet, so dass

8. $$\begin{aligned} \vartheta(z) &= \Sigma(-1)^n e^{-n^2\rho - i \cdot 2nz}, \\ \vartheta_1(z) &= i\,\Sigma(-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})^2\rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_2(z) &= \Sigma e^{-(n+\frac{1}{2})^2\rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_3(z) &= \Sigma e^{-n^2\rho - i \cdot 2nz}. \end{aligned}$$

Wird unter $e^{-\rho}$ ein realer positiver echter Bruch verstanden, so haben diese Reihen für jedes endliche z endliche Werthe und werden nur mit z zugleich unendlich gross.

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Thetafunctionen entwickeln; am Schluss dieser Untersuchung werden wir den Zusammenhang dieser Functionen mit den elliptischen Functionen erkennen.

2. Rechnet man je zwei Glieder der Thetafunctionen zusammen, die zu entgegengesetzt gleichen n gehören, so erhält man die Reihen in folgender Gestalt

$$\begin{aligned} \vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\rho} \cos 2z + 2e^{-4\rho} \cos 4z - 2e^{-9\rho} \cos 6z + \ldots, \\ \vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}} \sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}} \sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}} \sin 5z - \ldots, \\ \vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\rho}} \cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\rho}} \cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\rho}} \cos 5z + \ldots, \\ \vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\rho} \cos 2z + 2e^{-4\rho} \cos 4z - 2e^{-9\rho} \cos 6z + \ldots \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man die Beziehungen

2. $$\begin{aligned} \vartheta(z) &= \vartheta_3(\tfrac{1}{2}\pi - z), & \vartheta_2(z) &= \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - z), \\ \vartheta_1(z) &= \vartheta_2(\tfrac{1}{2}\pi - z), & \vartheta_3(z) &= \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi - z). \end{aligned}$$

Bezeichnet m eine ganze Zahl, so ist

3. $$\begin{aligned} \vartheta(z + m\pi) &= \vartheta(z), & \vartheta_2(z + m\pi) &= (-1)^m \vartheta_2(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi) &= (-1)^m \vartheta_1(z), & \vartheta_3(z + m\pi) &= \vartheta_3(z). \end{aligned}$$

Ersetzen wir in No. 1, 8 die Variable durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so folgt

4. $$\begin{aligned} \vartheta(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_1(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta(z), \\ \vartheta_2(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_3(z), \\ \vartheta_3(z + \tfrac{1}{2}i\rho) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_2(z). \end{aligned}$$

Ersetzen wir hier wieder z durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so entsteht

5. $$\begin{aligned} \vartheta(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz} \vartheta_3(z). \end{aligned}$$

Wenn man diese Substitution mehrmals wiederholt, und dann noch $z - i \cdot m_1 \rho$ für z setzt, so erhält man für jede ganze Zahl m_1

6. $$\begin{aligned} \vartheta(z + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_3(z). \end{aligned}$$

Aus 3. und 6. folgt noch

7. $$\begin{aligned} \vartheta(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m+m_1} e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^m e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2\rho - 2im_1 z} \vartheta_3(z). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, dass der Quotient je zweier Thetafunctionen doppelt periodisch ist; die Perioden sind von der Form $m \cdot \pi + n \cdot i\rho$, wobei m und n gleich 0, 1 oder 2 sind.

3. Die Multiplication der beiden Functionen

$$\vartheta_3(z) = \Sigma e^{-n^2\rho - i \cdot 2nz}, \quad \vartheta_3(\zeta) = \Sigma e^{-m^2\rho - i \cdot 2m\zeta}$$

ergiebt die Doppelsumme

$$\vartheta_3(z) \cdot \vartheta_3(\zeta) = \Sigma\Sigma e^{-(n^2+m^2)\rho - i \cdot 2(nz+m\zeta)}.$$

Für den Exponenten von e kann man schreiben

$$-2\rho[\tfrac{1}{4}(n+m)^2 + \tfrac{1}{4}(n-m)^2] - 2i[\tfrac{1}{2}(n+m)(z+\zeta) + \tfrac{1}{2}(n-m)(z-\zeta)].$$

Die Zahlen $n + m$ und $n - m$ sind gleichzeitig gerade oder ungerade; bezeichnen a und b ganze Zahlen, so ist also

$$n + m = 2a, \quad \text{und zugleich } n - m = 2b,$$

oder

$$n + m = 2a + 1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad n - m = 2b + 1.$$

Durchlaufen a und b alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so erhalten $n + m$ und $n - m$ alle möglichen Werthe.

Ersetzt man m und n durch a und b, so erhält man

$$\begin{aligned}\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) &= \Sigma\Sigma e^{-2\rho(a^2+b^2)-2i[a(z+\zeta)+b(z-\zeta)]}\\ &+ \Sigma\Sigma e^{-2\rho[(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2]-2i[(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)+(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)]},\\ &= \Sigma e^{-2a^2\rho-2ia(z+\zeta)}\cdot\Sigma e^{-2b^2\rho-2b(z-\zeta)}\\ &+ \Sigma e^{-2(a+\frac{1}{2})^2\rho-2i(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)}\cdot\Sigma e^{-2(b+\frac{1}{2})^2\rho-2i(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

1. $\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta, 2\rho) + \vartheta_2(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta, 2\rho)$.

Ersetzt man hier z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch $\frac{1}{2}\pi - \zeta$, und beachtet No. 2, 2. und 3., so erhält man

2. $\vartheta(z)\cdot\vartheta(\zeta) = \vartheta_3(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta, 2\rho) - \vartheta_2(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta, 2\rho)$.

Aus No. 2, 4 ergiebt sich leicht

$$\vartheta_3(z-\tfrac{1}{2}i\rho) = e^{\frac{1}{4}\rho+iz}\cdot\vartheta_2(z).$$

Ersetzt man hier ρ durch 2ρ, so entsteht

$$\vartheta_3(z-i\rho, 2\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho+iz}\cdot\vartheta_2(z, 2\rho).$$

Ebenso erhält man

$$\vartheta_2(z-i\rho, 2\rho) = e^{\frac{1}{2}i\rho+iz}\cdot\vartheta_3(z, 2\rho).$$

Wenn man nun in 1. z durch $z-\frac{1}{2}i\rho$, ζ durch $\zeta-\frac{1}{2}i\rho$ ersetzt, und No. 2, 6 beachtet, so folgt

3. $\vartheta_2(z)\cdot\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_2(z+\zeta, 2\rho)\,\vartheta_3(z-\zeta, 2\rho) + \vartheta_3(z+\zeta, 2\rho)\,\vartheta_2(z-\zeta, 2\rho)$.

Werden hier z und ζ durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ ersetzt, so ergiebt sich noch

4. $\vartheta_1(z)\cdot\vartheta_1(\zeta) = -\vartheta_2(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta, 2\rho) + \vartheta_3(z+\zeta, 2\rho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta, 2\rho)$.

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht die folgenden

5.
$$\begin{aligned}\vartheta(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\rho) - \vartheta_2(0, 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 &= \vartheta_2(0, 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\rho) - \vartheta_3(0, 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\rho),\\ \vartheta_2(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\rho) + \vartheta_2(0, 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\rho),\\ \vartheta_3(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\rho) + \vartheta_2(0, 2\rho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\rho).\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

6.
$$\begin{aligned}\vartheta(z)^2 + \vartheta_3(z)^2 &= 2\vartheta_3(0, 2\rho)\,\vartheta_3(2z, 2\rho),\\ \vartheta(z)^2 - \vartheta_3(z)^2 &= -2\vartheta_2(0, 2\rho)\,\vartheta_2(2z, 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 &= 2\vartheta_2(0, 2\rho)\,\vartheta_3(2z, 2\rho),\\ \vartheta_1(z)^2 - \vartheta_2(z)^2 &= -2\vartheta_3(0, 2\rho)\,\vartheta_2(2z, 2\rho).\end{aligned}$$

Wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $\vartheta_3(2z, 2\rho)$ und $\vartheta_2(2z, 2\rho)$ entnimmt, und in die erste und letzte Gleichung 5. einsetzt, so erhält man

7. $\dfrac{2\vartheta_2(0, 2\rho)\cdot\vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2+\vartheta_2(0, 2\rho)^2}\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + \dfrac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2-\vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2+\vartheta_2(0, 2\rho)^2}\,\vartheta_2(z)^2$,

8. $\dfrac{2\cdot\vartheta_2(0, 2\rho)\,\vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_2(0, 2\rho)^2+\vartheta_3(0, 2\rho)^2}\cdot\vartheta_3(z)^2 = \dfrac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2-\vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2+\vartheta_2(0, 2\rho)^2}\cdot\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2$.

Setzen wir $e^{-\rho} = \sqrt{q}$, so ist

$$\begin{aligned}\vartheta_2(0, 2\rho) &= 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\ldots,\\ \vartheta_3(0, 2\rho) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,\end{aligned}$$

beide Grössen sind daher positiv. Aus der Ungleichung $(a-b)^2 > 0$ folgt $a^2+b^2 > 2ab$, setzt man also

$$\frac{2\vartheta_2(0, 2\rho)\,\vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_2(0, 2\rho)^2+\vartheta_3(0, 2\rho)^2} = k,$$

so ist k ein positiver echter Bruch; man erhält leicht

$$\frac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2-\vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2+\vartheta_2(0, 2\rho)^2} = \sqrt{1-k^2} = k',$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist. Durch Einführung dieser Zeichen wird aus 7. und 8.

9. $k\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + k'\vartheta_2(z)^2$,

10. $k\cdot\vartheta_3(z)^2 = k'\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2$.

Wir setzen hierin $z = 0$ und beachten, dass $\vartheta_1(0) = 0$; dadurch erhalten wir für k und k' die einfacheren Ausdrücke

11. $k = \left[\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2, \quad k' = \left[\dfrac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2$.

4. In No. 3, 4 ersetzen wir z durch $z+\frac{1}{2}t$, ζ durch $\frac{1}{2}t$, ρ durch $\frac{1}{2}\rho$; dadurch entsteht

$$\vartheta_3(z+t)\cdot\vartheta_2(z) - \vartheta_2(z+t)\cdot\vartheta_3(z) = \vartheta_1(z+\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\rho)\cdot\vartheta_1(\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\rho).$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\vartheta_2(z+t)}{\vartheta_3(z+t)} - \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right] = -\frac{\vartheta_1(z+\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z+t)\,\vartheta_3(z)}\cdot\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t}.$$

Aus dieser Gleichung gelangen wir zur Kenntniss des Differentialquotienten von $\vartheta_2(z):\vartheta_3(z)$, indem wir zur Grenze für ein verschwindendes t übergehen. Setzen wir

$$\lim_{t=0}\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t} = \alpha,$$

so ergiebt sich

1. $\dfrac{d\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -\alpha\cdot\dfrac{\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z)^2}$.

Um rechts die Function $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)$ zu beseitigen, beachten wir, dass aus No. 2, 3 folgt, wenn wir z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch 0 und ρ durch $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

$$\vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\rho)\,\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\rho) = 2\vartheta_1(z)\,\vartheta(z).$$

Setzen wir

2. $\dfrac{2\alpha}{\vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho)} = \beta$,

so erhalten wir

3. $\dfrac{d\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -\beta\cdot\dfrac{\vartheta_1(z)\,\vartheta(z)}{\vartheta_3(z)^2}$.

Wir substituiren hier $\frac{1}{2}\pi - z$ für z und erhalten so

4. $\dfrac{d\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}}{dz} = \beta\cdot\dfrac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)^2}$.

5. Die soeben gewonnenen Differentialformeln setzen uns in den Stand, die Quotienten zweier Thetafunctionen mit bestimmten Integralen in Beziehung zu bringen. Wir definiren drei neue Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ durch die Gleichungen

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \quad g(z) = \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}, \quad h(z) = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}.$$

Zufolge No. 3, 10 bestehen zwischen diesen Functionen die beiden Gleichungen

1. $f(z)^2 + k'\cdot g(z)^2 = k$,

2. $k'f(z)^2 + g(z)^2 = k\cdot h(z)^2$.

Ferner ist

3. $k = \dfrac{g(0)^2}{h(0)^2}, \quad k' = \dfrac{1}{f(0)^2}$.

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

4. $g(z)^2 = \dfrac{k}{k'}\left[1 - \dfrac{1}{k}\cdot f(z)^2\right]$,

5. $h(z)^2 = \dfrac{1}{k'}\left[1 - k\cdot f(z)^2\right]$.

Die Gleichung No. 4, 4 ergiebt nun

6. $$\frac{df(z)}{dz} = \beta \cdot \frac{\sqrt{k}}{k'} \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{1}{k} f(z)^2\right] [1 - k f(z)^2]},$$

also ist

$$z = \frac{k'}{\beta \sqrt{k}} \cdot \int \frac{df(z)}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{k} f(z)^2\right] [1 - k f(z)^2]}}.$$

Wir ersetzen hier, um mit früheren Bezeichnungen in bessere Uebereinstimmung zu kommen, $\frac{1}{\sqrt{k}} f(z)$ durch ζ und z durch w; alsdann ist

$$w = \frac{k'}{\beta} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} + Const.$$

Da $\vartheta_1(z)$ verschwindet, wenn $z = 0$ ist, also $\zeta = 0$ und $w = 0$ zusammen gehören, so folgt

7. $$\frac{\beta}{k'} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}.$$

Die Constante $\beta : k'$ lässt sich durch das geradlinige Integral

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} = K$$

ausdrücken; denn dem Werthe $\zeta = 1$ entspricht $f(z) = \sqrt{k}$, also bestimmt sich das zugehörige z aus

8. $$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Dieser Gleichung wird durch $z = \frac{1}{2}\pi$ genügt, wie man sofort erkennt, wenn man in No. 2, 2 z durch Null ersetzt.

Der Differentialquotient $d\zeta : dz$ ist für ein hinlänglich kleines z positiv; dasselbe gilt für $\vartheta_2(z)\vartheta_{(3)} : \vartheta(z)^2$ für $z < \frac{1}{2}\pi$; folglich ist $\beta > 0$ (No. 4, 4). Damit $\zeta = f(z)$ von 0 bis 1 wächst, hat man daher für z von $z = 0$ an zunehmende Werthe zu setzen, bis man an einen Werth von z kommt, der $\zeta = 1$ entspricht. Man hat daher von den unendlich vielen Wurzeln der Gleichung 8. (vergl. No. 2, 7) die Wurzel $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Folglich ist

9. $$\frac{\beta}{k'} \cdot \frac{\pi}{2} = K.$$

Wird 7. durch 9. dividirt, so entsteht schliesslich

10. $$\frac{2K}{\pi} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}.$$

Dem Werthe $\zeta = 1 : k$ entspricht

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen No. 2, 4 folgt für $z = 0$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)} = \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)},$$

und aus No. 2, 2 für $z = \frac{1}{2}i\rho$ folgt weiter

$$\frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Daher ist z aus der Gleichung zu bestimmen

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho;$$

folglich ist

11. $$\frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}.$$

Nimmt man rechts das geradlinige Integral, so hat man bekanntlich

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} = K + iK'.$$

Man hat daher $n = 0$, und, wenn ρ positiv vorausgesetzt wird, $m = 1$ zu nehmen. Hieraus folgt

$$\frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\rho) = K + iK',$$

also ist

$$\rho = \pi \cdot \frac{K'}{K}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen No. 2, 7 folgt, dass

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} f(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}$$

sich nicht ändert, wenn w um $2m\pi + m_1 \cdot i\rho$ zunimmt, wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen sind; in Rücksicht auf den soeben gefundenen Werth von ρ wächst dabei

$$\frac{2K}{\pi} \cdot w \quad \text{um} \quad m \cdot 4K + m_1 \cdot 2iK'.$$

In gleicher Weise vieldeutig ist bei gegebenem ζ bekanntlich die rechte Seite der Gleichung 10.; diese Gleichung ist daher umfassend gültig, sie enthält links und rechts Grössen, die dieselben beiden Periodicitätsmoduln haben. Aus 10. folgt nun

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(w) = \sin am \frac{2K}{\pi} w,$$

also ist

$$\sin am \frac{2K}{\pi} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}.$$

Ersetzt man hier w durch $\pi w : 2K$, so ergiebt sich

12. $$\sin am\, w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Aus den Gleichungen 4. und 5. folgt

$$1 - \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = \frac{k'}{k} g(w)^2,$$

$$1 - k^2 \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = k' h(w)^2,$$

also, wenn man auch hier w durch $\pi w : 2K$ ersetzt

13. $$\cos am\, w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)},$$

14. $$\Delta\, am\, w = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Setzt man die Reihen selbst ein und bezeichnet wieder

$$e^{-\rho} = e^{-\frac{K'}{K}\pi} \text{ mit } q,$$

so erhält man

15. $$sin\, am\, w =$$
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q} \cdot sin \frac{\pi w}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\, sin \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\, sin \frac{5\pi w}{2K} - \dots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 cos \frac{3\pi w}{K} + \dots},$$

16. $$cos\, am\, w =$$
$$\sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q}\, cos \frac{\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\, cos \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \cdot cos \frac{5\pi w}{2K} + \dots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 cos \frac{3\pi w}{K} + \dots},$$

17. $$\Delta\, am\, w =$$
$$\sqrt{k'} \cdot \frac{1 + 2q\, cos \frac{\pi w}{2K} + 2q^4 cos \frac{2\pi w}{K} + 2q^9 cos \frac{6\pi w}{K} + \dots}{1 - 2q\, cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 cos \frac{6\pi w}{K} + \dots}.$$

6. Nach der Betrachtung von algebraischen Integralen, welche eine Irrationalität zweiten Grades enthalten und einfach periodische Functionen zu Umkehrungen haben, wendeten wir uns zu algebraischen Integralen mit Irrationalitäten dritten oder vierten Grades, erkannten zwei verschiedene Periodicitätsmoduln und wurden durch die Umkehrung zunächst der einfachsten Integrale dieser Art auf die doppelt periodischen Functionen geführt.

Man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen. Von der Existenz einfach periodischer Functionen ausgehend, kann man fragen, ob es auch doppelt periodische Functionen giebt. Man wird versuchen, solche Functionen durch Reihen darzustellen, deren Glieder selbst einfach periodisch sind.

Hierdurch wird man auf die Betrachtungen geführt, die wir in No. 1 angestellt haben, gelangt so zur Aufstellung der Thetafunctionen, bildet die doppelt periodischen Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ und findet dann, dass diese Thetaquotienten Umkehrungen bestimmter Integrale sind. Auf diesem Wege gelangt man sehr rasch und ohne schwierige Betrachtungen zur Kenntniss einer Fülle von Beziehungen über die doppelt periodischen Functionen; die Hauptschwierigkeit, die in der Untersuchung der Integrale complexer irrationaler Functionen liegt, erscheint erst am Schlusse. Dieser Gedankengang war vorzuziehen, so lange die Theorie der Integrale complexer Functionen noch nicht den gegenwärtigen Grad von Evidenz erreicht hatte.

7. Wir wollen nun zeigen, wie das Additionstheorem elliptischer Functionen mit Hülfe der Thetafunctionen gefunden wird*).

Aus den Gleichungen No. 3, 1. bis 4. erhalten wir, indem wir z, ζ und ρ durch $\frac{1}{2}(z+\zeta)$, $\frac{1}{2}(z-\zeta)$ und $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

*) SCHELLBACH, Die Lehre von den ell. Integralen und Thetafunctionen, § 24, u. f.

1. $\vartheta[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta_2(z)\vartheta_2(\zeta)$,
2. $\vartheta_1[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_1[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_3(z)\vartheta_2(\zeta) - \vartheta_2(z)\vartheta_3(\zeta)$,
3. $\vartheta_2[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_2[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_3(z)\vartheta_2(\zeta) + \vartheta_2(z)\vartheta_3(\zeta)$,
4. $\vartheta_3[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_3[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta_2(z)\vartheta_2(\zeta)$.

Die Substitution $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ für z und ζ liefert hieraus

5. $\vartheta_3[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta(z)\vartheta(\zeta) - \vartheta_1(z)\vartheta_1(\zeta)$,
6. $\vartheta_2[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_1[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_1(z)\vartheta(\zeta) - \vartheta(z)\vartheta_1(\zeta)$,
7. $\vartheta_1[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_2[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta_1(z)\vartheta(\zeta) + \vartheta(z)\vartheta_1(\zeta)$,
8. $\vartheta[\frac{1}{2}(z+\zeta), \frac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_3[\frac{1}{2}(z-\zeta), \frac{1}{2}\rho] = \vartheta(z)\vartheta(\zeta) + \vartheta_1(z)\vartheta_1(\zeta)$.

Ferner erhält man leicht durch Addition und Subtraction aus den Gleichungen 5. und 8., 4. und 1., indem man nachher z, ζ und ρ durch $z+\zeta$, $z-\zeta$ und 2ρ ersetzt

9. $2\vartheta(z+\zeta, 2\rho) \cdot \vartheta(z-\zeta, 2\rho) = \vartheta(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta_3(z)\vartheta(\zeta)$,
10. $2\vartheta_1(z+\zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_1(z-\zeta, 2\rho) = \vartheta(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta_3(z)\vartheta(\zeta)$,
11. $2\vartheta_2(z+\zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_2(z-\zeta, 2\rho) = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta(z)\vartheta(\zeta)$,
12. $2\vartheta_3(z+\zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_3(z-\zeta, 2\rho) = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta(z)\vartheta(\zeta)$.

Durch Specialisirung leiten wir hieraus einige brauchbare Formeln ab. Setzen wir in 9. $\zeta = 0$, so entsteht

13. $$\vartheta(z)\vartheta_3(z) = \vartheta(0, 2\rho)\vartheta(2z, 2\rho),$$

Aus 6. erhalten wir, wenn $\zeta = 0$, $2z$ für z, 2ρ für ρ gesetzt wird,

14. $$\vartheta_1(z)\vartheta_2(z) = \vartheta(0, 2\rho)\vartheta_1(2z, 2\rho).$$

Setzen wir in 6. und 3. $\zeta = z$, so folgt

15. $$\vartheta(z)\vartheta_1(z) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\rho)\vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\rho),$$
16. $$\vartheta_2(z)\vartheta_3(z) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\rho)\vartheta_2(z, \tfrac{1}{2}\rho),$$

von denen wir 15. bereits in No. 4. abgeleitet und benutzt haben. Aus den Gleichungen 5. und 8. folgt durch Multiplication

$$\vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\rho] \cdot \vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\rho) \cdot \vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\rho]$$
$$= \vartheta(z)^2\vartheta(\zeta)^2 - \vartheta_1(z)^2\vartheta_1(\zeta)^2.$$

Ersetzt man in 13. z durch $\frac{1}{2}(z+\zeta)$ und dann durch $\frac{1}{2}(z-\zeta)$, sowie ρ durch $\frac{1}{2}\rho$ und führt die Resultate in die soeben gewonnene Gleichung ein, so erhält man

17. $$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z+\zeta)\cdot\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2} = 1 - f(z)^2 \cdot f(\zeta)^2.$$

In 6. und 7. setzen wir $z+\zeta$ und $z-\zeta$ für z und ζ, und erhalten

18. $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)\vartheta_2(\zeta, \frac{1}{2}\rho) = \vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) + \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)$,
19. $\vartheta_2(z, \frac{1}{2}\rho)\vartheta_1(\zeta, \frac{1}{2}\rho) = \vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) - \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)$.

Aus 15. und 16. ziehen wir

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_1(0, \tfrac{1}{2}\rho)^2 \cdot \vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\rho)\vartheta_2(\zeta, \tfrac{1}{2}\rho) = \vartheta(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(\zeta)\vartheta_3(\zeta).$$

Da nun aus 16. folgt, wenn man z durch 0 ersetzt

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\rho)^2 = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0),$$

so geht 18. über in

20. $2\vartheta(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(\zeta)\vartheta_3(\zeta) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)[\vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) + \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)]$.

In gleicher Weise ergiebt sich aus 19.

21. $2\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)\vartheta(\zeta)\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)[\vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) - \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)]$.

Wir erhalten aus 20. zunächst

$$\vartheta(0)^2 g(0)\, h(0)\,\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[f(z+\zeta) + f(z-\zeta)]$$
$$= 2\vartheta(z)^2 \cdot \vartheta(\zeta)^2 \cdot f(z)\, g(\zeta)\, h(\zeta).$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von 17. durch $2T$, so folgt

22. $$g(0)\, h(0) \cdot T \cdot [f(z+\zeta) + f(z-\zeta)] = f(z)\, g(\zeta)\, h(\zeta).$$

Ebenso ergiebt sich aus 21.

23. $$g(0)\,h(0)\,T\,[f(z+\zeta)-f(z-\zeta)]=f(\zeta)\,g(z)\,h(z).$$

Hieraus folgt schliesslich durch Addition und Subtraction, und indem wir für T wieder seinen Werth substituiren

24. $$f(z\pm\zeta)=\frac{1}{g(0)\,h(0)}\cdot\frac{f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta)\pm f(\zeta)\,g(z)\,h(z)}{1-f(z)^2\,g(z)^2}.$$

Beachten wir, dass

$$g(0)=\sqrt{\frac{k}{k'}},\quad h(0)=\frac{1}{\sqrt{k'}},$$

und substituiren

$$f(z)=\sqrt{k}\cdot sin\,am\,\frac{2Kz}{\pi},\quad g(z)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot cos\,am\,\frac{2Kz}{\pi},$$

$$h(z)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\,am\,\frac{2Kz}{\pi},$$

so erkennen wir, dass 24. das Additionstheorem für den Amplitudensinus enthält.

8. Die Additionstheoreme für *cos amw* und *Δ amw* ergeben sich in ähnlicher Weise.

Ersetzen wir in No. 7., 9. und 10. z und ζ durch $z+\zeta$ und $z-\zeta$, so ergiebt sich

$$2\,\vartheta(2z,2\rho)\cdot\vartheta\,(2\zeta,2\rho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta),$$
$$2\vartheta_1(2z,2\rho)\cdot\vartheta_1(2\zeta,2\rho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta).$$

Aus No. 7. 13. folgt

$$\vartheta(0,2\rho)^2\cdot\vartheta(2z,2\rho)\,\vartheta(2\zeta,2\rho)=\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta).$$

Ferner folgt für $z=0$

$$\vartheta(0,2\rho)^2=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0).$$

Dies ergiebt

1. $$2\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Aus 14. ergiebt sich

$$\vartheta(0,2\rho)^2\,\vartheta_1(2z,2\rho)\,\vartheta_1(2\zeta,2\rho)=\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta),$$

und hieraus folgt weiter

2. $$2\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Aus 1. und 2. erhalten wir

$$2\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2\cdot h(z)\,h(\zeta)$$
$$=\vartheta^2(0)\,h(0)\cdot\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta)+h(z+\zeta)]$$
$$2\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2 f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)$$
$$=\vartheta(0)^2\,h(0)\cdot\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta)-h(z+\zeta)].$$

In Rücksicht auf No. 7, 17. folgt hieraus

$$h(0)\,T[h(z-\zeta)+h(z+\zeta)]=h(z)\,h(\zeta),$$
$$h(0)\,T[h(z-\zeta)-h(z+\zeta)]=f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,g(\zeta).$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$h(0)\,h(z\pm\zeta)=\frac{h(z)\,h(\zeta)\mp f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1-f(z)^2\,f(\zeta)^2};$$

dies ist das Additionstheorem für die Function *Δ amw*.

Aus No. 7, 9. und 11. folgt durch Multiplication

$$4\vartheta(z+\zeta,2\rho)\,\vartheta_2(z+\zeta,2\rho)\,\vartheta(z-\zeta,2\rho)\,\vartheta_2(z-\zeta,2\rho)=$$
$$\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,[\vartheta_3(\zeta)^2-\vartheta(\zeta)^2]+\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)\,[\vartheta_3(z)^2-\vartheta(z)^2].$$

Setzen wir in No. 7, 11. $z=\zeta$, so entsteht

$$2\vartheta_2(2z,2\rho)\,\vartheta_2(0,2\rho)=\vartheta_3(z)^2-\vartheta_3(z)^2.$$

Benutzen wir dies und No. 7, 13., so erhalten wir, wenn wir schliesslich 2ρ, $2z$, 2ζ mit ρ, $z+\zeta$, $z-\zeta$ vertauschen,

$$2\vartheta(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta)+\vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Auf gleiche Weise gelangen wir von No. 7, 10. und 12. zu

$$2\vartheta_1(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta)-\vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)].$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir in Rücksicht auf No. 7, 17

$$g(0)\,T\,[g(z-\zeta)+g(z+\zeta)]=g(z)\,g(\zeta),$$
$$g(0)\,T\,[g(z-\zeta)-g(z+\zeta)]=f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta).$$

Hieraus folgt schliesslich das Additionstheorem für die Function *cos amw* in der Form

$$g(0)\,g(z\pm\zeta)=\frac{g(z)\,g(\zeta)\mp f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1-f(z)^2\,f(\zeta)^2}.$$

§ 20. Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Produkte.

1. Eine Function $\varphi(z)$ sei eindeutig und stetig für alle Punkte im Innern einer Curve c mit Ausschluss der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_k$, in welcher φ unendlich sei.

Wir schliessen die Punkte $a_1, \ldots a_k$ durch verschwindend kleine Kreise aus; alsdann bilden c und diese Kreise zusammen die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren φ eindeutig und endlich ist. Daher ist für jeden Punkt z im Innern dieser Fläche

1 $$2\pi i\cdot\varphi(z)=\int\limits_{(c)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\int\limits_{(a_1)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\ldots-\int\limits_{(a_k)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,$$

wobei durch

$$\int\limits_{(c)},\ \int\limits_{(a_1)},\ldots\int\limits_{(a_k)}$$

Integrale über c, bez. über die Kreise um $a_1, a_2, \ldots a_k$ angedeutet sind, alle in positivem Sinne rücksichtlich der von ihnen umschlossenen Flächen.

Es sei $f(z)$ eine Function, die für alle Punkte innerhalb einer Curve c eindeutig und endlich und von Null verschieden ist, mit Ausnahme der Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k,$$

in denen sie Null, und der Punkte

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_l,$$

in denen sie unendlich gross sei. Alsdann wird $f'(z):f(z)=dlf(z):dz$ unendlich gross in den Punkten α und β; ersetzt man daher in 1. $\varphi(z)$ durch $f'(z):f(z)$, so hat man

2. $$2\pi i\frac{f'(z)}{f(z)}=\int\limits_{(c)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}-\sum_1^k{}_m\int\limits_{(\alpha_m)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}-\sum_1^l{}_n\int\limits_{(\beta_n)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}.$$

Bekanntlich ist (§ 13, 13)

$$\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}=-\frac{1}{z-\alpha}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt-\frac{1}{(z-\alpha)^2}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot(t-\alpha)\,dt$$
$$-\frac{1}{(z-\alpha)^3}\int\limits_{(\alpha)}\frac{f'(t)}{f(t)}\,(t-\alpha)^2\,dt-\ldots.$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass $(z-\alpha_k):f(z)$ für $z=\alpha_k$ endlich und von Null verschieden sei; da

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha},$$

so ist

$$\lim_{(z=\alpha)} \frac{f(z)}{z-\alpha} = f'(\alpha).$$

Nun ist

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \int_{(\alpha)} \frac{t-\alpha}{f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{t-\alpha} \cdot dt;$$

gehen wir zur Grenze für einen verschwindend kleinen Kreis über, so wird für den Perimeter desselben $(t-\alpha):f(t)$ constant gleich $1:f'(\alpha)$; ferner ist bekanntlich

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{t-\alpha}\, dt = 2\pi i f'(\alpha),$$

folglich ist

3. $$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = 2\pi i.$$

In dem Integrale

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\alpha)^p\, dt$$

substituiren wir $t = \alpha + \rho e^{i\varphi}$; hierdurch entsteht

$$\rho^p \int_{(\alpha)} e^{ip\varphi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt.$$

Das hier vorkommende Integral enthält die Elemente des Integrals 3. mit einer endlichen Grösse multiplicirt, ist also mit 3. zugleich endlich; lässt man nun ρ verschwinden, so folgt, dass

4. $$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\alpha)^p\, dt = 0,$$

für jedes positive p.

Ferner ist

5. $$\int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} \frac{1}{t-z}\, dt = -\frac{1}{z-\beta} \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt - \frac{1}{(z-\beta)^2} \cdot \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)\, dt$$
$$- \frac{1}{(z-\beta)^3} \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)^2\, dt - \ldots$$

Wir machen nun die zweite Voraussetzung, dass $f(z)\cdot(z-\beta_k)$ für $z=\beta_k$ bei jedem Werthe von k eine endliche und von Null verschiedene Grösse sei. Substituiren wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)},$$

so ist also $(z-\beta_k):g(z)$ für $z=\beta_k$ endlich und von Null verschieden; da nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{g'(z)}{g(z)},$$

so ist

6. $$\int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = -\int_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot dt = -2\pi i,$$

und

7. $$\int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)^p\, dt = -\int_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} (t-\beta)^p\, dt = 0, \quad p > 0.$$

Aus 2. bis 7. folgt schliesslich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{z-\alpha_k}$$
$$- \frac{1}{z-\beta_1} - \frac{1}{z-\beta_2} - \ldots - \frac{1}{z-\beta_l}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$lf(z) = \int U dz + lC \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_l)},$$

oder

8. $$f(z) = C \cdot e^{\int U dz} \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_l)},$$

wobei zur Abkürzung

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}$$

gesetzt worden ist.

Wenn nun die Anzahl der Punkte α und β unendlich gross ist und keine endliche Curve alle diese Punkte einschliesst, so kann man die Curve c nach einem bestimmten, willkürlich gewählten Gesetze unendlich erweitern; von diesem Gesetze wird dann im Allgemeinen der Grenzwerth abhängen, gegen den das Integral $\int U dz$ convergirt; gleichzeitig hängt von diesem Gesetze auch die Anordnung ab, nach welcher neue Faktorengruppen in den Zähler und Nenner des Produktes 8. eintreten. Wir erkennen so die Möglichkeit, dass je nach der Wahl dieses Gesetzes verschiedene Entwicklungen derselben Function in Form eines unendlichen Produktes erhalten werden können, indem dabei die Art und Weise, nach welcher die Anzahl der Faktoren des Nenners zugleich mit denen des Zählers unendlich wächst, verschieden ist.

Die Constante C kann aus Formel 8. eliminirt werden mit Hülfe des Werthes, den die Function $f(z)$ für irgend einen bestimmten Werth der Variabeln $z = z_0$ annimmt. Man erhält

9. $$f(z) = f(z_0) \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_k)}{(z_0-\alpha_1)(z_0-\alpha_2)\ldots(z_0-\alpha_k)} \cdot \frac{(z_0-\beta_1)(z_0-\beta_2)\ldots(z_0-\beta_l)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_l)} \cdot e^{\int_{z_0}^{z} U dz}.$$

2. Wir wenden diese Entwicklung zunächst auf die Function $f(z) = \sin z$ an.

Der Sinus von z wird nur für ein unendlich grosses imaginäres z unendlich, und verschwindet für

$$z = m\pi,$$

wobei m alle realen ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Wir wählen zur Curve c ein Rechteck, dessen Länge der realen Achse parallel ist, und das symmetrisch zu den Achsen liegt; die beiden zur realen Achse normalen Seiten legen wir durch Punkte, in denen $\sin z$ nicht verschwindet.

Die Seiten des Rechtecks nehmen wir unendlich fern an.

Für das Integral U haben wir

$$2\pi i \cdot U = \int_{(c)} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{t-z}.$$

Für alle Punkte auf dem Perimeter des Rechtecks ist t unendlich gross; daher kann in dem Integrale

$$t - z = t\left(1 - \frac{z}{t}\right)$$

durch t ersetzt werden. In je zwei Punkten des Perimeters, die auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, haben t, $sin\,t$, dt entgegengesetzt gleiche Werthe, $cos\,t$ denselben Werth, mithin

$$\frac{cos\,t}{sin\,t} \cdot \frac{dt}{t}$$

entgegengesetzt gleiche Werthe; folglich zerstören sich je zwei zu Gegenpunkten gehörige Elemente des Integrales U und es ist somit

$$U = 0\,.$$

Wir erhalten daher, indem wir die zu entgegengesetzten m gehörigen Faktoren vereinigen

$$\frac{sin\,z}{sin\,z_0} = \frac{z}{z_0} \cdot \frac{(z^2 - \pi^2)(z^2 - 4\pi^2)(z^2 - 9\pi^2)\ldots}{(z_0^2 - \pi^2)(z_0^2 - 4\pi^2)(z_0^2 - 9\pi^2)\ldots}\,.$$

Setzen wir $z_0 = 0$ und machen von dem Grenzwerthe Gebrauch

$$\left(\frac{sin\,z}{z}\right)_{z=0} = 1\,,$$

so erhalten wir

1. $$sin\,z = z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots\,,$$

gültig für jedes endliche z. Diese Gleichung können wir durch folgende ersetzen:

2. $$\frac{sin\,\pi z}{\pi z} = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right),$$

wobei das Zeichen $\prod\limits_1^{\infty}$ bedeutet, dass alle Faktoren der Form

$$1 - \frac{z^2}{\mu^2}$$

für $\mu = 1$ bis $\mu = \infty$ zu multipliciren sind.

Wird unter

$$\prod_{-m}^{m} f(m)$$

das Produkt aller Faktoren $f(m)\,f(-m)$ für alle Werthe $m = 1$ bis $m = \infty$ verstanden, so ist

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+\alpha}\right) = \prod_{-m}^{m}\frac{m+\alpha-z}{m+\alpha} = \prod_{-m}^{m}\frac{1 + \dfrac{\alpha - z}{m}}{1 + \dfrac{\alpha}{m}}\,.$$

Also folgt

3. $$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+\alpha}\right) = \frac{sin\,\pi(\alpha - z)}{sin\,\alpha\pi}\,.$$

3. Die Function $sin\,am\,z$ wird Null für

$$z = 2m \cdot K + 2n \cdot K'i\,,$$

und wird unendlich gross für

$$z = 2mK + (2n+1) \cdot K'i\,,$$

daher ist die Function

$$sin\,am\,\frac{2K}{\pi}z \begin{cases} = 0\,, & \text{wenn } z = m\pi + n\tau\,, \\ = \infty\,, & \;\;,, \;\; z = m\pi + (n + \tfrac{1}{2})\tau\,, \end{cases}$$

wobei

$$\tau = i \cdot \frac{\pi K'}{K}\,.$$

Die Voraussetzungen, unter welchen die in No. 1 angewandte Verwandlung gilt, sind hier erfüllt; denn es ist

$$\lim_{z=0}\frac{z}{sin\,am\dfrac{2Kz}{\pi}} = \pm \lim\frac{z - m\pi - n\tau}{sin\,am\dfrac{2K}{\pi}(z - m\pi - n\tau)} = \frac{\pi}{2K}\,,$$

da bekanntlich

$$\lim_{z=0}\frac{sin\,am\,z}{z} = 1\,.$$

Ferner ist

$$\lim_{z=iK'}(z - iK')\,sin\,am\,z = \lim_{\zeta=0}\zeta\,sin\,am\,(\zeta + iK')$$

$$= \lim_{\zeta=0}\frac{1}{k} \cdot \frac{\zeta}{sin\,am\,\zeta} = \frac{1}{k}\,.$$

Da nun

$$z - \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2K}\left(\frac{2K}{\pi}z - K'i\right),$$

so folgt zunächst, dass

$$\lim_{z=\frac{\tau}{2}}\left(z - \frac{\tau}{2}\right)sin\,am\,\frac{2Kz}{\pi} = \frac{\pi}{2kK}\,.$$

Da ferner

$$sin\,am\,\frac{2Kz}{\pi} = \pm\, sin\,\frac{2K}{\pi}\left[z - m\pi - (n + \tfrac{1}{2})\tau\right],$$

so folgt

$$\lim_{z=\beta}(z - \beta) \cdot sin\,am\,\frac{2Kz}{\pi} = \pm\frac{\pi}{2kK}\,,$$

wobei $m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau$ durch β bezeichnet worden ist.

Als Curve c wählen wir ein Rechteck mit unendlich fernen Seiten, das zu den Achsen symmetrisch liegt, und dessen Umfang keinen Punkt enthält, in welchem $sin\,am\,\frac{2K}{\pi}z$ verschwindet oder unendlich gross ist. Alsdann ist

$$sin\,am\,\frac{2K}{\pi}z = Cz \cdot \frac{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n}^{n}(z - m\pi - n\tau)}{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n-1}^{n}(z - m\pi - [n + \frac{1}{2}]\tau)} \cdot E\,,$$

wobei E die als Faktor auftretende Exponentialgrösse bezeichnet. Hierbei ist noch zu bemerken, dass im Zähler m und n nicht gleichzeitig Nnll sein dürfen; der hierzugehörige Faktor z ist vorausgeschickt worden. Ferner soll mit

$$\prod_{-n-1}^{n}$$

das Produkt bezeichnet werden, das entsteht, wenn man jedem Faktor mit dem positiven Werthe n den Faktor zuordnet, in welchem n durch $-n-1$ ersetzt ist.

Setzen wir, um C zu entfernen, $z = 0$, so erhalten wir

1. $$sin\,am\,\frac{2K}{\pi}z = \frac{2K}{\pi}z \cdot \frac{\prod\prod\left(1 - \dfrac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod\prod\left(1 - \dfrac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right)} \cdot E\,.$$

Wir haben nun über den Werth des in E vorkommenden Integrals zu entscheiden

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cos am \frac{2Kt}{\pi}}{\sin am \frac{2Kt}{\pi}} \cdot \frac{dt}{\tau - z};$$

dasselbe erledigt sich ebenso, wie das entsprechende Integral bei der Entwicklung von $\sin z$.

Für jedes endliche z kann $1 : (t - z)$ in allen Punkten des unendlich fernen Rechtecks c durch $1 : t$ ersetzt werden. In Gegenpunkten des Rechtecks hat $\cos am \frac{2Kt}{\pi}$ denselben Werth, $\sin am \frac{2Kt}{\pi}$, t und dt haben entgegengesetzt gleiche Werthe; es zerstören sich mithin die zu je zwei Gegenpunkten gehörigen Elemente des Integrals U, und daher ist $U = 0$ und $E = 1$.

Hieraus folgt

2. $$\sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2K}{\pi} z \cdot \frac{\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right)},$$

wobei m und n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ anzunehmen haben, mit der Beschränkung, dass im Zähler m und n nicht zugleich Null sein dürfen. Vorläufig ist dabei noch die aus der Herleitung fliessende Bedingung zu beachten, dass man, im Zähler und Nenner immer bis zu denselben Werthen von m und n zu gehen hat.

4. Wir werden nun nachweisen, dass die unendlichen Produkte im Zähler und im Nenner einzeln convergent sind; damit wird dann die soeben hervorgehobene Beschränkung gegenstandslos, denn der Grenzwerth des Quotienten der unendlichen Produkte ist dann unabhängig davon, wie man im Zähler und Nenner m und n unendlich wachsen lässt, und ist einfach gleich dem Quotienten aus dem Grenzwerthe des Zählers und dem Grenzwerthe des Nenners. Wir setzen

$$\frac{2K}{\pi} z \cdot \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \theta_1(z),$$

$$\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right) = \theta(z)$$

und untersuchen diese beiden Functionen. Bilden wir in $\theta_1(z)$ das Produkt aller Faktoren, für die n einen gegebenen von Null verschiedenen Werth hat, so erhalten wir nach No. 2, 3

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau};$$

die Faktoren, für welche $n = 0$ ist, geben

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) = \frac{\sin z}{z};$$

daher ist

$$\theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \sin z \cdot \prod_{-n}^{n}\frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau}.$$

Nach der gleichmässig für reale und complexe Bogen gültigen Gleichung

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

ist $$\sin(n\tau - z) \cdot \sin(-n\tau - z) = \tfrac{1}{2}(\cos 2n\tau - \cos 2z).$$

Benutzt man

$$\cos 2n\tau = \tfrac{1}{2}(e^{2in\tau} + e^{-2in\tau}),$$

$$\sin n\tau \cdot \sin(-n\tau) = \tfrac{1}{4}(1 - e^{2in\tau})^2 e^{-2in\tau},$$

und setzt $e^{i\tau} = q$, so erhält man

1. $$\theta_1(z) = \frac{2K}{\pi}\sin z \cdot \prod_{1}^{\infty}\frac{1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2},$$

$$= \frac{2K}{\pi}\sin z \cdot \frac{(1 - 2q^2\cos 2z + q^4)(1 - 2q^4\cos 2z + q^8)(1 - 2q^6\cos 2z + q^{12})\ldots}{(1 - q^2)^2(1 - q^4)^2(1 - q^6)^2 \ldots\ldots}.$$

Da $i\tau = -\pi K' : K$, so ist

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ein realer echter Bruch, folglich der Nenner

$$(1 - q^2)^2(1 - q^4)^2(1 - q^6)^2 \ldots\ldots$$

convergent.

Das unendliche Produkt im Zähler ist von der Form

$$(1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3) \ldots\ldots;$$

dasselbe convergirt bekanntlich, wenn die Reihe

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots$$

convergirt, und diese convergirt mit der Reihe

$$mod\, z_1 + mod\, z_2 + mod\, z_3 + \ldots$$

Es kommt daher in unserm Falle auf die Reihe der Moduln an

$$mod(q^{4n} - 2q^{2n}\cos 2z) = q^{2n} mod(q^{2n} - 2\cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarten Glieder der Reihe dieser Moduln ist

$$q^2 \cdot mod\frac{q^{2n+2} - 2\cos 2z}{q^{2n} - 2\cos 2z}.$$

Wächst n unbegrenzt, so nähert sich diese Zahl dem Grenzwerthe q^2; da nun $q^2 < 1$, so folgt, dass die Reihe der Moduln und mithin auch das unendliche Produkt im Zähler convergirt.

Hiermit ist bewiesen, dass $\theta_1(z)$ für jedes endliche z convergirt.

In dem unendlichen Produkte $\theta(z)$ nehmen wir ebenfalls alle Faktoren zusammen, die zu einem gegebenen n gehören; das Produkt derselben ist

$$\prod_{-m}^{m}\left[1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right] = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}.$$

Daher ist

$$\theta(z) = \prod_{-n-1}^{n}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}.$$

Das Produkt zweier zusammengehörigen Faktoren ist

$$\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]\sin[(-n-\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau \sin(-n-\frac{1}{2})\tau}.$$

Dieselben goniometrischen Formeln, die bei der Reduction von $\theta_1(z)$ angewandt worden sind, liefern jetzt

$$\frac{1 - 2q^{2n+1}\cos 2z + q^{4n+2}}{(1 - q^{2n+1})^2}.$$

Folglich ist

$$\theta(z) = \frac{(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6)(1 - 2q^5\cos 2z + q^{10})\ \ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ \ldots\ldots}.$$

Die Convergenz des Nenners erhellt ohne Weiteres; die des Zählers hängt von der Convergenz der Modul-Reihe ab, deren allgemeines Glied ist

$$q^{2n+1} \operatorname{mod}(q^{2n+1} - 2\cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarter Glieder

$$q^2 \operatorname{mod} \frac{q^{2n+3} - 2\cos 2z}{q^{2n+1} - 2\cos 2z}$$

hat den Grenzwerth q^2, folglich convergirt $\theta_1(z)$.

Wir haben somit schliesslich die für jedes endliche z gültige Entwicklung

2. $$\sin am \frac{2K}{\pi} z$$

$$= \frac{2K}{\pi} \sin z \cdot \frac{(1 - 2q^2\cos 2z + q^4)(1 - 2q^4\cos 2z + q^8)(1 - 2q^6\cos 2z + q^{12})\ \ldots}{(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6)(1 - 2q^5\cos 2z + q^{10})\ \ldots}$$
$$\cdot \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ \ldots .}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ \ldots}.$$

5. Zwischen den beiden Functionen $\theta(z)$ und $\theta_1(z)$ findet ein einfacher Zusammenhang statt, den wir zunächst aufdecken wollen. Es ist

$$\theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right].$$

Wir wollen die Combination $m = 0$, $n = 0$ ausschliessen; dem zugehörigen Faktor $2z : \tau$ müssen wir dann voranstellen und haben alsdann

1. $$\theta(z + \tfrac{1}{2}\tau) = -\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right].$$

Da nun

$$1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau} = \frac{m\pi + n\tau - z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau} = \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right),$$

so ist

2. $$\theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right).$$

In dem für ein gegebenes von Null verschiedenes m gebildeten Produkte

$$\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)$$

hat n die Werthe anzunehmen

$$\begin{cases} \dfrac{0}{-1}, & \dfrac{1}{-2}, & \dfrac{2}{-3}, & \dfrac{3}{-4}, & \ldots \end{cases}$$

während für das Produkt

$$\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)$$

die Werthe für n sind

$$\left\{0;\ \frac{1}{-1};\ \frac{2}{-2};\ \frac{3}{-3};\ \ldots\right.$$

Hieraus folgt

3. $$\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right),$$
$$\prod_{-n-1}^{n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{-n}^{n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right).$$

Ist $m = 0$, so ändern sich die Werthsysteme für n nur insofern, als die Werthe 0 in beiden wegfallen; die Gleichungen 3. gelten also auch für diesen Fall. Aus 3. folgt weiter

4. $$\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right),$$
$$\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right).$$

Nach No. 2, 3 ist

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right) = \frac{\sin(z + n\tau)}{\sin n\tau} = \frac{e^{i(z+n\tau)} - e^{-i(z+n\tau)}}{e^{in\tau} - e^{-in\tau}},$$
$$= \frac{e^{iz} \cdot e^{2in\tau} - e^{-iz}}{e^{2in\tau} - 1}.$$

Da $i\tau$ eine negative Zahl, nämlich $-\pi K' : K$, ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right) = e^{-iz};$$

ebenso ist

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right) = e^{\frac{1}{2}i\tau}.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

5. $$\theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\theta_1(z)}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)} \cdot e^{-i(z + \frac{\tau}{2})}.$$

Ersetzt man hier z durch $(z - \frac{1}{2}\tau)$, so erhält man

6. $$\theta(z) = \frac{e^{-iz}}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1(z - \tfrac{1}{2}\tau).$$

Die Function $\theta_1(z)$ geht also bis auf einen bestimmten Faktor in $\theta(z)$ über, wenn man z durch $(z - \frac{1}{2}\tau)$ ersetzt.

Ersetzt man z durch $-z$ und beachtet, dass

$$\theta(-z) = \theta(z), \quad \theta_1(-z) = -\theta_1(z),$$

so entsteht aus 5. und 6.

7. $$\theta(z - \tfrac{1}{2}\tau) = \frac{e^{i(z - \frac{\tau}{2})}}{\theta(\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1(z).$$

8. $$\theta(z) = \frac{e^{iz}}{\theta_1(\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1(z + \tfrac{1}{2}\tau).$$

Ersetzt man in 6. z durch $z + \tau$ und benutzt 8., so entsteht

9. $$\theta(z + \tau) = -e^{-i(iz+\tau)}\,\theta(z).$$

6. Die Function $\theta(z)$ ist periodisch und hat die Periode π, sie ist ferner

endlich für jedes endliche z; hieraus folgt, dass sich $\Theta(z)$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lässt, die für jedes endliche z gilt, und die Form hat

$$\Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{n \cdot 2iz}.$$

Ebenso, wie die Entwicklung einer Function nach steigenden und fallenden Potenzen der Variabeln nur in einer Weise möglich ist, kann auch die damit engstens zusammenhängende Entwicklung in einer Fourier'schen Reihe nur in einer Weise existiren. Wenn daher zwei Entwicklungen derselben Function vorliegen

$$f(z) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2iz} = \Sigma B_n e^{n \cdot 2iz},$$

so folgt

$$A_n = B_n$$

für jeden Werth von n.

Mit Hülfe dieser Bemerkung und der Functionalgleichung No. 5, 9 sind wir im Stande, die Coefficienten A_n zu bestimmen, bis auf einen constanten allen gemeinsamen Faktor. Ersetzen wir in der Gleichung

$$\Theta(z) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2iz}$$

die Variable z durch $z + \tau$, so entsteht

$$\Theta(z + \tau) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2i\tau} \cdot e^{n \cdot 2iz},$$

aus No. 5, 9 folgt ferner

$$\Theta(z + \tau) = \Sigma(- A_n) \cdot e^{-i\tau} \cdot e^{(n-1) \cdot 2iz}.$$

Vergleichen wir in diesen beiden Entwicklungen die Coefficienten $e^{n \cdot 2iz}$, so folgt

$$A_n e^{n \cdot 2i\tau} = - A_{n+1} e^{-i\tau},$$

oder

$$A_n e^{-n^2 \cdot i\tau} = - A_{n+1} \cdot e^{-(n+1)^2 \cdot i\tau};$$

dies ergiebt

$$A_n e^{-n^2 \cdot i\tau} = (- 1)^n A,$$

wobei A eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet.

Wir haben somit den Satz: Jede eindeutige Function, die die reale Periode π hat, der Functionalgleichung genügt

$$f(z + \tau) = - e^{i(2z+\tau)} f(z),$$

und für jedes endliche z endlich ist, giebt die Fourier'sche Entwicklung

$$A \sum_{-\infty}^{+\infty} (- 1)^n e^{n^2 \cdot i\tau + 2n \cdot iz},$$

wo alles bis auf A völlig bestimmt ist; jede solche Function ist daher von $\Theta(z)$ nur durch einen constanten Faktor verschieden.

7. Setzen wir $- i\tau = \rho$, also $\tau = i\rho$, und vertauschen wir n mit $- n$, so erhalten wir sofort die Beziehung

1. $$\Theta(z) = A \cdot \vartheta(z).$$

diese Gleichung lehrt, die fundamentale Thetafunction $\vartheta(z)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln; die Verwandlung ist bis auf einen Zahlenfaktor A geleistet, der noch bestimmt werden muss. Setzen wir $z = 0$, so entsteht

$$\Theta(0) = A \cdot \vartheta(0).$$

Da nun $\Theta(0) = 1$, so folgt

2. $$\Theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)} \cdot \vartheta(z).$$

Nach No. 5, 5 ist

$$\Theta(z + \tfrac{1}{2} i\rho) = \frac{e^{-i(z + \frac{1}{2} i\rho)}}{\Theta_1(- \frac{1}{2} i\rho)} \Theta_1(z);$$

da nun bekanntlich

$$\vartheta(z + \tfrac{1}{2} i\rho) = i \cdot e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_1(z),$$

so folgt

3. $$\Theta_1(z) = ie^{-\frac{1}{4}\rho} \cdot \frac{\Theta_1(- \frac{1}{2} i\rho)}{\vartheta(0)} \vartheta_1(z).$$

Setzen wir in dem Quotienten

$$\frac{\Theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2Kz}{\pi} \cdot \frac{\prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\vartheta_1(z)}$$

$$= \frac{2K}{\pi} \cdot \prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \frac{\vartheta_1(z)}{z}$$

$z = 0$, so erhalten wir

4. $$\lim \frac{\Theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)}.$$

Da nun nach 3. das Verhältniss $\Theta_1(z) : \vartheta_1(z)$ constant ist, so folgt schliesslich

5. $$\Theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(z).$$

Hierdurch ist die Function $\vartheta_1(z)$ durch das unendliche Produkt $\Theta_1(z)$ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie $\vartheta(0)$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt werden kann. Nach 2. ist

$$\frac{(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6)(1 - 2q^5 \cos 2z + q^{10}) \ldots}{(1 - q)^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^5)^2 \ldots} = \frac{1}{\vartheta(0)} \vartheta(z).$$

Wir setzen

6. $$\frac{1}{\vartheta(0)} \cdot (1 - q)^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^5)^2 \ldots = R(q),$$

und haben somit

$$(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6) \ldots$$
$$= R(q)(1 - 2q\cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \ldots).$$

Ersetzen wir hier z durch $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht

7. $$R(q) = \frac{1}{\vartheta_3(0)} (1 + q)^2 (1 + q^3)^2 (1 + q^5)^2 \ldots$$

Aus 6. und 7. folgt durch Multiplication

8. $$R(q)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)} \cdot (1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \ldots$$

Setzen wir in 6. q^2 statt q, also 2ρ statt ρ, so erhalten wir

9. $$R(q^2) = \frac{1}{\vartheta(0, 2\rho)} (1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \ldots$$

Nun ist nach § 19, No. 7, 13 für $z = 0$

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 = \vartheta(0)\vartheta_3(0),$$

mithin

10. $$R(q^2)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)} (1 - q^2)^4 (1 - q^6)^4 (1 - q^{10})^4 \ldots$$

Durch Division folgt aus 8. und 10.

$$\left[\frac{R(q)}{R(q^2)}\right]^2 = \frac{1}{(1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \ldots},$$

$$\frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{1}{(1 - q^2)(1 - q^6)(1 - q^{10}) \ldots}.$$

Hierfür schreiben wir

11. $$\frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-{}^{16})\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})\ldots}.$$

Ersetzen wir hier der Reihe nach q durch $q^2, q^4, q^8, q^{16}, \ldots$ multipliciren alle Resultate und bemerken, dass nach 6.

$$\lim_{n=\infty} R(q^n) = 1,$$

und dass

$$\lim_{n=\infty}(1-q^{1\cdot 2^n})(1-q^{2\cdot 2^n})(1-q^{3\cdot 2^n})(1-q^{4\cdot 2^n})\ldots = 1,$$

so erhalten wir aus 11.

12. $$R(q) = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}.$$

Hieraus ergiebt sich nach 6.

13. $$\vartheta(0) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots\ldots(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.$$

Benutzt man die Identität

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots},$$

so kann man statt 13. auch schreiben

14. $$\vartheta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots}.$$

8. Vergleichen wir die beiden Entwicklungen

1. $$\sin am\frac{2K}{\pi}z = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)},$$

und

$$\sin am\frac{2K}{\pi}z = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \text{d. i. nach No. 7, 2. und 5.}$$
$$= \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)},$$

so folgt die Gleichung

2. $$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)},$$

die auch aus 1. für $z = 0$ hervorgeht.

Aus No. 7, 3 und 5 folgt

3. $$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\vartheta_1'(0)} = i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\Theta_1(-\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(0)}.$$

Der besondere Werth $\Theta_1(-\frac{1}{2}i\rho)$ ergiebt sich aus $\Theta_1(z)$ wie folgt. Es ist

$$\cos(-i\rho) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{\frac{-\pi K'}{K}}\right) = \tfrac{1}{2}(q^{-1}+q),$$

$$\sin(-\tfrac{1}{2}i\rho) = \frac{1}{2i}(q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2i}q^{-\frac{1}{2}}(1-q),$$

folglich ist

$$(1-2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}) = 1 - q^{2n-1} - q^{2n+1} + q^{4n}$$
$$= (1-q^{2n-1})(1-q^{2n+1}).$$

Hieraus ergiebt sich (No. 4, 1)

$$i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\Theta_1\left(-\frac{i\rho}{2}\right) = \frac{K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\cdot(1-q)\cdot\frac{(1-q)(1-q^3)\cdot(1-q^3)(1-q^5\ldots.}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2}$$
$$= \frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\,\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}.$$

Daher ist nach 3.

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta'(0)} = \frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\,\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots},$$

und nach 2.

4. $$\frac{K\sqrt{k}}{\pi} = \sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}.$$

Dies führen wir in No. 4, 2 ein und erhalten

5. $$\sin am\frac{2K}{\pi}z = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cdot\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}.$$

9. Um auch für die Functionen

$$\cos am\frac{2K}{\pi}z \quad\text{und}\quad \Delta am\frac{2K}{\pi}z$$

unendliche Produkte zu erhalten, ersetzen wir zunächst in No. 7, 5 die Variable z durch $\frac{1}{2}\pi - z$. Hierdurch erhalten wir, wenn wir No. 8, 2 berücksichtigen

1. $$\Theta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\vartheta_2(z);$$

in Verbindung mit No. 7, 2

$$\Theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)}\vartheta(z),$$

und

$$\cos am\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert 1.

$$\cos am\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(\frac{1}{2}\pi - z)}{\Theta(z)}$$
$$= \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}\cdot\cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}\cdot\frac{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^8)^2\ldots}.$$

Benutzt man No. 8, 4, so erhält man einfacher

2. $$\cos am\frac{2K}{\pi}z = 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot\cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\ldots}.$$

Wir ersetzen ferner in No. 7, 2 z durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und erhalten

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)}\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)}\cdot\vartheta_3(z).$$

In Verbindung mit No. 7, 2 und

$$\Delta am\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert dies

3. $$\Delta am\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(\frac{1}{2}\pi - z)}{\Theta(z)}$$
$$= \sqrt{k'}\cdot\frac{(1+2q\cos 2z+q^2)(1+2q^3\cos 2z+q^6)(1+2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}.$$

Die Gleichungen 2. und 3. ergeben für $z = 0$

4. $$\sqrt{\frac{k}{k'}} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1-q)^2\,(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots},$$

5. $$\sqrt{k'} = \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots}.$$

Aus 4. und 5. folgt

6. $$\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1+q)^2\,(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots},$$

7. $$\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi} = \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots},$$

8. $$\frac{2K}{\pi} = \frac{(1+q)^2(1-q^2)^2(1+q^3)^2(1-q^4)^2\dots}{(1-q)^2(1+q^2)^2(1-q^3)^2(1+q^4)^2\dots} \text{*)}.$$

Aus 7. und 5. folgt durch Multiplication
$$\frac{2KK'}{\pi} = \frac{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)^2(1-q^4)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^2)^2(1+q^3)^2(1+q^4)^2\dots}.$$
Vergleicht man dies mit No. 7, 14, so erhält man

9. $$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}.$$

Die Nullwerthe von ϑ_2 und ϑ_3 können durch die Constanten des elliptischen Integrals ausgedrückt werden, indem man 9. mit den beiden Gleichungen verbindet
$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}.$$
Aus der letzteren folgt zunächst

10. $$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

und hieraus weiter

11. $$\vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

---

10. Die Thetafunctionen geben brauchbare Mittel zur numerischen Berechnung elliptischer Functionen.

Zu einem gegebenen Modul k hat man zunächst die Zahl q zu berechnen. Dazu geht man am zweckmässigsten von der Formel aus
$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16}\dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16}\dots}.$$
Hieraus folgt
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots}.$$
Bezeichnet man die bekannte linke Seite mit λ und führt die Division rechts aus, so entsteht

1. $$\lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + \dots$$

Setzen wir $q = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots$ in diese Gleichung ein, so bestimmen sich $a_1, a_2, a_3 \dots$ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ. Zunächst erkennen wir leicht, dass mehrere der a verschwinden. Da q^5 mit λ^5 beginnt, so folgt
$$a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$
also ist q von der Form
$$q = a_1\lambda + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 + \dots.$$
Dann enthält aber q^5 nur die Potenzen $\lambda^5, \lambda^9, \dots$, und q^9 beginnt mit λ^9, folglich ist
$$a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$
Nun enthält q die Potenzen $\lambda, \lambda^5, \lambda^9, \dots,$

q^5 „ „ $\lambda^5, \lambda^9, \lambda^{13} \dots,$

q^9 „ „ $\lambda^9, \lambda^{13} \dots,$

folglich ist $$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0.$$
Hieraus geht hervor, dass in q^5, q^9 und q^{13} hinter λ^{13} sofort λ^{17} folgt, also ist
$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0.$$

*) Weitere verwandte Formeln s. JACOBI, Fundamenta nova, pag. 84 u. f.

Dies bedingt wieder, dass in q^5, q^9, q^{13}, q^{17} nach λ^{17} sofort λ^{21} kommt, es ist daher
$$a_{18} = a_{19} = a_{20} = 0;$$
mithin ist q von der Form

2. $$q = a\lambda + b\lambda^5 + c\lambda^9 + d\lambda^{13} + e\lambda^{17} + f\lambda^{21} + \dots$$

Anstatt dies in 1. einzuführen, ist es zweckmässiger, für λ aus 1. den Werth in 2. einzusetzen. Man bildet zu diesem Zwecke
$$\begin{aligned}
\lambda^5 &= q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17} + 1420q^{21} - \dots,\\
\lambda^9 &= + q^9 - 18q^{13} + 189q^{17} - 800q^{21} + \dots,\\
\lambda^{13} &= + q^{13} - 26q^{17} + 65q^{21} - \dots,\\
\lambda^{17} &= \phantom{q^5 - 10q^9 + 65q^{13}} + q^{17} - 34q^{21} + \dots,\\
\lambda^{21} &= \phantom{q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17}} + q^{21} - \dots,
\end{aligned}$$
und erhält die Gleichungen
$$a = 1, \quad -2 + b = 0, \quad 5 - 10b + c = 0,$$
$$-10 + 65b - 18c + d = 0, \quad 18 - 330b + 189c - 26d + e = 0,$$
$$-32 + 1420b - 800c + 65d - 34e + f = 0.$$
Diese Gleichungen ergeben
$$b = 2, \quad c = 15, \quad d = 150, \quad e = 1707, \quad f = 57470,$$
also ist

3. $$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 57470\lambda^{21} + \dots$$

Für eine Genauigkeit bis zur fünften Decimalstelle genügen die ersten beiden Glieder dieser Gleichung, sobald
$$15\lambda^9 < 0{,}00001, \quad \text{also} \quad \lambda \leqq 0{,}2.$$
Hieraus ergiebt sich
$$\sqrt{k'} > \frac{3}{7}, \quad k \leqq 0{,}983.$$
Die ersten drei Glieder genügen bei einer Genauigkeit bis zur sechsten Stelle, wenn
$$150\lambda^{13} < \frac{1}{10^6}, \quad \text{also} \quad \lambda \leqq 0{,}28,$$
$$\sqrt{k'} > \frac{11}{39}, \quad k < 0{,}992,$$
und bei einer Genauigkeit bis zur fünften Stelle, wenn
$$k < 0{,}9995.$$
Aus q findet man K (wenn man nicht vorzieht, K aus k nach den früher mitgetheilten Methoden direkt zu berechnen) aus der ausserordentlich rasch convergirenden Entwicklung No. 9, 9
$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots$$
Da q selbst für grosse k stark von 1 abweicht, so genügen in den meisten Fällen die ersten drei Glieder. Schliesslich findet man *sin am w*, *cos am w*, *Δ am w* aus den ebenfalls sehr rasch convergirenden Thetaquotienten § 19, No. 5, 15, 16 und 17.

Man kann diese Gleichungen auch dazu verwenden, w zu finden, wenn *sin am w*, *cos am w* oder *Δ am w* gegeben sind, also dazu, ein elliptisches Integral erster Art aus dem Modul und der Amplitude zu berechnen. Wir bedienen uns dazu am zweckmässigsten der Gleichung

5. $$\Delta am\, w = \sqrt{k'} \cdot \frac{1 + 2q \cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi w}{K} + \ldots}{1 - 2q \cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi w}{K} - \ldots}.$$

Setzen wir $\pi w : K = v$, so folgt

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\Delta am\, w - \sqrt{k'}}{\Delta am\, w + \sqrt{k'}} = \frac{\cos 2v + q^8 \cos 6v + q^{24} \cos 10v + \ldots}{1 + 2q^4 \cos 4v + 2q^{16} \cos 8v + \ldots}.$$

Die linke Seite ist bekannt; wir bezeichnen sie mit δ und erhalten

$$\cos 2v = \delta(1 + 2q^4 \cos 4v + 2q^{16} \cos 8v + \ldots) - (q^8 \cos 6v + q^{24} \cos 10v + \ldots).$$

In den meisten Fällen ist q so klein, dass $2q^4$ vernachlässigt werden kann; alsdann hat man einfach

6. $$\cos 2v = \delta.$$

Ist dieser Werth nicht hinlänglich genau, so benutzt man ihn als erste Annäherung und berechnet einen genaueren Werth v' nach

7. $$\cos 2v' = \delta(1 + 2q^4 \cos 4v + 2q^{16} \cos 8v + \ldots) - (q^8 \cos 6v + q^{24} \cos 10v + \ldots).$$

Wenn δ nicht sehr klein ist, so stimmt das Vorzeichen von $\cos 2v - \delta$ mit dem von $2\delta q^4 \cos 4v$ überein. Ist nun $2\delta q^4 \cos 4v$ positiv, so ist der aus 6. folgende Werth von $\cos 2v$ zu klein, der aus 7. folgende Werth grösser, aber immer noch zu klein; ist dagegen $2\delta q^4 \cos 4v$ negativ, so ergiebt sich $\cos 2v$ aus 6 zu gross; die aus 7. folgende zweite Annäherung ist zwar kleiner, aber immer noch zu gross; denn $2v$ ist spitz und $4v$ ist nach der Voraussetzung stumpf. In beiden Fällen erhält man durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 7. eine Reihe von Werthen $v', v'', v''', \ldots$ die sich dem richtigen Werthe immer mehr nähern. In sehr vielen Fällen wird v' bereits genau genug sein.

§ 21. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art.

1. Die Integrale zweiter und dritter Art § 17, No. 8, 9

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz \quad \text{und} \quad \int_0^z \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

werden nach Jacobi*) als elliptische Functionen betrachtet, indem man eine neue Variable w durch die Gleichung einführt

$$z = \sin am w, \text{ also } w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Durch diese Substitution ergiebt sich

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz = \int \Delta^2 am w\, dw.$$

Jacobi bezeichnet das letztere Integral, zwischen den Grenzen 0 und w genommen, als Integral zweiter Art; wir schreiben dafür $\mathfrak{E}(w)$ und haben daher

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am w\, dw.$$

Ersetzt man $\Delta am w$ durch $\sin am w$, so folgt

*) Jacobi, Fundamenta nova, § 47.

$$\mathfrak{E}(w) = w - \int_0^w k^2 \sin^2 am w\, dw.$$

In dem Integrale dritter Art setzen wir

$$\lambda = -k^2 \sin^2 am\, \alpha$$

und machen wieder die Substitution 1.; dadurch entsteht

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2\varphi)\Delta\varphi} = \int \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w}.$$

Wird das letztere Integral zwischen den Grenzen 0 und w genommen, so erhält man sofort

$$\int_0^w \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w} = w + \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w}.$$

Wir werden nun zeigen, wie die beiden Integrale, um die es sich noch handelt, nämlich

$$\int_0^w k^2 \sin^2 am\, w\, dw \quad \text{und} \quad \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am\, w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am\, w}$$

auf Thetafunctionen reducirt werden können.

2. Vorher haben wir noch zu untersuchen, ob diese beiden Integrale vom Integrationswege abhängen.

Die Function $\sin am w$ wird unendlich in den Punkten $w = 2mK + (2n+1)K' \cdot i$, wobei m und n ganze Zahlen sind; wir haben daher nach § 13, 13, 3

$$\sin^2 am [2mK + (2n + 1)K' \cdot i + \mathfrak{w}]$$

für die Umgebung des Punktes $2mK + (2n+1)K' \cdot i$ in eine Reihe nach auf- und absteigenden Potenzen von $\mathfrak{w}$ zu entwickeln und den Coefficienten von $1 : \mathfrak{w}$ zu beachten. Da nun bekanntlich

$$\sin^2 am [2mK + (2n + 1)K' i + \mathfrak{w}] = \frac{1}{k^2 \sin^2 am \mathfrak{w}}$$

und diese Function für entgegengesetzt gleiche $\mathfrak{w}$ gleiche Zeichen hat, so folgt, dass in der verlangten Entwicklung nur gerade Potenzen von $\mathfrak{w}$ vorkommen; folglich ist der Coefficient von $\mathfrak{w}^{-1}$ gleich Null. Hieraus ergiebt sich sofort:

Das Integral $\int \sin^2 am w\, dw$ über eine kleine Curve erstreckt, die einen Ausnahmepunkt einfach umkreist, verschwindet; das Integral ist daher eine eindeutige Function der Punkte der Variabelnebene.

Die Function

$$\frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w}$$

wird nur in den Punkten unendlich gross, für welche

$$1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am w = 0,$$

also
$$\sin am w = \pm \frac{1}{k \sin am\, \alpha}.$$

Hieraus folgen für w die Auflösungen

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n + 1)K' i.$$

Setzen wir nun

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n + 1)K' i + \mathfrak{w},$$

so erhalten wir

$$\frac{\sin^2 am\, w}{1 - k^2 \sin^2 am\, \alpha \sin^2 am\, w} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 am\, (\mathfrak{w} \pm \alpha) - \sin^2 am\, \alpha}.$$

Ist $\mathfrak{w}$ so klein, dass höhere Potenzen von $\mathfrak{w}$ gegen die erste zu vernachlässigen sind, so ist nach dem Additionstheoreme

$$sin\,am(\mathfrak{w} \pm \alpha) = \pm\, sin\,am\,\alpha + cos\,am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha \cdot \mathfrak{w}\,.$$

Folglich ist, über eine verschwindend kleine den Punkt

$$\pm\,\alpha + 2mK + (2n+1)K'i$$

einmal umkreisende Curve ausgedehnt,

$$\int \frac{sin^2\,am\,w}{1 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}\,dw = \pm\,\frac{1}{2k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha}\int\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}$$

$$= \pm\,\frac{\pi i}{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha}\,.$$

Hieraus ergiebt sich: Das Integral

$$\int_0^w \frac{sin^2\,am\,w}{1 - k^2 sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}\,dw$$

ist unendlich vieldeutig und hat den Periodicitätsmodul

$$\frac{\pi i}{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha}\,.$$

3. Nach § 19, No. 17, 17 ist

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(\zeta)^2\,\vartheta(z)^2} = 1 - \left[\frac{\vartheta_1(\vartheta)}{\vartheta\;(\zeta)} \cdot \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta\;(z)}\right]^2.$$

Ersetzt man hier ζ und z durch $\frac{\pi}{2K}\alpha$ und $\frac{\pi}{2K}w$, so erhält man

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w+\alpha)\right]\,\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w-\alpha)\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi\alpha}{2K}\right)^2\,\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)^2} = 1 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w\,.$$

Wir nehmen beiderseits die Logarithmen und differenziren dann nach α; dadurch entsteht

$$\frac{k^2 sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}{1 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}$$

1. $$= \frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}$$

Da nun

$$\frac{d\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{d\alpha} = \frac{d\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{dw}\,, \qquad -\frac{d\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{d\alpha} = \frac{d\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{dw}\,,$$

so erhalten wir aus 1., wenn wir mit dw multipliciren und zwischen den Grenzen 0 und w integriren,

2. $$\int_0^w \frac{k^2\,sin\,am\,\alpha\,cos\,am\,\alpha\,\Delta\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w\,dw}{2 - k^2\,sin^2\,am\,\alpha\,sin^2\,am\,w}$$

$$= \frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}\cdot w + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\vartheta\frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta\frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}\,.$$

Der Periodicitätsmodul des links stehenden Integrals ist πi; ihn besonders hinzuzufügen ist wegen des rechts stehenden Logarithmus nicht nöthig. Das links stehende Integral bezeichnet JACOBI als **Normalintegral dritter Art** $\Pi(w, K, \alpha)$, wofür auch $\Pi(w, \alpha)$ geschrieben wird, wenn über den Modulus k kein Zweifel sein kann.

Wenn wir in 2. rechts und links durch α dividiren und dann zur Grenze für $\alpha = 0$ übergehen, so erhalten wir

3. $$\int_0^w k^2\,sin^2\,am\,w\,dw = \frac{\pi^2}{4K^2}\,\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\,w - \frac{D_w\vartheta\frac{\pi w}{2K}}{\vartheta\frac{\pi w}{2K}}\,;$$

denn es ist, wenn $\pi\alpha : 2K = \beta$ gesetzt wird,

$$D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K} = \frac{\pi}{2K}\vartheta'\beta\,,$$

$$lim\,\frac{D_\alpha\vartheta\frac{\pi\alpha}{2K}}{\alpha} = \frac{\pi}{2K}\,lim\,\frac{D_\alpha\vartheta\beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot lim\,\frac{\vartheta'\beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2}\vartheta''(0)\,.$$

Es ist daher

4. $$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2\,am\,w\,dw = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right]w + \frac{D_w\vartheta\frac{\pi w}{2K}}{\vartheta\frac{\pi w}{2K}}\,.$$

Das zweite Glied rechts bezeichnet man nach JACOBI mit $Z(w)$, so dass also

$$Z(w) = \frac{D_w\vartheta\frac{\pi w}{2K}}{\vartheta\frac{\pi w}{2K}}\,.$$

4. Wir entwickeln nun einige Eigenschaften der Function Z. Wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so erhält man zunächst

$$Z(w) = \frac{2q\,sin\frac{\pi w}{K} - 4q^4\,siu\frac{2\pi w}{K} + 6q^9\,sin\frac{3\pi w}{K} - \ldots}{1 - 2q\,cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\,cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\,cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots}\,.$$

Hieraus folgt

$$Z(-w) = -Z(w), \quad Z(0) = 0, \quad Z(mK) = 0, \quad Z(w+2K) = Z(w),$$

Da ferner bekanntlich

$$\vartheta\frac{\pi}{2K}(w + 2iK') = -e^{\pi\frac{K'}{K}i - \frac{\pi w}{K}}\,\vartheta\frac{\pi w}{2K}\,,$$

so folgt, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt und differenzirt,

$$Z(w + 2iK') = Z(w) - i\,\frac{\pi}{K}\,.$$

Ersetzt man hier w durch $-w$, so erhält man

$$Z(w - 2iK') = Z(w) + i\,\frac{\pi}{K}\,.$$

5. Geht z auf der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche für $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ geradlinig von 0 bis 1, so durchläuft w die reale Achse von 0 bis K, geht z im untern Blatte geradlinig zurück bis 0, so geht w auf der realen Achse weiter bis $2K$. Für diesen Weg ist unzweideutig

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int_0^w \Delta^2 am w\, dw = \mathfrak{E}(m)\,.$$

Das links stehende LEGENDRE'sche Integral zweiter Art erlangt auf dem angegebenen Wege den Werth $2E$.

Da nun $Z(2K) = 0$ ist, so folgt

$$2E = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right]2K;$$

folglich ist

$$1 - \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = \frac{E}{K},$$

und daher

1. $$\mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K}w + Z(w),$$

Rückt z auf der realen Achse von 0 bis vor 1, umgeht den Punkt 1 in negativer Drehrichtung in einem verschwindend kleinen Halbkreise, geht dann (auf demselben Rande der realen Achse wie von 0 bis 1) geradlinig weiter bis vor $1:k$, umkreist diesen Punkt in negativer Drehrichtung und kehrt hierauf (jenseits der von 1 bis $1:k$ liegenden Verwachsung) geradlinig bis zu 1 zurück, so durchläuft w geradlinig die reale Achse von 0 bis K, und dann eine Normale zur realen bis zum Punkte $K - 2iK'$. Es ist daher für diese Wege

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz + 2\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K},$$

da $$Z(K - 2iK') = Z(K) + i\frac{\pi}{K} = i\frac{\pi}{K}.$$

Das zweite Integral links ist bekanntlich (§ 16, No. 19)

$$i(E' - K').$$

Daher folgt

$$E + 2i(E' - K') = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K}.$$

Dies reducirt sich auf die von LEGENDRE auf anderm Wege gefundene Beziehung zwischen den vollständigen elliptischen Integralen K, K', E, E'

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichung $z = sin\, am\, w$ hat, wenn z einen Punkt der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche bezeichnet, für w die Wurzeln

$$w + 4mK + i\cdot 2nK',$$

wenn unter w irgend eine Wurzel dieser Gleichung verstanden wird. Die rechte Seite in 1. nimmt hierfür die unendlich vielen Werthe an

$$\frac{E}{K}(w + 4mK + i\cdot 2nK') + Z(w) - i\frac{n\pi}{K}.$$

Setzt man hier nach der LEGENDRE'schen Gleichung

$$\frac{\pi}{K} = 2E' + 2E\frac{K'}{K} - 2K',$$

so erhält man

$$\frac{E}{K}w + Z(w) + 4mE - n\cdot 2i(E' - K').$$

Daher ist die rechte Seite von 1. in derselben Weise unendlich vieldeutig, wie das Integral

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz\,.$$

Die Gleichung

2. $$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{E}{K}w + Z(w), \quad z = sin\, am\, w\,.$$

ist daher erschöpfend, beide Seiten stellen dieselbe Gruppe von doppelt unendlich vielen Werthen dar mit den Periodicitätsmoduln $4E$ und $2i(E' - K')$.

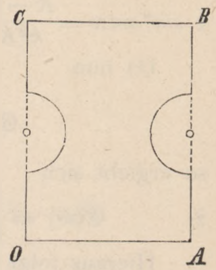
6. Um für $\mathfrak{E}(w)$ und $Z(w)$ eine FOURIER'sche Entwicklung zu erhalten, suchen wir eine solche zunächst für die Function $sin^2 am\, w$. Zu diesem Zwecke haben wir das geradlinige Integral zu ermitteln

$$\int_0^{2K} sin^2 am\, w\, e^{-\frac{n\pi w}{K}i}\,dw,$$

da $sin^2\, am\, w$ die reale Periode $2K$ hat. Wir integriren die Function

$$sin^2 am\, w\cdot e^{-\frac{n\pi w}{K}i}$$

entlang des Perimeters eines Rechtecks, dessen Ecken $OABC$ der Reihe nach $w = 0$, $2K$, $2K + 2iK'$, $2iK'$ sind und umgehen dabei die Ausnahmepunkte iK' und $2K + iK'$ durch verschwindende Halbkreise. In gleich weit von der realen Achse entfernten Punkten von OC und AB hat die zu integrirende Function denselben Werth, die auf diese Strecken bezüglichen Theile des Integrals verschwinden daher. In gleichweit von der imaginären Achse entfernten Punkten von OA und CB hat $sin\, am\, w$ denselben Werth; für die Punkte CB tritt aber infolge der Exponentialgrösse der Faktor hinzu



(M. 575.)

$$e^{\frac{2n\pi K'}{K}} = q^{-2n};$$

es ist somit

$$\int(OA) + \int(BC) = (1 - q^{-2n})\int(OA).$$

Statt der beiden Halbkreise um iK' und $2K + iK'$ kann ein Kreis um iK gesetzt werden. Für dieses Kreisintegral J setzen wir

$$w = iK' + \zeta, \quad \zeta = re^{i\varphi},$$

und haben

$$-J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k^2 sin^2 am\zeta}\cdot q^{-n}\cdot e^{-\frac{n\pi\zeta}{K}i}\cdot i\zeta\cdot d\varphi\,.$$

Wird die Exponentialgrösse durch eine Potenzreihe ersetzt, so ergiebt sich

$$-J = \frac{1}{k^2q^n}\left[i\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{sin^2 am\zeta}d\varphi + \frac{n\pi}{K}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2}{sin^2 am\zeta}d\varphi \right.$$
$$\left. - i\frac{n^2\pi^2}{2K^2}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2}{sin^2 am\zeta}\zeta d\varphi - \ldots\right].$$

Das erste Integral rechts stimmt bis auf einen constanten Faktor mit dem Kreisintegrale für die Function $sin^2\, am w$ überein, von dem wir bewiesen haben, dass es verschwindet; das dritte und alle folgenden verschwinden, wenn wir zur Grenze für $\zeta = 0$ übergehen, da die zu integrirende Function verschwindet; das zweite liefert bei diesem Grenzübergange einen nicht verschwindenden endlichen Werth, und wir erhalten

$$\lim J = -\frac{2n\pi^2}{k^2 K q^n}.$$

Daher ergiebt sich schliesslich

$$\int_0^2 sin^2\, am\, w\, e^{-\frac{n\pi w}{K}i}\, dw = -\frac{2\pi^2}{k^2 K} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

$$a_n = \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Hieraus folgt

$$a_n - a_{-n} = 0, \quad a_n + a_{-n} = -\frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{2nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Für $n = 0$ ergiebt sich

$$a_0 = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} sin^2\, am\, w\, dw = \frac{1}{2k^2 K}\int_0^{2K} (1 - \Delta^2\, am\, w)\, dw = \frac{K-E}{k^2 K}.$$

Wir haben somit

1. $$sin^2 am w = \frac{K-E}{k^2 K} - 2\frac{\pi^2}{k^2 K^2}\left(\frac{q}{1-q^2} cos \frac{\pi w}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4} cos \frac{2\pi w}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6} cos \frac{3\pi w}{K} + ..\right).$$

Da nun

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2\, am\, w\, dw = w - k^2 \int_0^w sin^2\, am\, w\, dw,$$

so ergiebt sich

2. $$\mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K} w + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2} sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} sin \frac{2\pi w}{K} + \ldots\right)$$

Hieraus folgt noch

3. $$Z(w) = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2} sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} sin \frac{2\pi w}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} sin \frac{3\pi w}{K} + \ldots\right).$$

7. Nach No. 3 2, ist

1. $$\Pi(w, k, \alpha) = Z(\alpha)\cdot w + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}.$$

Vertauscht man Parameter und Amplitude, so entsteht

$$\Pi(\alpha, k, w) = Z(w)\cdot \alpha + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi(\alpha - w)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(\alpha + w)}{2K}}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich hieraus in Rücksicht darauf, dass $\vartheta(z - \zeta) = \vartheta(\zeta - z)$ die Beziehung

2. $$\Pi(w, k, \alpha) - \Pi(\alpha, k, w) = w Z(\alpha) - \alpha Z(w).$$

Diese Gleichung lehrt, wie man ein Integral dritter Art durch ein anderes ausdrücken kann, in welchem der Modul gegen die Amplitude vertauscht ist.

Ist $w = K$, so wird das Integral dritter Art als vollständig bezeichnet. Nach 2. ist

$$\Pi(K, k, \alpha) = \Pi(\alpha, k, K) + KZ(\alpha) - \alpha Z(K).$$

Da nun

$$\Pi(\alpha, k, K) = 0, \quad Z(K) = 0,$$

so folgt die zur Berechnung eines vollständigen elliptischen Integrals dritter Art brauchbare Gleichung

3. $$\Pi(K, k, \alpha) = KZ(\alpha),$$

die auch sofort aus 1. gewonnen werden kann.

8. Das LEGENDRE'sche Integral dritter Art ist mit dem JACOBI'schen durch die Gleichung verbunden

1. $$\int_0^z \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = w + \frac{tang\, am\, \alpha}{\Delta\, am\, \alpha}\, \Pi(w, k, \alpha),$$

$$sin\, am\, w = z, \quad sin^2\, am\, \alpha = -\frac{\lambda}{k^2}.$$

Ist λ negativ und $-\lambda > k^2$, so ist $-\lambda : k^2$ ein unechter Bruch, mithin α complex; ist λ positiv, so ist $sin\, am\, \alpha$ und daher auch α rein imaginär. In beiden Fällen ist, wie überhaupt bei realem λ, das LEGENDRE'sche Integral Π_0 real mit w, während in 1. rechts ein nicht realer Parameter α vorkommt.

Wir wollen zeigen, wie man die imaginäre Form in diesen Fällen vermeiden kann. Wir untersuchen zunächst das besondere Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}};$$

hier ist $\lambda = -1$, also

$$sin\, am\, \alpha = \frac{1}{k}, \quad \alpha = K + iK'.$$

Nun ist

$$\Pi(w, k, K+iK') = wZ(K+iK') + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK')}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK')}.$$

Damit w den Werth $K + iK'$ annehme, hat z von 0 bis 1 zu gehen, den Punkt 1 in einem verschwindenden Halbkreise in der Richtung der abnehmenden Winkel zu umgehen und dann geradlinig die Strecke bis $1 : k$ zurückzulegen. Daher ist

$$\begin{aligned} Z(K+iK') &= \int_0^{K+iK'} \Delta^2\, am\, w\, dw - \frac{E}{K}(K+iK') \\ &= E - i(E' - K') - E - i\frac{EK'}{K} \\ &= -i\left(E' + \frac{EK'}{K} - K'\right). \end{aligned}$$

Ferner ist bekanntlich

$$\frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK')}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK')} = \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' - w)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' + w)} = e^{\frac{i\pi w}{K}} \cdot \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K)} = e^{\frac{i\pi w}{K}}.$$

Mithin ist

$$\Pi(w, k, K + iK') = \frac{iw}{K}\left(\frac{\pi}{2} - E'K - EK' + KK'\right) = 0\,.$$

Da nun auch $\Delta am(K + iK') = 0$, so nimmt das Glied

$$\frac{tang\, am\,(K + iK')}{\Delta\, am(K + iK')}\, \Pi(w, k, K + iK')$$

die Form $0 : 0$ an. Um den Grenzwerth des Ausdrucks zu bestimmen, haben wir den Quotienten von

$$\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta\, am\, \alpha}{\partial \alpha}$$

für den Werth $\alpha = K + iK'$ zu ermitteln.

Aus $\qquad \Pi(w, k, \alpha) = \Pi(\alpha, k, w) + wZ(\alpha) - \alpha Z(w)$

folgt

1. $$\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{k^2 sin\,am w\, cos\,am w\, \Delta\, am w\, sin^2 am\alpha}{1 - k^2\, sin^2\, am w\, sin^2\, am\alpha} + wZ'(\alpha) - Z(w)\,.$$

Da $$Z(\alpha) = \int_0^\alpha \Delta^2\, am w\, dw - \frac{E}{K}\alpha\,,$$

so ist $$Z'(\alpha) = \Delta^2 am\alpha - \frac{E}{K}\,.$$

Macht man hiervon in 1. Gebrauch und setzt

$$sin\,am\alpha = \frac{1}{k}\,, \quad \text{also} \quad cos\,am\alpha = \frac{ik'}{k}\,, \quad \Delta\, am\alpha = 0\,,$$

so entsteht

$$\left[\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{(\alpha = K + iK')} = tang\,am w\, \Delta\, am w - \mathfrak{E}(w)\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \Delta\, am\, \alpha}{\partial \alpha} = -\, k^2\, sin\,am\alpha\, cos\,am\alpha\,.$$

Für $\alpha = K + iK'$ ergiebt dies $(-\, ik')$. Da nun

$$tang\,am(K + iK') = \frac{1}{ik'}\,,$$

so folgt schliesslich

2. $$\int_0^z \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = w + \frac{1}{k'^2}\left[tang\,am w\, \Delta\, am w - \mathfrak{E}(w)\right],$$

ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich durch Differentiation leicht überzeugt.

9. Auf dieses Integral lassen sich die Functionen $Z(w)$ und $\mathfrak{E}(w)$ im Falle eines rein imaginären Arguments reduciren; denn es ist

$$Z(iv) = \mathfrak{E}(iv) - i \cdot \frac{E}{K}\, v\,,$$

$$\mathfrak{E}(iv) = \int_0^{iy} \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\, dz\,, \quad \text{wobei} \quad y = tang\, am(v, k')\,.$$

Ersetzt man hier z durch iy, so entsteht

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^y \sqrt{\frac{1 + k^2y^2}{1 + y^2}}\, dy\,.$$

Die Substitution $y = tang\varphi$, also $\varphi = am(v, k')$, giebt

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^\varphi \sqrt{1 - k'^2 sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{cos^2\varphi}$$

$$= i\int_0^\varphi \frac{(1 - k'^2 sin^2\varphi)\, d\varphi}{(1 - sin^2\varphi)\, \Delta(\varphi, k')}$$

$$= ik'^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')} + ik^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - sin^2\varphi)\, \Delta(\varphi, k')}\,.$$

Daher folgt schliesslich in Rücksicht auf No. 8, 2

$$\mathfrak{E}(iv) = ik'^2 v + ik^2 v + i\,\frac{k^2}{k'^2}\left[tang\, am(v, k')\, \Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')\right]$$

$$= iv + i\,\frac{k^2}{k'^2}\left[tang\, am(v, k')\, \Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')\right],$$

$$Z(iv) = i \cdot \frac{K - E}{K}\, v + i \cdot \frac{k^2}{k'^2}\left[tang\, am(v, k')\, \Delta am(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')\right].$$

10. Ist λ negativ und $-\,\lambda > 1$, so folgt, wenn $-\,\lambda = \mu^2$ gesetzt wird, aus

$$sin\, am\alpha = \frac{\mu}{k}\,,$$

dass α von der Form $K + iK' + \beta$ ist. Da nun

$$sin\, am(K + iK' + \beta) = \frac{1}{k\, sin\, am\,(K + \beta)} = \frac{\Delta\, am\beta}{k\, cos\, am\beta}\,,$$

so dient zur Bestimmung von β die Gleichung

$$\Delta am\beta = \mu\, cos\, am\beta\,,$$

aus welcher hervorgeht

1. $$sin\, am\beta = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - k^2}}\,;$$

nach der Voraussetzung über μ ist der Radicand ein positiver echter Bruch. Man hat nun

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = wZ(K + iK' + \beta) + \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\vartheta\, \frac{\pi}{2K}(w + K + iK' + \beta)}{\vartheta\, \frac{\pi}{2K}(w - K - iK' - \beta)}\,.$$

Aus den Gleichungen § 19, No. 2, 7 folgt

$$\vartheta\, \frac{\pi}{2K}\,(K + iK' + \beta) = \vartheta_3\, \frac{\pi}{2K}\,(iK' + \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi\beta}{2K}}\, \vartheta_2\, \frac{\pi\beta}{2K}\,;$$

Also ist

$$\vartheta\, \frac{\pi}{2K}\,(w + K + iK' + \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi(\beta + w)}{2K}}\, \vartheta_2\, \frac{\pi(\beta + w)}{2K}\,,$$

$$\vartheta\, \frac{\pi}{2K}\,(w - K - iK' - \beta) = e^{\frac{1}{4}\rho - \frac{i\pi(\beta - w)}{nK}}\, \vartheta_2\, \frac{\pi}{2K}\,(\beta - w)\,.$$

Hieraus folgt

$$Z(K + iK' + \beta) = -\,\frac{i\pi}{2K} + \frac{D_\beta \vartheta_2\, \frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2\, \frac{\pi\beta}{2K}}\,,$$

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = \frac{D_\beta \vartheta_2\, \frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta\, \frac{\pi\beta}{2K}} + \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\vartheta_2\, \frac{\pi(\beta + w)}{2K}}{\vartheta_2\, \frac{\pi(\beta - w)}{2K}}\,.$$

Ferner ist

$$\cos am(K + iK' + \beta) = -i\,\frac{\Delta am(K+\beta)}{k \sin am(K+\beta)},$$

$$\Delta am(K + iK' + \beta) = -i\,\frac{\cos am(K+\beta)}{\sin am(K+\beta)}$$

und daher

$$\frac{tang\, am(K + iK' + \beta)}{\Delta\, am(K+iK'+\beta)} = -\frac{tang\, am(K+\beta)}{\Delta am(K+\beta)} = \frac{\Delta am\,\beta}{tang\, am\beta}.$$

Somit haben wir schliesslich

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-\mu^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$= w + \frac{\Delta am\beta}{tang\, am\beta}\left(\frac{D_\beta \vartheta_2 \dfrac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2 \dfrac{\pi\beta}{2K}} + \tfrac{1}{2} l\, \frac{\vartheta_2 \dfrac{\pi(\beta+w)}{2K}}{\vartheta_2 \dfrac{\pi(\beta-w)}{2K}}\right),$$

wobei also

$$\mu > 1, \quad z = sin\, am w, \quad \sqrt{\frac{\mu^2-1}{\mu^2-k^2}} = sin\, am\beta.$$

11. Wir wenden uns nun zu dem LEGENDRE'schen Integrale dritter Art für den Fall eines positiven λ. Setzen wir jetzt $\lambda = \mu^2$, wo nun μ real ist, so ist

$$sin am\,\alpha = i\cdot\frac{\mu}{k};$$

setzt man $\alpha = i\beta$, so folgt zur Bestimmung des realen Werths β

$$tang\, am(\beta, k') = \frac{\mu}{k}, \quad sin am(\beta, k') = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+k^2}}.$$

Wir haben nun zunächst

$$\int_0^z \frac{dz}{(1+\mu^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w + \frac{tang\, am(i\beta)}{\Delta am(i\beta)}\,\Pi(w, k, i\beta).$$

Nach § 18, No. 4 ist

$$\frac{tang\, am\, i\beta}{\Delta\, am\, i\beta} = \frac{i \sin am(\beta, k')\cdot \cos am(\beta, k')}{\Delta\, am(\beta, k')}.$$

Ferner ist

1. $$\Pi(w, K, i\beta) = wZ(i\beta) + \tfrac{1}{2} l\,\frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)},$$

$$z(i\beta) = \frac{D_{i\beta}\,\vartheta \dfrac{\pi\beta}{2K} i}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K} i} = \frac{1}{i}\,\frac{D_\beta\, \vartheta \dfrac{\pi}{2K} i}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K} i}.$$

Da nun

2. $$\vartheta iz = \Sigma(-1)^n e^{-n^2\varrho+2nz},$$

so ist $\vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i$ real, und man kann daher für die rechte Seite der vorletzten Gleichung $m : i$ setzen, wobei m real ist. Das elliptische Integral $\Pi(w, k, i\beta)$ ist für ein reales w rein imaginär; ersetzt man es durch iV, so entsteht aus 1.

$$i(V + mw) = \tfrac{1}{2} l\,\frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)};$$

mithin ist

$$e^{i(V+mw)} = \left(\frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$e^{-i(V+mw)} = \left(\frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man

3. $$\cos(V + mw) = \frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta) + \vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{2\sqrt{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)\cdot\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}$$

4. $$\sin(V + mw) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta) - \vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\sqrt{\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w+i\beta)\cdot\vartheta \dfrac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}.$$

Jede dieser Gleichungen ist dazu geschickt, V zu finden; es erübrigt nur noch, Zähler und Nenner in 3. und 4. in handlicher Form darzustellen.

Für den Nenner hat man nach § 19, No. 17

$$\vartheta(2)^2\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\,\vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left(\vartheta \frac{\pi w}{2K}\cdot \vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i\right)^2\left(1 - k^2 \sin^2 am \frac{\pi w}{2K} \sin^2 am \frac{\pi\beta i}{2K}\right).$$

Daher ist

5. $$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta)\,\vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left[\frac{\vartheta \dfrac{\pi w}{2K}\cdot\vartheta \dfrac{\pi\beta}{2K} i}{\vartheta(0)}\right]^2\left[1 + k^2\, tang^2\, am(\beta, k') \sin^2 am \frac{\pi w}{2K}\right].$$

hierbei hat man für $\vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i$ die stark convergente Reihe

6. $$\vartheta \frac{\pi\beta}{2K} i = 1 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right) + q^4\left(e^{\frac{2\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{2\pi\beta}{K}}\right)$$
$$- q^9\left(e^{\frac{3\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{3\pi\beta}{K}}\right) + q^{16}\left(e^{\frac{4\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{4\pi\beta}{K}}\right) - \ldots$$

Ferner ist

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right)$$
$$- i\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),$$

$$e \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right)$$
$$+ i\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right).$$

Daher ist

7. $$\frac{1}{2}\left[\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) + \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)\right] = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right),$$
$$\frac{1}{2i}\left[\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) - \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)\right] = -\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right).$$

Durch die Gleichungen 3 bis 7 ist V bestimmt.

12. Wir haben nun noch den Fall zu erledigen, dass λ negativ ist und $-\lambda$ zwischen k^2 und 1 liegt; unter dieser Voraussetzung ist α von der Form $K + i\beta$ und β bestimmt sich, wenn $-\lambda$ durch μ^2 ersetzt wird, aus

$$sin\,am(K + i\beta) = \frac{cos\,am\,i\beta}{\Delta\,am\,i\beta} = \frac{1}{\Delta\,am(\beta, k')} = \frac{\mu}{k},$$

woraus folgt

$$sin\,am(\beta, k') = \frac{\sqrt{\mu^2 - k^2}}{k}.$$

Nun ist

$$1. \quad \int_0^z \frac{dz}{(1 - \mu^2 z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{tang\,am(K + i\beta)}{\Delta\,am(K + i\beta)}\,\Pi(w, k, K + i\beta),$$

$$2. \quad \begin{aligned} \frac{tang\,am(K + i\beta)}{\Delta\,am(K + i\beta)} &= -\frac{\Delta\,am(i\beta)}{k'^2\,tang\,am\,(i\beta)} = \frac{i}{k'^2}\cdot\frac{\Delta\,am(\beta, k')}{sin\,am\,(\beta, k')\,cos\,am(\beta, k')}, \\ \Pi(w, k, K + i\beta) &= w\,Z(K + i\beta) + \tfrac{1}{2}l\,\frac{\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(w + K + i\beta)}{\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(w - K - i\beta)}. \end{aligned}$$

Zur weiteren Reduction bemerken wir zunächst, dass

$$3. \quad \begin{aligned} Z(K + i\beta) &= \frac{1}{i}\,\frac{D_\beta\,\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(K + i\beta)}{\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(K + i\beta)} = \frac{1}{i}\,\frac{D_\beta\,\vartheta_3\,\frac{\pi\beta}{2K}i}{\vartheta_3\,\frac{\pi\beta}{2K}i} \\ \vartheta_3\frac{\pi\beta}{2K}i &= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right); \end{aligned}$$

ferner, dass

$$\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(w + K + i\beta) = \vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta),$$

$$\vartheta\,\frac{\pi}{2K}(w - K - i\beta) = \vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta).$$

Der zweite Theil der rechten Seite in Gleichung 1. ist für $z^2 < 1$ real, folglich ist $\Pi(w, k, K + i\beta)$ rein imaginär; ersetzen wir es zur Abkürzung durch iV, sowie $Z(K + i\beta)$ durch $m : i$, worin nun m eine reale bekannte Zahl ist, die sich aus 3. bestimmt, so haben wir für V die Gleichung

$$e^{i(V + mw)} = \left(\frac{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus weiter folgt

$$4. \quad \begin{aligned} cos(V + mw) &= \frac{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta) + \vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}{2\sqrt{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta)\,\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}}, \\ sin(V + mw) &= \frac{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta) - \vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}{2i\sqrt{\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta)\,\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in § 18, No. 20, 17 z durch $\frac{1}{2}\pi + z$, so erhält man

$$\frac{\vartheta(0)^2}{\vartheta_3(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2}\cdot\vartheta_3(z + \zeta)\,\vartheta_3(z - \zeta) = 1 - k^2\,\frac{cos^2\,am\,z}{\Delta^2\,am\,z}\cdot sin^2\,am\,\zeta.$$

Die Substitution $z = \frac{\pi w}{2K}$, $\zeta = \frac{\pi\beta}{2K}i$ liefert hieraus

$$5. \quad \vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w + i\beta)\,\vartheta_3\frac{\pi}{2K}(w - i\beta) = \left[\frac{\vartheta_3\frac{\pi w}{2K}\,\vartheta\,\frac{\pi\beta i}{2K}}{\vartheta(0)}\right]^2\left[1 + k^2\frac{cos^2\,am\,z}{\Delta^2\,am\,z}\,tang^2\,am(\beta, k')\right].$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} &\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w + i\beta) \\ &= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\,cos\,\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right) = i\sum_1^\infty q^{n^2}\,sin\,\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right), \\ &\vartheta_3\,\frac{\pi}{2K}(w - i\beta) \\ &= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\,cos\,\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right) - i\sum_1^\infty q^{n^2}\,sin\,\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$6. \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\vartheta_3\,\frac{\pi}{K}(w + i\beta) + \vartheta_3\,\frac{\pi}{K}(w - i\beta)\right] &= 1 + \sum_1^\infty q^{n^2}\,cos\,\frac{n\pi w}{K}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}}\right), \\ \frac{1}{2i}\left[\vartheta_3\,\frac{\pi}{K}(w + i\beta) - \vartheta_3\,\frac{\pi}{K}(w - i\beta)\right] &= -\sum_1^\infty q^{n^2}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{n\beta\pi}{K}}\right). \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen 1. bis 6. wird das Problem vollständig gelöst*).

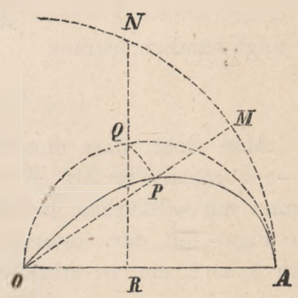
Wir müssen es uns versagen, den Leser tiefer in die Theorie der elliptischen Functionen einzuführen und verweisen hierfür auf die citirten Werke; in dem zuletzt angeführten findet man ausführliche Nachweise über die reichhaltige Literatur dieses wichtigen Abschnitts der Analysis.

§ 22. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale.

1. Rectification der Lemniscate. Die Gleichung der Lemniscate in Polarcoordinaten ist

$$r = a\sqrt{cos\,2\omega},$$

wenn mit ω der Winkel des Radius vector r mit der Achse der Lemniscate bezeichnet wird.



(M. 576.)

Die Construction der Curve erfolgt in einfachster Weise, indem man um O mit $OA = a$ einen Kreis beschreibt, denselben mit einem Radius vector in M schneidet, $MN = AM$ macht, und mit $NQ \perp OA$ durchschneidet; alsdann ist $OR = a\,cos\,2\omega$, mithin $OQ = a\sqrt{cos\,2\omega}$; macht man daher $OP = OQ$, so ist P ein Punkt der Lemniscate.

Wir bezeichnen den Winkel AOQ als Amplitude φ des Lemniscatenpunkts P; für diesen Winkel ist

$$sin\,\varphi = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = \sqrt{2}\cdot sin\,\omega.$$

*) Vergl. ENNEPER, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle 1876, § 34. Die verschiedenen Formen der elliptischen Integrale 3. Gattung.

Der von A bis P reichende Lemniscatenbogen hat die Länge

$$s = a\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{cos\, 2\omega}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sin^2 \varphi}}.$$

Also ist

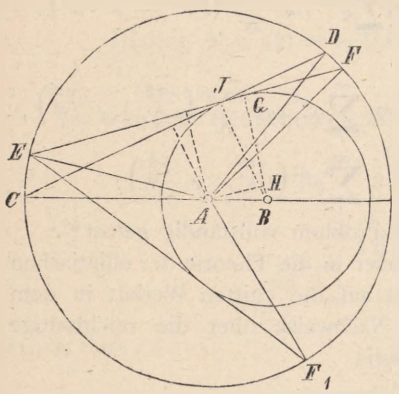
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

und der Lemniscatenquadrant S

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soll die Summe zweier Lemniscatenbogen s_1 und s_2 einem dritten Lemniscatenbogen s gleich sein, so müssen die Amplituden φ_1, φ_2, φ durch eine der äquivalenten Gleichungen verbunden sein, welche das Additionstheorem enthalten.

2. Wir wollen bei dieser Gelegenheit zeigen, wie das **Additionstheorem durch eine geometrische Construction erledigt** werden kann.



(M. 577.)

Man zeichne zwei Kreise, einen mit Centrum A und Radius R, den andern im Innern des ersteren mit Radius r; der Abstaud AB der Centra sei h. Im grösseren Kreise ziehe man zwei Sehnen BD und EF, die den kleineren berühren.

Sind α, β, γ die Winkel DAC, EAC, FAC und $AH \perp GB$, so hat man $BG = HG + BH$, d. i. $r = R\, cos(\gamma - \beta) + h\, cos(\gamma + \beta)$,

$$= (R + h)\, cos\beta\, cos\gamma + (R - h) sin\beta\, sin\gamma.$$

Ferner folgt aus CBJ

1. $$r = (R + h)\, cos\alpha,$$

daher ist

2. $$cos\alpha = cos\beta\, cos\gamma + \frac{R-h}{R+h} sin\beta\, sin\gamma.$$

Man kann nun h immer so bestimmen, dass für einen gegebenen Modul $k < 1$

3. $$\frac{R-h}{R+h} = \sqrt{1 - k^2 sin^2 \alpha};$$

es folgt nämlich hieraus

4. $$h = R \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 sin^2 \alpha}}{1 + \sqrt{1 - k^2 sin^2 \alpha}}.$$

Man sieht, dass dieser Werth von h kleiner als R ist, und dass nach 3. $R - h$ grösser ist als $(R + h)\sqrt{1 - sin^2 \alpha}$, also grösser als r; es wird also immer mit willkürlich gewählten R und α und aus 4. und 1. bestimmten h und r die Figur mit der vorausgesetzten Anordnung der Kreise erhalten. Führt man nun 3. in 2. ein, so erhält man

$$cos\alpha = cos\beta\, cos\gamma + sin\beta\, sin\gamma\, \Delta(\alpha).$$

Dies ist aber bekanntlich die Bedingung, unter welcher

1. $$F(\alpha, k) + F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Sind nun k, α, β gegeben, γ gesucht, so wähle man R beliebig, construire dann h und r nach 4. und 2., mache $EAC = 2\beta$, und ziehe von E die Gerade EF so, dass sie den kleinen Kreis berührt; alsdann ist $\gamma = \frac{1}{2} FAC$.

Die zweite von E an den kleinen Kreis gelegte Tangente EF_1 bestimmt einen Winkel $\gamma = \frac{1}{2} CAF_1$, der die Aufgabe löst

$$F(\alpha, k) - F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Zieht man von F aus eine Tangente F' an den kleinen Kreis, von F' aus eine Tangente $F'F''$ u. s. w. und bezeichnet die Winkel, die AF', AF'' AF''' u. s. w. mit AC bilden, mit $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $2\gamma_3$ u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned} F(\alpha) + F(\beta) &= F(\gamma), \\ F(\alpha) + F(\gamma) &= F(\gamma_1), \\ F(\alpha) + F(\gamma_1) &= F(\gamma_2), \\ F(\alpha) + F(\gamma_2) &= F(\gamma_3), \\ \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$F(\gamma_n) = (n + 1) F(\alpha) + F(\beta),$$

oder, wenn $\beta = 0$, also $E = C$ ist,

$$F(\gamma_n) = (n + 1) F(\alpha).$$

Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: **Durch Constructionen von geraden Linien und Kreisbogen die Amplitude eines Lemniscatenbogens zu erhalten, der gleich der Summe oder der Differenz der zu gegebenen Amplituden gehörigen Lemniscatenbogen ist; oder der gleich einem ganzzahligen Vielfacheu des zu einer gegebenen Amplitude gehörigen Lemniscatenbogens ist.**

3. Die Aufgabe, einem (in A anfangenden) Lemniscatenbogen in eine **Anzahl gleicher Theile zu theilen**, ist der geometrische Ausdruck der arithmetischen Aufgabe, $sin\, am\, \frac{1}{n} w$ durch n, k und elliptische Functionen von w auszudrücken. Zur Lösung dieses Problems wird man zunächst durch wiederholte Anwendung der Gleichungen für $sin\, am\,(w + w_1)$, $cos\, am\,(w + w_1)$, $\Delta\, am\,(w + w_1)$ die Functionen $sin\, am\, n\, w$, $cos\, am\, n\, w$, oder $\Delta\, am\, n\, w$ durch w ausdrücken; man erhält so eine Gleichung, welche elliptische Functionen von w mit einer von $n\, w$ algebraisch verknüpft. Ersetzt man nun hierin $n\, w$ durch w, also w durch $w : n$, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung eine Function von $w : n$ durch w ausgedrückt.

Diese aufzulösende Gleichung ist bereits für den $n = 2$ vom 8. Grade. Wir müssen hier darauf verzichten, die allgemeine **Gleichung des Divisionsproblems** aufzustellen, und ihre **algebraische Lösbarkeit** nachzuweisen*), und geben nur die Lösung für den einfachsten Fall.

Setzt man in

$$cos\, am\, 2w = \frac{cos^2\, am\, w - sin^2\, am\, w\, \Delta^2\, am\, w}{1 - k^2 sin^4\, am\, w},$$

w für $2w$ und z für $sin\, am\, \frac{1}{2} w$, so erhält man für z die Gleichung

1. $$(1 - k^2 z^4)\, cos^2\, am\, w = 1 - 2z^2 + k^2 z^4,$$

aus welcher folgt

2. $$z = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - k^2 sin^2\, am\, w}}{1 + \sqrt{1 - sin^2\, am\, w}}}.$$

Die vier Auflösungen der Gleichung 1. sind

$$sin\, am\, \frac{w}{2}, \quad sin\, am\left(\frac{w}{2} + 2K\right), \quad sin\, am\left(\frac{w}{2} + iK'\right), \quad sin\, am\left(\frac{w}{2} + 2K + iK'\right).$$

Ausdrücke, welche ausser rationalen Grössen nur Quadratwurzeln enthalten, lassen sich bekanntlich mit Lineal und Zirkel construiren. Ohne auf die Einzelheiten einer solchen Construction weiter einzugehen, können wir daher den Satz

*) Vergl. KÖNIGSBERGER, Vorl. über die Theorie d. ell. Funct. 2 Bd. pag. 210.

aussprechen: Ein Lemniscatenbogen kann durch Lineal und Zirkel in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

4. Rectification der Ellipse. Werden die rechtwinkligen Coordinaten eines Ellipsenpunktes mit Hülfe eines Winkels φ durch die Gleichungen ausgedrückt

$$x = a\, sin\varphi, \quad y = b\, cos\varphi,$$

so ist ein vom Endpunkte der kleinen Achse an gerechneter Bogen der Ellipse

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 cos^2\varphi + b^2 sin^2\varphi}\, d\varphi\,.$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2} : a$ mit k, so erhält man

$$s = aE(\varphi, k).$$

Alle auf Integrale zweiter Art bezüglichen Sätze finden also ihre geometrische Deutung als Sätze über Ellipsenbogen. Das Additionstheorem

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = k^2 sin\sigma sin\varphi sin\psi$$

lehrt: Zu zwei gegebenen Ellipsenbogen s und s_1 lässt sich immer ein dritter s_2 construiren, so dass das Trinom

$$s + s_1 - s_2$$

geometrisch construirt werden kann.

Nimmt man insbesondere $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, so ist s_2 ein Ellipsenquadrant und daher $s_2 - s_1$ ein Ellipsenbogen s', der vom Endpunkte der grossen Achse ausgerechnet wird. In diesem Falle hat man

$$s - s' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} sin\varphi\, sin\psi$$

$$sin\psi = \frac{cos\varphi \Delta\varphi}{1 - k^2 sin^2\varphi}\,.$$

Man erhält so den Satz: Zu jedem in einem Scheitel beginnenden Theile eines Ellipsenquadranten lässt sich ein im andern Scheitel beginnender Theil construiren, so dass der Unterschied beider Theile construirbar ist.

5. Rectification der Hyperbel. Für die Coordinaten eines Hyperbelpunktes, bezogen auf die Symmetrieachsen, hat man

$$x = a\, cosec\varphi, \quad y = b\, cot\varphi,$$

und daher für den vom Scheitel anfangenden Bogen

1. $$s = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{c^2 - a^2 sin^2\varphi}}{sin^2\varphi}\, d\varphi\,.$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int \frac{\Delta\varphi}{sin^2\varphi}\, d\varphi = -\, cot\varphi \Delta\varphi - k^2 \int \frac{cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi\,.$$

Ferner ist

$$k^2 \frac{cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = -\, k'^2 \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi\, d\varphi\,.$$

Daher hat man

2. $$\int \frac{\Delta\varphi}{sin^2\varphi}\, d\varphi = -\, cot\varphi \Delta\varphi + k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \Delta(\varphi)\, d\varphi\,.$$

Setzt man nun in 1.

$$k = a : c,$$

so erhält man durch 2.

$$\frac{1}{c} s = cot\varphi \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi} + k'^2 [K - F(\varphi, k)] - [E - E(\varphi, k)].$$

Der Abstand des Nullpunktes von der Hyperbelnormalen im Bogenendpunkte ist, wie man leicht erhält

$$p = c \frac{cot\varphi}{\Delta\varphi};$$

daher ist

$$s - p\Delta^2\varphi = ck'^2 [K - F(\varphi, k)] - c[E - E(\varphi, k)]\,.$$

Geht man hier zur Grenze $\varphi = 0$ über, so ergiebt sich links der Unterschied eines Hyperbelquadranten und der Asymptote, beide vom Nullpunkte aus gezählt; rechts ergiebt sich

$$c(k'^2 K - E)\,.$$

6. Complanation von Oberflächentheilen der centrischen Flächen zweiten Grades. Die Gleichung einer centrischen Fläche zweiten Grades, bezogen auf die Hauptachsen, ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1\,,$$

woraus folgt

$$z = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Ax}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{By}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}\,.$$

Bezeichnet ω den Winkel der Flächennormalen mit der XY-Ebene, so ist die Oberfläche

1. $$S = \int\int \frac{1}{sin\,\omega}\, dx\, dy\,, \quad sin\,\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\,.$$

Setzt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die obigen Werthe ein, so erhält man

2. $$sin\,\omega = \sqrt{\frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - By^2)}}\,.$$

Behält man die rechtwinkeligen Coordinaten bei, so führt bereits die erste Integration auf elliptische Integrale, deren Modul die zweite Variable enthält; dadurch ergeben sich Schwierigkeiten, die man zu vermeiden suchen muss, indem man geeignete neue Coordinaten einführt.

Als solche empfehlen sich der Winkel ω und der Winkel φ, den die Projection der Normalen auf die XY-Ebene mit der X-Achse bildet. Die neuen Variabeln sind mit den bisherigen durch die Gleichungen verbunden

2. $$sin^2\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2}\,, \quad tang\varphi = \frac{By}{Ax}\,.$$

Der letzten Gleichung wird identisch genügt, wenn man setzt

3. $$x = BR cos\varphi, \quad y = AR sin\varphi;$$

führt man diese Werthe in die erste ein, so folgt

4. $$R^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{cos^2\omega}{BC cos^2\omega\, cos^2\varphi + AC cos^2\omega\, sin^2\varphi + AB sin^2\omega}\,.$$

Die Einführung der neuen Variabeln ergiebt nun zunächst

$$S = \int\int \frac{1}{sin\,\omega} \left(\frac{\partial x}{\partial\omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial\omega}\right) d\varphi\, d\omega\,.$$

Für die in Klammern stehende Determinante findet man

$$\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \omega}$$
$$= AB\left[\frac{\partial R}{\partial \omega}\cos\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\sin\varphi + R\cos\varphi\right)-\frac{\partial R}{\partial \omega}\sin\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\cos\varphi - R\sin\varphi\right)\right]$$
$$= AB\cdot R\frac{\partial R}{\partial \omega} = AB\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial (R^2)}{\partial \omega}$$
$$= -\frac{ABC\sin\omega\cos\omega}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2}.$$

Daher ist schliesslich

5. $$S = \pm ABC\int\int\frac{\cos\omega\, d\omega\, d\varphi}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2}.$$

Zur Orientirung über das Vorzeichen in Verbindung mit der Anordnung der Grenzen dient hier folgende Bemerkung. Die Fläche S ist stets positiv; wird nun für ω immer ein spitzer Winkel, und die unteren Grenzen kleiner als die oberen genommen, so ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem ABC positiv oder negativ ist.

Die relativ einfachsten Resultate wird man bei der Wahl bestimmter Variabeln immer erhalten, wenn man die Grenzen constant nimmt. In unserm Falle würde das die geometrische Bedeutung haben, dass wir das Stück der Fläche bestimmen, welches von zwei Curven begrenzt ist, längs deren jeder die Normalen gleiche Neigung gegen die XY-Ebene haben, und von zwei anderen, mit diesen in der Begrenzung abwechselnden Curven, längs deren jeder die Normalen einer bestimmten Verticalebene parallel sind.

Die Punkte, deren Normalen die gemeinsame Neigung ω gegen die XY-Ebene haben, haben als Horizontalprojection die Curve
$$\sin^2\omega = \frac{C(1-Ax^2-By^2)}{C-A(C-A)x^2-B(C-B)y^2},$$
oder, besser geordnet
$$\frac{A(A\tan^2\omega + C)}{C}x^2 + \frac{B(B\tan^2\omega + B)}{C}y^2 = 1.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Curve auch der Durchschnitt der Fläche
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$
mit dem Kegel zweiten Grades ist
$$A^2x^2 + B^2y^2 - (C\cot\omega)^2z^2 = 0.$$

Lässt man ω von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, so zieht sich der Kegel, der anfangs mit der XY-Ebene zusammenfällt, enger und enger zusammen und fällt schliesslich mit der Z-Achse zusammen; dabei bedeckt sich die Fläche zweiten Grades mit Zonen von verscwindender Breite; an den beiden Rändern jeder solchen Zone haben die Normalen unendlich wenig verschiedene, längs desselben Randes constante Neigung.

Der Inhalt einer solchen Zone wird gefunden, wenn man in 5. die auf φ bezügliche Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π ausführt; um die Zone φ zu erhalten, an deren Rändern die Normalen die Neigungen ω_0 und ω_1 haben, hat man alsdann die auf ω bezügliche Integration von ω_0 bis ω_1 zu erstrecken; es ist also
$$S = \pm ABC\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\omega\, d\omega\, d\varphi}{(BC\cos^2\omega\cos^2\varphi + CA\cos^2\omega\sin^2\varphi + AB\sin^2\omega)^2}.$$

Um die erste Integration auszuführen, ersetzen wir
$$\sin^2\omega \text{ durch } \sin^2\omega\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$
und setzen zur Abkürzung
$$m = B(C\cos^2\omega + A\sin^2\omega), \quad n = A(C\cos^2\omega + B\sin^2\omega);$$
dadurch geht das Integral über in
$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\cos\omega\, d\omega\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi)^2}.$$

Substituirt man hier $\tan\varphi = t$, so erhält man
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi)} = 4\int_0^{\infty}\frac{(1+t^2)\,dt}{(m+nt^2)^2} = \pi\cdot\frac{m+n}{mn\sqrt{mn}},$$
mithin
$$S = \pm\pi ABC\cdot\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{mn}}\cdot\cos\omega\, d\omega.$$

Dieses Integral wird leicht auf elliptische reducirt. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, wollen wir voraussetzen, dass A und B gleiche Zeichen haben, dass bei dem Hyperboloiden A dem absoluten Werthe nach grösser als B ist und im Falle des Ellipsoids $A < B < C$ ist. Setzen wir
$$\alpha = \sqrt{1-\frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1-\frac{B}{C}},$$
so sind α und β jederzeit real und $\alpha > \beta$. Mit Einführung dieser Werthe erhalten wir nun
$$m = BC(1-\alpha^2\sin^2\omega), \quad n = AC(1-\beta^2\sin^2\omega),$$
$$S = \pm\frac{\pi}{C\sqrt{AB}}\cdot\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\frac{A}{1-\alpha^2\sin^2\omega}+\frac{B}{1-\beta^2\sin^2\omega}\right)\frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2\omega)(1-\beta^2\sin^2\omega)}}.$$

Hierin setzen wir
$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}},$$
und führen eine neue Variable durch die Gleichung ein
$$\sin\omega = \frac{1}{\alpha}\sin\varphi;$$
hierdurch entsteht
$$S = \pm\frac{\pi}{\alpha C\sqrt{AB}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{A}{1-\sin^2\varphi}+\frac{B}{1-k^2\sin^2\varphi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wird die Zone von der XY-Ebene an gerechnet, so ist $\varphi_0 = 0$, und daher
$$S = \pm\frac{\pi}{\alpha C\sqrt{AB}}\int_0^{\varphi}\left(\frac{A}{\cos^2\varphi}+\frac{B}{\Delta^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= \pm\frac{\pi A}{\alpha k'^2 C\sqrt{AB}}[\tan\varphi\,\Delta\varphi + k'^2F(\varphi) - E(\varphi)]$$
$$\pm\frac{\pi B}{\alpha k'^2 C\sqrt{AB}}\left[E(\varphi) - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right],$$
$$= \pm\frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\left[[A-(C-B)\cos^2\varphi]\frac{\tan\varphi}{\Delta\varphi} + AF(\varphi) + (C-A)E(\varphi)\right].$$

Diese Gleichung enthält das bemerkenswerthe Resultat: Jede Zone einer centralen Fläche zweiten Grades, längs deren Rändern die Normalen ihre Neigung gegen eine Symmetrieebene der Fläche nicht ändern, lässt sich durch elliptische Integrale ausdrücken.*)

Die halbe Fläche des Ellipsoids erhält man aus der vorstehenden Gleichung, wenn man $sin\,\omega = 1$, also

$$sin\,\varphi = \alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}$$

setzt; das Verhältniss der Oberfläche des Ellipsoids zu einem Hauptschnitte desselben wird daher, abgesehen von einem in Bezug auf die Achsen algebraischen Theile, durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art berechnet.

Führt man den Werth für φ in die Gleichung für S ein, so erhält man für die ganze Oberfläche des Ellipsoids

$$S = \frac{2\pi}{C} + \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}[F(\varphi) + (C-A)\,E(\varphi)]\,.$$

*) Diesen Satz hat Schloemilch gegeben; weitere Folgerungen hierzu sowie weitere Anwendungen der elliptischen Integrale auf die Complanation von Flächen siehe Compendium der höhern Analysis, 2. Aufl. II. Bd. pag. 346 u. f.

III. Theil. Differentialgleichungen.

§ 23. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Unter einer Differentialgleichung wird eine Gleichung verstanden, in welcher Differentialquotienten abhängiger Variabeln in Bezug auf unabhängige (neben den Variabeln selbst und constanten Grössen) vorkommen.

Ist jede abhängige Veränderliche als Function nur einer Veränderlichen betrachtet, so bezeichnet man die Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung zum Unterschiede von partialen Differentialgleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von Functionen mehr als einer Variabeln enthalten.

2. Wenn eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln den Differentialquotienten $n$ter Ordnung der abhängigen Variabeln und keinen höherer Ordnung enthält, so wird sie als Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet.

Eine Gleichung zwischen zwei Variabeln, die weder den Differentialquotienten $n$ter Ordnung der unabhängigen Variabeln noch höhere Differentialquotienten enthält, und die so beschaffen ist, dass alle Werthe der Variabeln und des 1., 2. 3., . . . bis $n$ten Differentialquotienten, die dieser Gleichung, sowie der durch einmalige oder wiederholte Differentiation daraus hervorgehenden Gleichungen genügen, auch einer gegebenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung Genüge leisten, wird als ein Integral der Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezeichnet.

3. Wenn ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x, y so beschaffen ist, dass dieselben Systeme von Werthen x, y, $dy:dx$ der Differentialgleichung, sowie auch dem Integrale und dem aus dem Integrale folgenden Werthe von $dy:dx$ genügen, so bezeichnen wir es als das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Durch die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ werden drei Veränderliche x, y, y' mit einander verknüpft; betrachten wir x und y als rechtwinkelige Punktcoordinaten, so können wie die Differentialgleichung geometrisch so deuten, dass durch dieselbe jedem Punkte x, y der Ebene eine oder mehr als eine Richtung y' zugeordnet wird; diese Richtung kann durch eine Gerade T vertreten werden, die durch den Punkt x, y so gezogen wird, dass $tang(x, T) = y'$; dann ist also durch die Differentialgleichung jedem Punkte der Ebene eine durch den Punkt gehende Gerade oder eine bestimmte Anzahl solcher Geraden zugeordnet.

Ein Integral $\Phi(x, y) = 0$ der Differentialgleichung repräsentirt eine Curve, die in jedem ihrer Punkte von einer zu diesem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Geraden berührt wird. Enthält die Gleichung eine willkürliche Constante C, so gehört zu der Gleichung nicht eine individuelle Curve, sondern eine Gruppe von unendlich vielen Curven, die erhalten werden, indem man C alle Werthe nach einander beilegt. Die Constante kann dann immer so gewählt werden, dass die Curve $\Phi(x, y, C) = 0$ durch einen gegebenen Punkt P_0 geht; man hat dann nur nöthig, C aus der Gleichung zu bestimmen

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0;$$

und umgekehrt: Soll die Gleichung $F(x, y) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. sein, so muss ihr durch jeden Werth von x und y genügt werden können, sie muss also eine willkürliche Constante enthalten; ist diese so gewählt, dass die Curve $\Phi(x, y) = 0$ einen bestimmten Punkt P enthält, so muss alsdann durch die besondere Beschaffenheit der Function Φ die Tangente der Curve $\Phi(x, y) = 0$ in P mit einer der durch die Differentialgleichung dem Punkte P zugeordneten Geraden zusammenfallen.

Unter einem particulären Integrale versteht man ein Integral einer Differentialgleichung, das aus einem allgemeinen hervorgeht, indem man der willkürlichen Constanten einen besonderen Werth ertheilt.

4. Wir wollen nun zunächst zeigen, wie aus einer Gleichung

1. $$\Phi(x, y, C) = 0,$$

die eine willkürliche Constante C enthält, eine C nicht enthaltende Differentialgleichung I. O. abgeleitet werden kann, von welcher $\Phi(x, y, C)$ das allgemeine Integral ist.

Aus $\Phi(x, y, C) = 0$ erhalten wir durch Differentiation

2. $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Eliminiren wir nun C aus 1. und 2., so erhalten wir eine Differentialgleichung

3. $$F(x, y, y') = 0.$$

Ist nun das System der Gleichungen 1. und 3. mit dem Systeme 1. und 2. aequivalent und wird C so bestimmt, dass 1. durch einen gegebenen Punkt x, y erfüllt wird, so sind die aus 3. zugeordneten Werthe y' übereinstimmend mit den aus 2. folgenden; also ist 1. das allgemeine Integral von 3.

Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Aus der Gleichung

4. $$(y - C)^2 = 2px$$

folgt durch Differentiation

$$(y - C)y' = p.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von $y - C$ in 4. ein, so erhält man die zu 4. gehörige Differentialgleichung

$$y' = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B. Die Gleichung $x^2 - 2Cy - C^2 - a^2 = 0$ liefert

$$Cy' = x;$$

setzt man hieraus C in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0,$$

oder
$$y' = \frac{x}{x^2 - a^2}\left(y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2}\right).$$

C. Die Gleichung

5. $$(x - 2C)^2 + k^2 Cy^2 = C^2$$

stellt für positive C eine Gruppe von Ellipsen dar, deren Mittelpunkte auf der Abscissenachse liegen; die auf der XAchse liegende Ellipsenachse ist gleich der Abscisse des Ellipsenmittelpunktes; die andern beiden Scheitel liegen auf der Parabel $\eta^2 = k^2\xi$; für negative C ergeben sich Hyperbeln.

Aus 5. ergiebt sich

6. $$x - 2C + k^2 Cyy' = 0.$$

Führt man zunächst den hieraus folgenden Werth

$$x - 2C = -k^2 Cyy'$$

in 5. ein, so folgt

$$k^4 C y^2 y'^2 + k^2 y^2 = C.$$

Vergleicht man den hieraus folgenden Werth von C mit dem aus 6. sich ergebenden, so entsteht die zu 5. gehörige Differentialgleichung

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{2k^2y^2 - x}{k^4 xy^2} = 0,$$

oder auf y reducirt

$$y' = \frac{1}{2k^2xy}\left(k^2y^2 + \sqrt{4x^2 - 8k^2xy^2 + k^4y^4}\right).$$

D. Die Gleichung

7. $$2x - 3Cy + C^3 = 0$$

repräsentirt eine Reihe von Geraden, für welche das Quadrat des Abschnittes auf der X-Achse zum Cubus des Abschnittes auf der Y-Achse das constante Verhältniss $= -27:4$ hat. Aus 7. folgt

$$2 = 3Cy',$$

und hieraus und aus 7. die Differentialgleichung

$$xy'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

E. Aus dem allgemeinen Integrale

$$\varphi = l\left(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \, Arc\,tang \, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right) = C$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x\left(2x - y + \sqrt{x^2 - xy}\right)},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}}.$$

Daher ist die zugehörige Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}.$$

5. Die Aufgabe: Zu einer gegebenen Differentialgleichung das allgemeine Integral zu finden (eine Differentialgleichung zu integriren) ist im Allgemeinen durch die bisher bekannten Functionen (Integrale von Functionen mit inbegriffen) nicht lösbar. Im Allgemeinen werden durch Differentialgleichungen neue Functionen definirt. Es besteht dann die Aufgabe, aus der Differentialgleichung die Eigenschaften der durch sie definirten Function möglichst erschöpfend abzuleiten, und ein Verfahren anzugeben, durch welches die Function annäherungsweise gefunden werden kann.

Wir wollen ein solches Annäherungsverfahren zunächst für Differentialgleichungen erster Ordnung angeben. Um ein Integral der Gleichung

1. $$y' = f(x, y)$$

zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen Punkte P_0 aus in der Richtung $y_0' = f(x_0, y_0)$ um eine kleine Strecke bis zu dem Punkte P_1, dessen Coordinaten $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ sind, wobei also

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x_0.$$

Hierauf gehen wir von P_1 bis zu dem Punkte P_2, für den $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, wobei

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,\Delta x_1 ,$$

und so fort, so dass wir von jedem Punkte P_i bis zum nächsten P_{i+1} in der Richtung weiter gehen, für welche

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Gehen die Abscissenveränderungen Δx_0, Δx_1, Δx_2 . . . zur Grenze Null über, so geht das Polygon $P_0 P_1 P_2$ . . . in eine Curve über, und diese Curve ist ein Integral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

6. Wenn zwei allgemeine Integrale einer Differentialgleichung I. O. nach den willkürlichen Constanten aufgelöst die Gleichungen ergeben

1. $$F = C, \quad f = c,$$

so ist F eine Function von f, d. h. wenn man aus der Gleichung $f(x, y) = f$ die Variable y (oder x) berechnet, indem man das rechts stehende f als neue Variable betrachtet, und diesen Werth in F substituirt, so enthält F dann nur die Variable f, nicht auch x (oder y).

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

In beiden Gleichungen kommt keine willkürliche Constante mehr vor, aus beiden muss sich also für alle Werthe von x und y derselbe Werth für y' ergeben; die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

2. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Drückt man y in der angegebenen Weise durch x und f aus und setzt dies in F ein, so erhalte man $\mathfrak{F}$. Diese Function kann nur f und x enthalten; man hat

3. $$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Bei dem letzten Differentialquotienten ist y als Function von x und f gedacht und vorausgesetzt, dass sich f nicht ändert; daher bestimmt sich derselbe aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Wird der hieraus folgende Werth in 3. eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right) : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Da nun f nicht frei von y sein kann, so folgt aus 4. und 2.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0;$$

also enthält $\mathfrak{F}$ die Variable x nicht, w. z. b. w.*).

*) Statt dieses Beweises hätte auf den Satz Diff. Rechn. § 4, No. 5 verwiesen werden können; wir haben es vorgezogen, einen selbständigen Beweis für den einfachsten Fall jenes allgemeinen Satzes zu geben und bemerken, dass der Gedankengang disses Beweises sich auch auf den allgemeinen Satz anwenden lässt. Vergl. u. A. BALTZER, Determinanten, § 12.

Aus der Gleichung $\mathfrak{F}(f) = C$ folgt $f = c$, worin c eine willkürliche Constante bezeichnet. Daher ist das allgemeine Integral $F = C$ von $f = c$ nicht wesentlich verschieden. Wir geben dieser Thatsache durch den Satz Ausdruck: Eine Differentialgleichung I. O. hat **nur ein** allgemeines Integral.

7. Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. Die Werthe der Constanten C für diejenigen Integralcurven, welche durch einen gegebenen Punkt x, y gehen, erhält man durch Auflösung der Gleichung

$$f(x, y, C) = 0,$$

wenn man darin x und y als gegeben betrachtet. So viele verschiedene Auflösungen diese Gleichung hat, eben so viele verschiedene Integralcurven gehen durch P. Diese Curven haben im Allgemeinen in P keine gemeinsame Tangente. Die n Geraden, welche diese Curven in P berühren, sind die Geraden, welche dem Punkte P durch die gegebene Differentialgleichung zugeordnet sind. Hieraus folgt: Wenn der Differentialquotient y' eine n-deutige Function von x und y ist, so ist auch die Constante des allgemeinen Integrals n-deutig durch x und y bestimmt.

Beispiele. A. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

folgt sofort das allgemeine Integral

$$lx + ly = c.$$

Hier erscheint c als unendlich vieldeutige Function von x und y. Geht man aber beiderseits zu den Logarithmanden über und bezeichnet e^c mit C, so erhält man für das allgemeine Integral die neue Gestalt

$$xy = C,$$

und hierin ist C eindeutig durch x und y bestimmt.

B. Für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

haben wir das allgemeine Integral

$$arcsin x + arcsin y = c.$$

Hier ist ebenfalls c unendlich vieldeutig. Macht man von dem Additionstheoreme Gebrauch

$$arcsin x + arcsin y = arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

und ersetzt $sin c$ durch γ, so erhält man

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \gamma.$$

Durch Quadriren ergiebt sich, wenn man γ^2 durch C ersetzt,

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} = C,$$

und hierin ist C zweideutig, ebenso wie y' zweideutig ist. Hieraus folgt noch die rationale Gleichung

$$C^2 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)\,C + (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

8. Wenn durch eine Differentialgleichung y' n-deutig bestimmt ist, so werden im Allgemeinen für unzählig viele Punkte zwei von den n Werthen zusammenfallen; die Curve dieser Punkte wollen wir als Verzweigungscurve der Differentialgleichung bezeichnen. Ist y' explicite als Function von x und y gegeben

$$y' = \varphi(x, y),$$

so kann man ohne Weiteres die Gleichung der Verzweigungscurve ablesen.

Ist z. B.

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}},$$

so ist die Verzweigungscurve

$$x^2 - y^2 = 0,$$

besteht also aus den beiden Geraden, welche die Winkel der Achsen halbiren.

Bezeichnen $g_1, g_2, \ldots g_n$ die verschiedenen Werthe, welche y' für einen gegebenen Punkt x, y hat, so sind dieselben die Wurzeln der Gleichung.

1. $$F \equiv (y' - g_1)(y' - g_2) \ldots (y' - g_n) = 0;$$

dieselbe gebe ausgerechnet

2. $$F \equiv y'^n + A_1 y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n = 0.$$

Zwei Wurzeln y' dieser Gleichung fallen zusammen, wenn der Verein von 2. und der folgenden Gleichung besteht

3. $$\frac{\partial F}{\partial y'} = n y'^{n-1} + (n-1) A_1 y'^{n-2} + \ldots A_{n-1} = 0.$$

Die Bedingung für den Verein von 2. und 3. erhält man nach SYLVESTER's Methode, indem man 2. und 3. der Reihe nach mit $y'^{n-2}, y'^{n-1}, \ldots y', 1$, bez. $y'^{n-1}, y'^{n-2}, \ldots y', 1$ multiplicirt, und aus diesen $2n - 1$ Gleichungen die linear darin vorkommenden Grössen $y'^{2n-2}, y'^{2n-1}, \ldots y', 1$ in bekannter Weise eliminirt. Man erhält

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 \ldots A_{n-1} & A_n & & \\ & 1 & A_1 \ldots A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & \\ & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 1 & A_1 & A_2 \ldots A_n \\ n(n-1)A_1 & (n-2)A_2 \ldots A_{n-1} & & & & \\ n & (n-1)A_1 \ldots 2A_{n-2} & A_{n-1} & & & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 1 & (n-1)A_1 \ldots A_{n-1} & \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Verzweigungscurve.

9. Die Constante des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung I. O. sei für jeden Punkt der Ebene n-deutig bestimmt; ihre Werthe für den Punkt x, y seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$. Bildet man die Gleichung

$$(C - \gamma_1)(C - \gamma_2) \ldots (C - \gamma_n) = 0.$$

so sind die Coefficienten eindeutige Functionen von x und y. Es giebt unzählig viele Punkte der Ebene, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung zusammenfallen; die Curve dieser Punkte nennen wir die **Verzweigungscurve des allgemeinen Integrals.**

Die Gleichung für C ergebe

$$\Phi \equiv C^n + \alpha_1 C^{n-1} + \alpha_2 C^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0;$$

alsdann erhält man die Gleichung dieser Verzweigungscurve in Form einer verschwindenden Determinante, wenn man C nach SYLVESTER's Methode aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dC} = 0.$$

Diese Curve hüllt entweder die Curven Φ ein und hat in jedem ihrer Punkte mit einer der Curven Φ eine gemeinsame Tangente, oder sie enthält die Doppelpunkte des Curvensystems

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(Differentialrechn. § 11, No. 6).

Hieraus folgt sofort: **Ist die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales die Einhüllende der Curven $\Phi = 0$, so genügt sie in allen ihren Punkten der Differentialgleichung.**

Ist die Verzweigungscurve dagegen die Curve der Doppelpunkte des Curvensystems $\Phi = 0$, so genügt sie im Allgemeinen der Differentialgleichung nicht. Denn im Allgemeinen ist für einen Doppelpunkt einer Curve $\Phi = 0$ der aus der Differentialgleichung folgende Werth von y' nicht unbestimmt, wie der aus dem allgemeinen Integrale folgende, sondern bestimmt; man kann nun nicht den Schluss ziehen, dass dieser Werth mit dem aus der Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales folgenden übereinstimmt.

Wenn die Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung genügt, so ist im Allgemeinen für die Punkte derselben C nicht constant; sie ist alsdann kein particuläres Integral, sondern wird als **singuläres Integral** der Differentialgleichung bezeichnet.

10. Unabhängig von geometrischen Betrachtungen untersuchen wir nun auf analytischem Wege die Existenz eines singulären Integrales, d. i. einer Gleichung, die der Differentialgleichung genügt, ohne ein particuläres Integral zu sein.

Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O.; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, dass die Function f die Grössen x, y und C nur in eindeutigen Verbindungen enthält.

Jede beliebige Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ kann auf die Form $f(x, y, C) = 0$ gebracht werden, wenn man C nicht als Constante, sondern als Function von x und y betrachtet, gemäss der Gleichung

$$f(x, y, C) \equiv \varphi(x, y).$$

Die Frage nach einem singulären Integrale können wir nun so stellen: Kann C als Function von x und y so gewählt werden, dass die Gleichung

1. $$f(x, y, C) = 0$$

der Differentialgleichung genügt?

Durch Differentiation folgt aus 1.

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0.$$

Wenn 1. der Differentialgleichung genügt, so wird 2. durch einen der aus der Differentialgleichung folgenden Werthe von y' erfüllt, sobald man C in 2. durch x und y gemäss der Gleichung 1. ersetzt. Unter dieser Voraussetzung erfüllt aber jedes der Differentialgleichung entsprechende y' die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Daher reducirt sich 2. auf

$$\frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

3. $$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0,$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Der Bedingung 3. entsprechen solche Aenderungen von x und y, bei denen C constant bleibt; sie führt somit zum allgemeinen Integrale. Für ein Integral, das in dem allgemeinen nicht enthalten ist, ergiebt sich daher die Bedingung

4. $$\frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Es kann der Fall eintreten, dass den Gleichungen

$$f(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

durch einen constanten Werth von C genügt werden kann; in diesem Falle führt die Elimination von C aus beiden Gleichungen nicht auf ein singuläres, sondern auf ein particuläres Integral.

Eine Ausnahme hiervon tritt in den zahlreichen Fällen ein, wenn für alle Punkte der durch Elimination von C aus

$$f(x, y, C) = \text{ und } \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

sich ergebenden Curve (für welche wir den Namen Verzweigungscurve auch dann beibehalten wollen, wenn f keine algebraische Function von C ist) die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Denn dann erfüllen die Tangenten der Verzweigungscurve zwar die Gleichung 2., es lässt sich aber hieraus nicht schliessen, dass sie der Differentialgleichung genügen.

Man hat daher nach der Elimination von C aus $f = 0$ und $\partial f : \partial C = 0$ jedesmal erst nachzusehen, ob die resultirenden Curven, bez. welche von ihnen, der Differentialgleichung genügen.

11. Es sei y' eine n-deutige Function von x und y; alsdann ist auch (No. 7) die Constante des allgemeinen Integrales n-deutig durch x und y bestimmt. Wenn für einen Punkt P zwei von den Werthen C unendlich wenig verschieden sind, so fallen auch die Tangenten an diese Curven in P unendlich nahe zusammen. Dies sind aber zwei dem Punkte P durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtungen. Wir schliessen daher: Die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales ist zugleich Verzweigungscurve der Differentialgleichung.

Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn ein Theil der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales eine Parallele zur Y-Achse ist; denn für jeden Punkt dieser Geraden ist $y' = \pm\infty$, es fallen also für diese Punkte nicht nothwendig zwei Werthe von y' zusammen.

12. Ein direkter Nachweis für den Zusammenhang der beiden Verzweigungscurven wird zugleich Auskunft darüber geben, ob die Verzweigungscurve der Differentialgleichung aus Curven zusammengesetzt sein kann, die nicht zugleich der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales angehören. Die Differentialgleichung wird aus dem allgemeinen Integrale

1. $$\Phi(x, y, C) = 0$$

erhalten, indem man C aus 1. und aus

2. $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0$$

eliminirt; das Resultat dieser Elimination werde mit (Φ) bezeichnet. Um die Verzweigungscurve der Differentialgleichung zu erhalten, hat man hierauf y' aus den Gleichungen

3. $$(\Phi) = 0 \text{ und } \frac{\partial(\Phi)}{\partial y'} = 0$$

zu eliminiren. Nun ist

4. $$\frac{\partial(\Phi)}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y'}.$$

Die Gleichung 4. zerfällt in die beiden Gleichungen

5. $$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0,$$

6. $$\frac{\partial C}{\partial y'} = 0.$$

Die Gleichungen 1. und 5. ergeben die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrals Die Gleichung 6. sagt aus, dass die durch 2. definirte Function C von y' nicht abhängt; sie ist daher nicht statthaft.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen in folgenden Satz zusammen: Ist $F(x, y, y') = 0$ eine Differentialgleichung I. O. und $\Phi(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral derselben und sind x, y, y', bez. x, y, C in den Functionen F und Φ nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so kann die Resultante, die durch Elimination von C aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, höchstens um einen Faktor, der eine ganze Function von x allein ist, von der Resultante verschieden sein, welche durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

entsteht. Wenn die erstere Resultante der Differentialgleichung genügt, so ist sie das singuläre Integral der Differentialgleichung, soweit sie nicht durch Specialisirung der Constanten C aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht.

13. Für die Ableitung des singulären Integrales haben wir daher folgende Wege:

a) Ist das allgemeine Integral auf C reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe für C zusammenfallen.

b) Sind in dem Integrale $\Phi(x, y, C) = 0$ die Grössen x, y, C nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man C aus

$$\Phi = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

c) Ist die Differentialgleichung auf y' reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe von y' zusammenfallen.

d) Sind in der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ die Grössen x, y, y' nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man y' aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Die auf einem dieser vier Wege erhaltenen Gleichungen hat man darauf hin zu prüfen, ob sie der Differentialgleichung genügen; soweit diese Bedingung erfüllt ist, hat man ein Integral der Differentialgleichung gefunden; dasselbe ist singulär, soweit es nicht durch Specialisirung der Constanten aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kann. Nach Anwendung der Methoden c) und d) hat man noch nachzusehen, ob die Gleichung $x = \gamma$ für irgend einen constanten Werth γ der Differentialgleichung als singuläres oder particuläres Integral genügt.*)

14. Wir betrachten als Beispiele die in No. 4 aufgestellten Differentialgleichungen.

A. Die Differentialgleichung No. 4, 6

*) Auch ohne Kenntniss des allgemeinen Integrales kann man entscheiden, ob man nach den Methoden c) oder d) zu einem singulären oder particulären Integrale gelangt ist. Vergl. u. A. E. Prix, Ueber singuläre Lösungen der Differentialgleichungen I. O. Progr. d. Realschule zu Annaberg i. S. 1876.

$$F \equiv y'^2 - \frac{p^2}{4x} = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv (y - C)^2 - 2px = 0.$$

Man erhält

$$\frac{dF}{dy'} = 2y', \quad \frac{d\Phi}{dC} = -2(y - C).$$

Die Verzweigungscurven sind: für die Differentialgleichung

$$V \equiv -\frac{p^2}{x} = 0;$$

für das allgemeine Integral

$$W \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2yy^2 & -2px \\ 2 & -2y & 0 \\ 0 & 2 & -2y \end{vmatrix} \equiv -8px = 0.$$

Das singuläre Integral ist $x = 0$.

B. Zu der Differentialgleichung

$$y' \equiv \frac{x}{x^2 - a^2}(y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})$$

gehört das allgemeine Integral

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = C.$$

Aus beiden Gleichungen folgt das Integral

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

dasselbe ist singulär, da für die Punkte desselben $C = y$, also variabel ist.

C. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F \equiv y'^2 - \frac{y}{x}y' + \frac{2k^2y^2 - x}{k^4xy^2} = 0$$

ist

$$\Phi \equiv 3C^2 - (4x - k^2y^2)C + x^2 = 0.$$

Die Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C sind

$$\frac{1}{4k^4xy^2}(8k^2xy^2 - 4x^2 - k^4y^4) = 0,$$

bez.

$$8k^2xy^2 - 4x^2 - k^4y^4 = 0.$$

Die letztere Gleichung ist das singuläre Integral. Man überzeugt sich leicht, dass es der Differentialgleichung genügt. Durch Differentiation folgt nämlich

$$y' = \frac{2(x - k^2y^2)}{k^2y(4x - k^2y^2)}.$$

Ferner folgt aus dem singulären Integrale

$$k^2y^2 = 2x(2 + \sqrt{3}), \quad x - k^2y^2 = -2x\sqrt{3},$$
$$x - k^2y^2 = -x(3 + 2\sqrt{3}).$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Derselbe Werth folgt aus der Differentialgleichung für die Punkte, welche dem singulären Integrale genügen.

D. Die Differentialgleichung

$$F \equiv xy'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv C^3 - 3Cy + 2x = 0.$$

Die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C,

$$x^2 - y^3 = 0$$

ist das singuläre Integral.

E. Die Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

hat das allgemeine Integral

$$\varphi = l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathit{Arc\,tang}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right) = C.$$

Für die Verzweigungscurve

$$x - y = 0$$

ist

$$y' = 1,$$

während für die Punkte derselben aus der Differentialgleichung folgt

$$y' = 2.$$

Daher ist in diesem Falle die Verzweigungscurve kein Integral der Differentialgleichung.

F. Hat die Differentialgleichung die Form

$$y' = F + \sqrt{\Psi}$$

wobei F und Ψ rationale Functionen von x und y sind, so ist ihre Verzweigungscurve

$$\Psi = 0.$$

Der aus dieser Gleichung folgende Werth von y' stimmt im Allgemeinen nicht mit dem aus der Differentialgleichung unter der Bedingung $\Psi = 0$ folgenden Werthe

$$y' = F$$

überein; die Verzweigungscurve ist daher für Differentialgleichungen dieser Form im Allgemeinen kein Integral. Das vorige Beispiel bildet hiervon einen besonderen Fall. Ausnahmen bilden u. A. alle Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral die Form hat

2. $$f + \sqrt{\varphi} = C,$$

wobei f und φ rationale Functionen sind

Zu 2. gehört die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\sqrt{\varphi} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{2\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\sqrt{\varphi} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}},$$

welche auf die Form 1. gedacht wird, indem man den Nenner rational macht.

§ 24. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Wir wenden uns nun zur Integration der Differentialgleichungen I. O. Eine allgemeine Methode, durch welche die Herstellung des Integrals in geschlossener Form geleistet oder auf gewöhnliche Integrationen zurückgeführt werden könnte, giebt es nicht; wir müssen uns begnügen, eine Reihe von Fällen anzugeben, in welchen die Integration ausgeführt werden kann, und schliesslich Methoden zu entwickeln, nach welchen das Integral in Form einer unendlichen Reihe gewonnen wird.

Das Integral der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist sofort gefunden, wenn die Variabeln getrennt sind, d. i. wenn M nur eine Function von x, und N nur eine Function von y ist; schreiben wir, um dies zu veranschaulichen, $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ für M und N, so haben wir die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0,$$

und erhalten hieraus ohne Weiteres

$$\int\varphi(x)\,dx + \int\psi(y)\,dy = C.$$

Willkürliche Constanten bei den Integralen anzubringen ist in diesem Falle wegen der rechts stehenden Constanten nicht nöthig.

Beispiel. Aus $2(a+x)\,dx + 3y^2 dy = 0$ folgt das allgemeine Integral $(a+x)^2 + y^3 = C$.

2. Wenn die Variabeln nicht getrennt sind, so gelingt es zuweilen durch Division oder Multiplication mit Functionen der Variabeln die Trennung herbeizuführen. So ergiebt sich aus

1. $$X_1 Y_1\,dx + X_2 Y_2\,dy = 0$$

durch Division mit $X_2 Y_1$

$$\frac{X_1}{X_2}dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0.$$

Sind nun X_1, X_2 Functionen von x allein, und Y_1, Y_2 Functionen von y allein, so ist das allgemeine Integral von 1.

$$\int\frac{X_1}{X_2}dx + \int\frac{Y_1}{Y_2}dy = C.$$

Beispiele. A. $xy^2\,dx - (a-x)(b-y)\,dy = 0$.

Hieraus folgt $$\frac{x}{a-x}dx - \left(\frac{b}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$ly - al(a-x) = \frac{xy-b}{y} + C.$$

B. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$.

Diese Gleichung ergiebt $$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$arc\,tang\,x + arc\,tang\,y = C.$$

C. $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

Hieraus folgt $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = C.$$

Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},$$

so erkennt man, dass die singulären Lösungen in der Gleichung enthalten sind

$$(1-x^2)(1-y^2) = 0.$$

Alle vier hierin enthaltenen Geraden genügen der Differentialgleichung; da keine durch Specialisirung aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht, so sind alle singuläre Lösungen.

3. Eine Reihe von einfachen geometrischen Aufgaben führen auf Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die Variabeln getrennt werden können.

A. Die Curven zu bestimmen, bei denen die Subnormale eine gegebene Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist.

Aus der Bedingung $$yy' = \varphi(y)$$

folgt $$\int\frac{y\,dy}{\varphi(y)} = x + C.$$

B. Soll die Subnormale eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist die Differentialgleichung

$$yy' = \varphi(x),$$

und daher die Gleichung der gesuchten Curve

$$y^2 = 2\int\varphi(x)\,dx + C.$$

C. Wird verlangt, dass die Subtangente eine Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist, so hat man

$$\frac{y}{y'} = \varphi(y),$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int\frac{\varphi(y)\,dy}{y} = x + C.$$

D. Soll die Subtangente eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist

$$\frac{y}{y'} = \varphi(x),$$

also $$ly = \int\frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

E. Soll die Tangente eine Function der Ordinate sein, so ist

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \varphi(y);$$

hieraus folgt $$y' = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$\int\frac{\sqrt{\varphi^2-y^2}}{y}dy = x + C.$$

F. Auf ähnliche, einfachste, durch Trennung der Variabeln sofort zu integrirende Differentialgleichungen führen die Aufgaben: Eine Curve zu bestimmen, in welcher die Polarsubtangente, die Polarsubnormale, oder der Winkel zwischen Tangente und Radius vector eine gegebene Function des Radius vector oder des Polarwinkels ist.

G. Soll das von einem Curvenbogen, der Abscissenachse einer festen Ordinate und der Ordinate eines laufenden Curvenpunkts begrenzte Segment einer Curve eine gegebene Function $\varphi(y)$ der Endordinate sein, so hat man die Differentialgleichung

$$y\,dx = \varphi'(y)\,dy,$$

woraus folgt $$\int\frac{\varphi'(y)}{y}dy = x + C.$$

Wird verlangt, dass das Segment eine gegebene Function der Endabscisse sei, so führt die Aufgabe auf keine Differentialgleichung.

4. Wenn in der Gleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

M und N ganze homogene Functionen von x und y vom Grade n sind, so gelingt die Trennung der Variabeln durch die Substitution $y = zx$. Da in jedem Gliede von M und N die Anzahl der variabeln Faktoren n ist, so folgt, dass nach der Substitution M und N in Produkte von x^n mit ganzen

Functionen von z übergehen. Werden dieselben mit $M(z)$ und $N(z)$ bezeichnet, und bemerkt man, dass

$$dy = zdz + xdz,$$

so erhält man für z und x die Differentialgleichung

$$M(z)\,dx + N(z)\,(zdx + xdz) = 0.$$

Nach der Trennung der Variabeln folgt hieraus das allgemeine Integral

$$lx = -\int \frac{N(z)}{M(z) + zN(z)}\,dz + C.$$

Durch die Substitution folgt aus der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{M(z)}{N(z)} = M\left(\frac{y}{x}\right) : N\left(\frac{y}{x}\right).$$

Umgekehrt: Wenn es gelingt, y' als Function von $y:x$ darzustellen; so werden die Variabeln durch die Substitution $y = zx$ getrennt, denn ist

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

so liefert die Substitution

$$zdx + xdz = \varphi(z)\,dx;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$lx = -\int \frac{dz}{z + \varphi(z)} + C.$$

Hierin hat man nach der Integration z durch $y:x$ zu ersetzen.

Differentialgleichungen dieser Art werden als **homogene Differentialgleichungen** bezeichnet.

5. Dieselbe Substitution führt auch bei der nicht homogenen Differentialgleichung zum Ziele

$$y' = \frac{y}{x} + f(x)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Denn man erhält

$$xdz = f(x)\,\varphi(z)\,dx,$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = \int \frac{f(x)}{dx}\,dx + C.$$

6. **Beispiele.** A. Die Curve zu bestimmen, bei welcher die Tangente der Geraden parallel ist, die den Winkel des Radius vector mit der Ordinatenachse halbirt. Bezeichnet ψ den halben Polarwinkel, so soll sein

$$y' = tang(45^\circ + \psi) = \frac{1 + tang\,\psi}{1 - taug\,\psi} = \frac{\sqrt{1 + cos\,2\psi} + \sqrt{1 - cos\,2\psi}}{\sqrt{1 + cos\,2\psi} - \sqrt{1 - cos\,2\psi}} = \frac{1 + sin\,2\psi}{cos\,2\psi}.$$

Daher hat man die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{y^2 + x^2}\right).$$

Die Substitution $y = zx$ liefert

$$xz' + z = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x},$$

hieraus folgt das allgemeine Integral

$$l\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) = lx + C.$$

Denkt man sich C als Logarithmus einer andern Constanten, die wieder mit C bezeichnet werden kann, und geht dann von den Logarithmen zu den Logarithmanden über, so erhält man

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = Cx.$$

Substituirt man rückwärts $z = y:x$, so ergiebt sich

$$Cx^2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Hieraus folgt die rationale Gleichung

$$C^2x^2 - 2Cy = 1.$$

Ersetzt man hier C durch $1:C$, so erhält man das allgemeine Integral

$$C^2 + 2Cy = x^2,$$

in Uebereinstimmung mit No. 4, 7.

B. Die Strecke OS_2, welche eine Curventangente von der Ordinatenachse abschneidet. ist bekanntlich $y - xy'$; ist μ der Winkel, unter welchem diese Strecke von der Projection P' des Curvenpunkts, auf die Abscissenachse aus gesehen wird, so ist $tang\,\mu = y : x - y'$. Wird nun die Curve verlangt, deren Tangente in P normal zu $P'S_2$ ist, so ergiebt sich für dieselbe die Differentialgleichung

1. $$y' = 1 : \left(\frac{y}{x} - y'\right).$$

Hieraus folgt für y' eine quadratische Gleichung, und durch Auflösung derselben

2. $$y' = \frac{y}{2x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{4x^2}}.$$

Die Substitution $y = zx$ führt zu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} - \frac{z}{2}},$$

oder, wenn rechts der Nenner rational gemacht wird,

$$\frac{dx}{x} = \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + \frac{z}{2}\right)dz.$$

Die Integration ergiebt

$$lx = \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2}\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + l\left(\frac{z}{2} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}\right) + C.$$

Hieraus folgt schliesslich, wenn C geeignet geändert wird:

3. $$4x^2\,l\left(y - \sqrt{4x^2 + y^2}\right) = y^2 + y\sqrt{4x^2 + y^2} + C.$$

Aus 2. folgt die Verzweigungscurve für y'

4. $$4x^2 + y^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y' = -4x : y$, aus 2. ergiebt sich mit Rücksicht auf 4. $y' = y : 2x$; vergleicht man beide Werthe, so erhält man $8x^2 + y^2 = 0$; da diese Gleichung mit 4. nicht übereinstimmt, so ist 4. kein Integral der Differentialgleichung.

7. Um die Differentialgleichung

1. $$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

in eine homogene zu verwandeln, substituiren wir

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta.$$

Wir erhalten

$$ax + by + c = au + bv + a\alpha + b\beta + c,$$
$$a'x + b'y + c' = a'u + b'v + a'\alpha + b'\beta + c'.$$

Werden nun α und β aus dem Systeme bestimmt

2. $$a\alpha + b\beta = -c,$$
$$a'\alpha + b'\beta = -c',$$

so erhält man die transformirte homogene Gleichung

3. $$(au + bv)du + (a'u + b'v)dv = 0.$$

Die Gleichungen 2. führen auf unendliche Werthe von α und β, wenn

$ab' - a'b = 0$; wird $a' = na$ gesetzt, so ist alsdann $b' = nb$, und daher $a'x + b'y = n(ax + by)$.

Setzt man jetzt $ax + by = z$, so wird

$$bdy = dz - adx,$$

und man erhält die Differentialgleichung

$$b(z + c)dx + (nz + c')(dz - adx) = 0,$$

in welcher sich die Variabeln leicht trennen lassen*).

8. Als **lineare Differentialgleichungen erster Ordnung** bezeichnet man die Gleichungen von der Form

1. $$y' + Py = Q,$$

wenn darin P und Q Functionen von x allein sind. Ist $Q = 0$, so lassen sich die Variabeln sofort sondern, und man erhält das allgemeine Integral

2. $$ly = -\int Pdx + C.$$

Wir wollen nun versuchen, das allgemeine Integral der Gleichung 1. dadurch zu erhalten, dass wir in 2. die willkürliche Constante C durch eine Function von x ersetzen; vielleicht lässt sich diese Function so bestimmen, dass der Differentialgleichung 1 genügt wird.

Ersetzen wir in 2. C durch z und differenziren, so ergiebt sich

$$y' = -Py + z'y.$$

Dieser Werth wird in 1. eingesetzt und liefert für z die Gleichung $z'y = Q$, oder, wenn y hierin gemäss der Gleichung

3. $$ly = -\int Pdx + z$$

durch x und z ersetzt wird,

4. $$e^z dz = Qe^{\int Pdx} dx.$$

Hieraus folgt für z das allgemeine Integral

$$e^z = \int Qe^{\int Pdx} dx + C.$$

Daher folgt schliesslich das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$y = e^{-\int Pdx}\left(C + \int Qe^{\int Pdx} dx\right).$$

9. **Beispiel.** Die Curven zu bestimmen, deren Tangenten von der Ordinatenachse das geometrische Mittel der Abscisse und einer gegebenen Strecke a abschneiden.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$y - xy' = \sqrt{ax},$$

oder

$$y' - \frac{1}{x}y = -\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Diese Gleichung ist linear; es ist $P = -1 : x$, $Q = -\sqrt{a : x}$, und daher das allgemeine Integral

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C - \int \sqrt{\frac{a}{x}}\, e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right).$$

Nach Ausführung der beiden Integrationen erhält man

$$y = Cx + 2\sqrt{ax}.$$

10. Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung kann auch auf einem andern Wege gefunden werden, den wir ebenfalls angeben wollen. Man versucht, die Aufgabe dadurch auf einfachere zurückzuführen, dass man y durch das Produkt uv zweier noch unbestimmter Functionen von x ersetzt. Hierdurch erhält man die Gleichung

*) Boole, A treatise on differential equations, 4. ed., London 1877, pag. 36.

1. $$uv' + vu' + Puv = Q.$$

Bestimmt man nun u aus der Gleichung

2. $$u' + Pu = 0,$$

so bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung übrig

3. $$uv' = Q.$$

Da es bei der Integration von 2. nur darauf ankommt, irgend eine dieser Gleichung entsprechende Function von x zu erhalten, so kann man der willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals von 2. einen solchen besonderen Werth geben, dass das Integral möglichst einfach wird. Die willkürliche Constante des allgemeinen Integrals der Gleichung 1. tritt erst mit der Integration von 3. ein.

Die Gleichung 2. stimmt mit No. 8, 1 für den Fall $Q = 0$, überein; und die Gleichung 3. ist von der Gleichung No. 8, 4 nicht verschieden, wenn man y durch u und z durch v ersetzt.

11. Die nichtlineare Differentialgleichung

1. $$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P = Q,$$

worin P und Q wieder Functionen von x allein sind, lässt sich in eine **lineare** verwandeln; setzt man nämlich $f(y) = z$, so ist $f'(y)\,dy = dz$ und man erhält

$$z' + Pz = Q.$$

Auf diese Gleichung führt z. B. die folgende

2. $$y' + Py = Qy^m.$$

Dividirt man nämlich durch $-y^m : (m-1)$, so erhält man

$$-(m-1)y^{-m}y' - (m-1)Py^{-(m-1)} = -(m-1)Q;$$

und diese Gleichung stimmt mit 1. überein, wenn man $f(y)$, P, Q durch $y^{-(m-1)}$, $-(m-1)P$, $-(m-1)Q$ ersetzt.

12. Das allgemeine Integral der nicht linearen Gleichung*)

$$y' + Py = Qy^2 + R$$

lässt sich angeben, wenn man ein **particuläres Integral** $y = u$ dieser Gleichung kennt. Setzt man nämlich das allgemeine Integral in der Form voraus

$$y = u + v,$$

worin v eine noch zu bestimmende Function bezeichnet, so hat man für u und v die Gleichung

$$u' + v' + Pu + Pv = Qu^2 + 2Quv + Qv^2 + R.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$u' + Pu = Qu^2 + R,$$

daher bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung

$$v' + (P - 2Qu)v = Qv^2.$$

Diese Gleichung fällt unter No. 11, 2 für $m = 2$.

Beispiele. A. Der Gleichung

$$y' + Py = Qy^2 + 1 + Px - Qx^2$$

wird durch das particuläre Integral $y = x$ genügt. Daher ist jetzt $u = x$, und für v hat man die Gleichung

$$v' + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

B. $$y' + Py = y^2 + P',$$

wobei P' für $dP : dx$ gesetzt ist.

*) Sturm, Cours d'Analyse, 5. éd., t. II, Paris 1877, pag. 51.

Der Gleichung wird durch $y = P$ genügt; daher ist das allgemeine Integral $y = P + v$, wenn v durch die Gleichung bestimmt wird

$$v' - Pv = Qv^2 .$$

13. Die Gleichung

1. $$xy' - ay + by^2 = cx^n$$

ist unter der Form No. 12, 1 enthalten. Setzen wir versuchsweise $y = kx^{\frac{n}{2}}$, so erhalten wir

$$\frac{n}{2} kx^{\frac{n}{2}} - akx^{\frac{n}{2}} + bk^2x^n = cx^n .$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, wenn

$$n = 2a, \quad k = \sqrt{c:b} .$$

Im Falle $n = 2a$ kann also nach der in No. 12 angegebenen Methode das allgemeine Integral der Gleichung 1. gefunden werden.

Durch geeignete Substitutionen kann man in einer Reihe von Fällen Differentialgleichungen von der Form 1., in welchen n von $2a$ verschieden ist, auf eine Gleichung derselben Form zurückführen, in welcher $n = 2a$ ist.

Setzt man nämlich in 1.

$$y = A + \frac{x^n}{y_1},$$

worin y_1 eine neue Variable ist, so erhält man

2. $$-aA + bA^2 + (n - a + 2bA)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n .$$

Wir wählen nun A so, dass $-aA + bA^2 = 0$; also entweder $A = a:b$, oder $A = 0$.

Die Annahme $A = a:b$ ergiebt die Transformation

3. $$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1},$$

und die transformirte Gleichung

$$(n + a)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n .$$

Durch Multiplication mit $y_1^2 : x^n$ ergiebt sich hieraus

4. $$xy_1' - (a + n)y_1 + cy_1^2 = bx^n .$$

Diese Gleichung geht aus 1. hervor, wenn man a, b, c der Reihe nach durch $(a + n)$, c, b ersetzt.

Wendet man nun auf 4. die Substitution an

5. $$y = \frac{a + n}{c} + \frac{x^n}{y_1},$$

die aus 3. hervorgeht, wenn man a und b durch $a + n$ und c ersetzt, so erhält man

$$xy_1' - (a + 2n)y_1 + by_1^2 = cx^n ;$$

hierauf wendet man wieder die der Substitution 3. entsprechende an u. s. f.; nach k Transformationen erhält man die Gleichung

wenn k ungerade ist: $\quad xy_1' - (a + kn)y_1 + cy_1^2 = bx^n ;$
wenn k gerade ist: $\quad xy_1' - (a + kn)y_1 + by_1^2 = cx^n .$

Kann man nun die ganze Zahl k so wählen, dass $n = 2(a + kn)$, ist also $(n - 2a) : 2n$ eine ganze Zahl, so kann das allgemeine Integral der Gleichung 1. nach den gegebenen Methoden gefunden werden.

Die andere Annahme $A = 0$ liefert die Substitution $y = x^n : y_1$ und die transformirte Gleichung

$$(n - a)\frac{x^n}{y_1} + b\frac{x^{2n}}{y_1} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2}y_1' = cx^n .$$

Multip ... so entsteht

6. $$\ldots (n - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n ,$$

also die Gleichung 1., wenn man a, b, c der Reihe nach durch $n - a$, c, b ersetzt. Durch wiederholte Anwendung der Substitution ergiebt sich schliesslich

wenn k ungerade ist: $\quad xy_1' - (kn - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n ;$
wenn k gerade ist: $\quad xy_1' - (kn - a)y_1 + by_1^2 = cx^n .$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 1. integrabel ist, wenn k so bestimmt werden kann, dass $2(kn - a) = n$, wenn also $(n + 2a) : 2n$ eine ganze Zahl ist.

Wir sehen somit: Das allgemeine Integral der Gleichung 1. kann gefunden werden, wenn $(n \pm 2a) : 2n$ eine positive ganze Zahl ist.

Die Riccati'sche Differentialgleichung

$$y' + by^2 = cx^m$$

kann auf die Form der Gleichung 1. gebracht werden; setzt man nämlich $y = z : x$, so erhält man aus 7.

$$xz' - z + bz^2 = cx^{m+2} .$$

Die Riccati'sche Gleichung ist somit integrabel, wenn entweder $(m + 4) : (2m + 4)$ oder $m : (2m + 4)$ eine positive ganze Zahl ist.

---

14. Die Integration der Differentialgleichung

1. $$Mdx + Ndy = 0 ,$$

gelingt sofort, wenn die linke Seite das vollständige Differential

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

einer Function $\varphi(x, y)$ ist, das allgemeine Integral ist alsdann

$$\varphi(x, y) = C .$$

Es fragt sich nun zunächst, wie man erkennt, ob ein Differentialausdruck $Mdx + Ndy$ ein vollständiges Differential ist, und wie man von dem vollständigen Differentiale die Function φ ableitet.

Ist $Mdx + Ndy$ das vollständige Differential von $\varphi(x, y)$, so ist

1. $$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} .$$

Hieraus folgt sofort die nothwendige Bedingung

2. $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn beide Seiten der Gleichung sind nach 1. gleich $\partial^2\varphi : \partial x \partial y$. Die Bedingung 2. ist aber auch hinreichend. Hat man nämlich eine Function ψ, welche der Gleichung genügt $M = \partial\psi : \partial x$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

also können N und $\partial\psi : \partial y$ nur um eine Grösse verschieden sein, die x nicht enthält, mithin eine bestimmte Function von y allein ist. Bezeichnet man dieselbe mit Y, und setzt

$$\varphi = \psi + \int Ydy ,$$

so ist $$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine Function ψ ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung $M = \partial\psi : \partial x$ zu

$$\psi = \int Mdx ,$$

wo bei der Integration das in M enthaltene y als constant zu betrachten ist; es genügt einen particularen Werth dieses Integrals zu nehmen.

Hiermit ist auch die zweite Frage, die [illegible] und damit die Integration der Differentialgleichung erle[illegible]

Beispiel. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy -$ [illegible] $= 0$.

Hier ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

also ist die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential. Weiter folgt

$$\psi = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 .$$

Der Vergleich von N und

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2x^2 - 4xy$$

liefert

$$Y = N - \frac{\partial \psi}{\partial y} = y^2 ;$$

daher ist

$$\varphi = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3 = C$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

15. **Jeder Differentialausdruck $Mdx + Ndy$ kann durch Multiplication mit einer geeigneten Function von x und y in ein vollständiges Differential verwandelt werden.**

Die Differentialgleichung

1. $$Mdx + Ndy = 0$$

habe das allgemeine Integral

$$f(x, y) = C .$$

Durch Differentiation folgt hieraus

2. $$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 .$$

Aus 1. und 2. folgen übereinstimmende Werthe von y', es ist daher identisch

$$M : N = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Folglich giebt es einen Faktor v, so dass

$$vM = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad vN = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und mithin

$$vMdx + vNdy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy .$$

Da die Auffindung des Faktors v sofort zur Kenntniss des allgemeinen Integrals der Gleichung 1. führt, so bezeichnet man v als einen **integrirenden Faktor der Differentialgleichung** $Mdx + Ndy = 0$.

16. Ein integrirender Faktor v der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ wird durch die Gleichung definirt

$$\frac{\partial (vM)}{\partial y} = \frac{\partial (vN)}{\partial x} .$$

Führt man die Differentiationen aus, so erhält man nach geeigneter Umstellung

1. $$N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Dies ist eine partiale Differentialgleichung; die Auflösung derselben ist im Allgemeinen ein höheres Problem, als das, eine Differentialgleichung I. O. zu integriren. Im Allgemeinen ist daher die Integration der Differentialgleichungen

I. O. durc[illegible] [illegible] Faktors nicht lösbar; vielmehr wird man umgeke[illegible] [illegible] aigleichung 1. für im Wesentlichen gelöst erachten, nachde[illegible] [illegible] Zusammenhang mit dem allgemeinen Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung I. O. erkannt hat, und hierauf werden wir bei Gelegenheit der partialen Differentialgleichungen zurückkommen.

Doch bleibt trotzdem das Studium der integrirenden Faktoren auch für die Integration von Differentialgleichungen I. O. von hoher Bedeutung; denn alle Integrationsmethoden lassen sich auf die eine Methode, einen integrirenden Faktor zu bestimmen, reduciren, — und indem man umgekehrt von bestimmten Formen integrirender Faktoren ausgeht, kann man Gruppen integrabler Differentialgleichungen aufstellen. Wir werden später hierzu Beispiele geben.

17. Dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung I. O. kann man unzählig viele verschiedene Formen geben. So hat z. B. $3x^2dx + 2ydy = 0$ das allgemeine Integral $x^3 + y^2 = C$; dasselbe kann aber auch durch

$$(x^3 + y^2)^n = C, \quad l(x^3 + y^2) = C, \quad sin(x^3 + y^2) = C \text{ u. s. w.}$$

ersetzt werden. Diesen verschiedenen Formen des Integrals entspringen verschiedene Formen des integrirenden Faktors; wir wollen nun nachweisen, wie man aus einem integrirenden Faktor die allgemeine Form finden kann, unter der jeder integrirende Faktor derselben Gleichung enthalten ist.

Ist v ein integrirender Faktor von

1. $$Mdx + Ndy = 0,$$

so ist

2. $$vMdx + vNdy = d\varphi,$$

und $\varphi = c$ ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Multipliciren wir 2. mit einer willkürlichen Function von φ, so erhalten wir

$$vF(\varphi)(Mdx + Ndy) = F(\varphi)d\varphi .$$

Hierin ist die rechte Seite das vollständige Differential von

$$\int F(\varphi)d\varphi ,$$

also ist auch die linke Seite ein vollständiges Differential, mithin ist $vF(\varphi)$ ein integrirender Faktor von 1. Wir haben daher: **Ist v ein integrirender Faktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, und $\varphi = c$ das allgemeine Integral, so ist das Product aus v und einer willkürlichen Function von φ ebenfalls ein integrirender Faktor.**

Es sei nun ausser v auch V ein integrirender Faktor; um nachzuweisen, dass $V = vF(\varphi)$, zeigen wir, dass der Quotient $V : v$ eine Function von φ ist. Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$R = \frac{\partial (V : v)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial (V : v)}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Differenzirt man rechts die Quotienten, so entsteht

$$v^2R = v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Nv, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Mv,$$

und daher

$$vR = v\left(N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Nach No. 16, 1 ist nun

$$N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y} = v \Big(\ldots$$

$$N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\ldots}{\partial x}\right)$$

daher ergiebt sic[h]

$$vR = 0, \quad \text{d. i. } R = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

18. Hat man zwei integrirende Faktoren v und V einer Differentialgleichung I. O. aufgefunden, so kann man das allgemeine Integral der Gleichung angeben, ohne eine Integration anzuführen. Denn ist $\varphi = c$ ein allgemeines Integral, so ist $V = vF(\varphi)$, mithin ist

$$\frac{V}{v} = F(\varphi) = c$$

ebenfalls ein allgemeines Integral; wenn man statt F irgend eine Function von F setzt, so kann man von dem so gefundenen allgemeinen Integrale unter Umständen zu einfacheren Formen für dasselbe übergehen.

19. Wir schlagen nun den in No. 16 angedeuteten Weg ein und construiren zu integrirenden Faktoren von gegebener Form die zugehörigen Differentialgleichungen.

Soll der integrirende Faktor v eine Function F einer gegebenen Function φ von x und y sein, so muss die Gleichung No. 14, 2 von $v = F(\varphi)$ erfüllt werden. Man erhält aus derselben

1. $$N\frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F(\varphi)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Folglich ist

2. $$\frac{dF}{F} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - M\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\,d\varphi.$$

Da nun links ein vollständiges Differential steht, so muss auch die rechte Seite ein solches sein; also muss

3. $$\psi = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - M\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

eine Function von φ sein. Um zu erfahren, ob dies der Fall ist, kann man aus der Gleichung $\varphi(x, y) = \varphi$ eine der Variabeln x oder y berechnen, in dem man das rechts stehende φ als neue Variable einführt; setzt man dann diesen Werth in ψ ein, so muss sich ψ als Function von φ allein ergeben. Dieser Weg ist dann empfehlenswerth, wenn x oder y aus der Gleichung $\varphi(x, y)$ sich leicht bestimmen lassen. In anderen Fällen hat man die Determinante zu bilden

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

wenn diese identisch verschwindet, so ist ψ eine Function von φ.

Umgekehrt: Ist ψ eine Function von φ und bestimmt man F durch die Gleichung 2., so wird die Gleichung 1. erfüllt, also ist $F(\varphi)$ ein integrirender Faktor der gegebenen Differentialgleichung. Wir schliessen daher: Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass ein integrirender Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ eine Function der gegebenen Function $\varphi(x, y)$ ist, besteht darin, dass ψ eine Function von φ ist.

20. Wir ... [be]sonders einfache Fälle ein. Setzen wir ... $= y$, so entseht

$$\psi = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}, \quad \text{bez.} \quad \psi_1 = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Soll also der integrirende Faktor eine Function von x allein bez. von y allein sein, so muss

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : M$$

eine Function von x, bez. von y sein.

A. Bedeutet X eine Function von x allein, so ist bei der Gleichung

$$(X + 3axy + by^2)\,dx + (ax^2 + bxy)\,dy = 0$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = \frac{ax + by}{x(ax + by)} = \frac{1}{x},$$

also ist der integrirende Faktor eine Function von x.

Durch Multiplication mit x erhält man

$$xXdx + d(ax^3y + \tfrac{1}{2}bx^2y^2) = 0.$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$ax^3y + \frac{b}{2}x^2y^2 + \int xXdx = C.$$

B. Bei der linearen Gleichung

$$y' + Py - Q = 0$$

ist $M = Py - Q$, $N = 1$, und daher

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = P,$$

folglich ist auch hier der integrirende Faktor eine Function von x allein. Zur Bestimmung des Faktor haben wir aus 2.

$$\frac{dF}{F} = Pdx,$$

also ist

$$F = e^{\int Pdx}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, bilden wir zunächst (No. 14.)

$$\int MFdx = \int (Py - Q)\,e^{\int Pdx}\,dx = y\,e^{\int Pdx} - \int Q e^{\int Pdx}\,dx.$$

Ferner ist

$$Y = NF - \frac{\partial}{\partial y}\int MFdx = 0.$$

Daher folgt für das allgemeine Integral

$$y e^{\int Pdx} - \int Q e^{\int Pdx}\,dx = c$$

in Uebereinstimmung mit No. 8.

21. Der integrirende Faktor ist eine Function des Produkts xy, wenn

$$\psi = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx}$$

eine Function von xy ist.

Beispiel. $\quad yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0.$

Hier ist $\quad M = yF(xy), \quad N = xG(xy)$, und somit

$$\psi = \frac{xy[F'(xy) - G'(xy)] + F(xy) - G(xy)}{xy[G(xy) - F(xy)]}.$$

Bezeichnet f den integrir[illegible] Fa[illegible]

$$\frac{df}{f} = -\frac{F'(xy) - G[illegible]}{F(xy) - G(xy)} \dots$$

also ist

$$f = 1 : xy[F(xy) - G(xy)].$$

Eine Gleichung von der Form

$$yF(xy)\,dx + xG(xy)\,dy = 0$$

wird daher durch den Faktor $1 : xy[F(xy) - G(xy)]$ integrabel.

22. Der integrirende Faktor ist eine homogene Function nullten Grades von x und y, d. i. eine Function von $y : x$, wenn

$$1. \qquad \psi = \frac{x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx + Ny}$$

eine Function von $y : x$ ist.

Soll der integrirende Faktor eine homogene Function $n$ten Grades sein, also von der Form $x^n F(y : x)$, so ergiebt die partiale Differentialgleichung No. 19, 1

$$nNx^{n-1}F - yx^{n-2}NF' - x^{n-1}MF' = x^n F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

$$2. \qquad \psi = \frac{F'}{F} = \frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + nNx}{xM + yN};$$

also muss die rechte Seite dieser Gleichung eine Function von $y : x$ sein.

Beispiel. Ist die gegebene Differentialgleichung homogen vom $n$ten Grade, so kann man sie durch Division mit x^n in die Form bringen

$$M\left(\frac{y}{x}\right)dx + N\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}M', \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}N',$$

und daher

$$\psi = \frac{xM' + yN'}{xM + yN} = \left(M' + \frac{y}{x}N'\right) : \left(M + \frac{y}{x}N\right).$$

Folglich hat eine homogene Differentialgleichung einen integrirenden Faktor, der homogen und nullten Grades ist.

Setzt man in 2. voraus, dass M und N Functionen von $y : x$ sind, so ergiebt sich ψ ebenfalls als Function von $y : x$, unabhängig von n; eine homogene Differentialgleichung lässt also homogene integrirende Faktoren jeden Grades zu.

Berechnet man die Function

$$\psi = \frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + nNx}{xM + yN}$$

für den Fall, dass der integrirende Faktor homogen vom Grade n sein soll, so enthält dieselbe die unbestimmte Zahl n; unter Umständen gelingt es, die Zahl n so zu wählen, dass ψ homogen wird. Dies ist z. B. der Fall bei der Gleichung

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0;$$

man findet leicht, dass sie einen homogenen integrirenden Faktor vom Grade (-2) zulässt.

23. Um die Gleichung zu integriren

$$1. \qquad [illegible](xd[illegible]) = 0,$$

worin Q, R und [illegible]ctionen sind, und zwar Q und R vom Grade m, S vom Grade n [illegible]e man einen homogenen integrirenden Faktor vom Grade $-n-2$ für die Gleichung $Qdx + Rdy = 0$. Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$Qdx + Rdy - Sx^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

so erkennt man sofort, dass dieser Faktor die linke Seite in die Summe zweier vollständigen Differentiale verwandelt.

In die Form 1. lässt sich die Gleichung

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$$

durch eine geschickte Substitution bringen.

Setzt man nämlich

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

so erhält man eine trausformirte Gleichung von der Form

$$(a\xi + a'\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) - (b\xi + b'\eta)\,d\eta + (c\xi + c'\eta)\,d\xi = 0,$$

wenn α und β die Bedingungen erfüllen

$$\alpha(A + A'\alpha + A''\beta) - (B + B'\alpha + B''\beta) = 0$$
$$-\beta(A + A'\alpha + A''\beta) + (C + C'\alpha + C''\beta) = 0.$$

Wir schreiben hierfür

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta}.$$

Setzen wir den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke $= \lambda$, so ergiebt sich

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0,$$
$$B + (B' - \lambda)\alpha + B''\beta = 0,$$
$$C + C'\alpha + (C'' - \lambda)\beta = 0.$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & A' & A'' \\ B & B' - \lambda & B'' \\ C & C' & C'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Hat man eine Wurzel λ dieser cubischen Gleichung gefunden, so ergeben sich α und β z. B. aus

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0 \quad \text{und} \quad B + (B' - \lambda)\alpha + B''\beta = 0.$$

---

24. Die bisher integrirten Differentialgleichungen I. O. sind vom ersten Grade, d. h. sie enthalten nur die erste Potenz von y'. Wir geben nun einige besondere Regeln, welche bei der Integration von Differentialgleichungen von höherem Grade zu beachten sind.

Zerfällt die Gleichung

$$F(x, y, y') = A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \ldots + A_{n-1}y' + A_n = 0,$$

in welcher $A_0, A_1, \ldots A_n$ eindeutige Functionen von x und y bezeichnen, in ein Produkt von Functionen minderen Grades von y', deren Coefficienten eindeutige Functionen von x und y sind, so zerfällt die Differentialgleichung in ebenso viele einzelne Gleichungen, die dadurch hervorgehen, dass man die einzelnen Faktoren gleich Null setzt.

Gelingt es, $F(x, y, y')$ in rücksichtlich y' lineare Faktoren zu zerlegen

$$F = A_0(y' - f_1)(y' - f_2)\ldots(y' - f_n) = 0,$$

und sind darin $f_1, f_2 \ldots$ [illegible] selben $k$deutigen Function f, so hat man die Gleichung zu integ[riren]

$$y' - f = 0;$$

hierdurch sind die ersten k Faktoren erledigt. Bilden $f_{k+1}, \ldots f_l$ ein System conjugirter Werthe einer mehrdeutigen Function g, so hat man ferner die Gleichung zu integriren

$$y' - g = 0,$$

u. s. w. Die vollständige Integration der Differentialgleichung besteht aus den allgemeinen und den singulären Integralen der Gleichungen

$$y' - f = 0, \quad y' - g = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

25. Statt dieses Weges, eine Differentialgleichung I. O. $n$ten Grades zu integriren, kann man auch zum Ziele gelangen, indem man die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ nach y auflöst; es ergebe sich

1. $$y = f(x, y').$$

Diese Gleichung differenziren wir und erhalten

2. $$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx}.$$

In dieser letzten Gleichung kommen nur die Grössen x, y', $dy' : dx$ vor, und zwar letztere im ersten Grade. Der Verein des allgemeinen Integrals der Gleichung 2.

$$\varphi(x, y') = C,$$

und der gegebenen Gleichung $y = f(x, y')$ ist das allgemeine Integral der letzteren. Wenn es möglich ist, so eliminirt man y' aus diesen beiden Gleichungen, und erhält dann das allgemeine Integral in der bisher üblichen Form $\psi(x, y, C) = 0$.

Man kann auch aus der gegebenen Gleichung die Variable x berechnen. Ergiebt sich

3. $$x = f(y, y'),$$

so erhält man durch Differentiation

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}.$$

Ersetzt man hier $dy' : dx$ gemäss der Identität

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'},$$

so erhält man

4. $$1 = \frac{\partial f}{\partial y} y' + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dy},$$

also eine Differentialgleichung für y, y' und $dy' : dy$. Das allgemeine Integral derselben sei

5. $$\varphi(y, y') = C.$$

Der Verein der Gleichungen

$$\varphi(y, y') = C \quad \text{und} \quad x = f(y, y')$$

ist dann die Auflösung der gegebenen Gleichung; durch Elimination von y' kann man dieselbe wieder in der üblichen Form darstellen.

26. Ist die Differentialgleichung linear in Bezug auf x und y, also von der Form

1. $$x\varphi(y') + y\psi(y') = \chi(y'),$$

so kann man mit gleicher Leichtigkeit auf x oder y reduciren; es ist bemerkenswerth, dass die Herstellung des allgemeinen Integrals durch Integration einer linearen Differentialgleichung erfolgt. Die Differentiation von 1. ergiebt nämlich

2. $$[\ldots] \varphi + y\psi' \frac{dy'}{dx} [\ldots] \chi' \frac{dy'}{dx},$$

Setzt man hier[in]

$$\frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy},$$

und ersetzt y' durch das einfachere Zeichen p, so erhält man

$$\varphi + p\varphi' \frac{dp}{dy} + p\psi + yp\psi' \frac{dp}{dy} = p\chi' \frac{dp}{dy}.$$

Hier wollen wir p als die unabhängige und y als die abhängige Variable betrachten; wir erhalten alsdann für y die Gleichung

3. $$\frac{dy}{dp} + \frac{p\psi'}{\varphi + p\psi} y = \frac{\chi' - \varphi'}{\varphi + p\psi} p;$$

diese Gleichung ist linear.

Man kann auch y aus 1. und 2. eliminiren; dadurch entsteht

$$\varphi + \varphi' \frac{dp}{dx} + p\psi + \frac{\chi - x\varphi}{\psi} \cdot \psi' \frac{dp}{dx} = \chi' \frac{dp}{dx}.$$

Wird p als unabhängige Variable betrachtet, so ergiebt sich für x die lineare Differentialgleichung

5. $$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi\psi'}{\psi(\varphi + p\psi)} x + \frac{\varphi'\psi + \chi - \chi'\psi}{\psi(\varphi + p\psi)} = 0.$$

Beispiel. Bei der Differentialgleichung

6. $$px + (a + \tfrac{1}{2}p) y = \frac{1}{4a} p^2$$

ist

$$\varphi = p, \quad \psi = (a + \tfrac{1}{2}p), \quad \chi = \frac{1}{4a} p^2;$$

$$\varphi' = 1, \quad \psi' = \tfrac{1}{2}, \quad \chi' = \frac{p}{2a}.$$

Daher erhält man für x die Gleichung

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{(2a + p)(2a + 2 + p)} x + \frac{a}{(2a + p)(2a + 2 + p)} = 0.$$

Nach den bekannten Regeln für eine lineare Gleichung ist das allgemeine Integral hiervon

7. $$x = \frac{p + 2a}{p + 2a + 2} \left(C + \frac{a}{p + 2a} \right);$$

aus dieser und aus der gegebenen Differentialgleichung hat man schliesslich noch p zu eliminiren; doch ist auch ohne Ausführung der Elimination das Problem durch die beiden Gleichungen 6. und 7. vollständig gelöst; durch diese Gleichungen sind die beiden Variabeln x und y durch dieselbe Hülfsvariable p ausgedrückt.

27. Die in No. 24, 25 und 26 mitgetheilten Methoden bestehen darin, dass man die gegebene Gleichung

1. $$F(x, y, y') = 0$$

differenzirt; aus der dadurch erhaltenen Gleichung

2. $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

und aus 1. eliminirt man y; oder man eliminirt x und ersetzt $dy' : dx$ durch $y' dy' : dy$.

Wenn es sich ereignet, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

identisch verschwindet, dass also

3. $\ldots = - \frac{\ldots}{\partial x} \cdot \ldots$

so zerfällt die Gleichung 2. in die beiden Gleichu...

4. $$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \text{und 5.} \qquad \frac{dy'}{dx} = 0,$$

Eliminirt man y' aus 1. und 4., so erhält man (§ 23, No. 8) die Verzweigungscurve der Differentialgleichung, und damit das singuläre Integral derselben. Das allgemeine Integral ergiebt sich, indem man aus dem allgemeinen Integrale von 5.

$$y' = C,$$

und aus 1. y' eliminirt; man erhält

$$F(x, y, C) = 0.$$

Beispiel. Die Curve zu bestimmen, von deren Tangenten die beiden Coordinatenachsen eine Strecke von constanter Länge a abschneiden.

Die Differentialgleichung des Problems ergiebt sich zu

6. $$(xy' - y)\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = a,$$

oder

$$xy' - y - \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \quad \text{also} \quad \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -y'.$$

Das allgemeine Integral ist

$$Cx - y - \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten $a : \sqrt{1 + C^2}$ und $-aC : \sqrt{1 + C^2}$; die zwischen den Achsen liegende Strecke derselben ist in der That $= a$. Für das singuläre Integral bilden wir

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x - \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}^3} = 0.$$

Hieraus folgt

$$y' = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies in 6. eingesetzt, ergiebt nach leichter Reduction die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0,$$

das singuläre Integral der Gleichung 6.

28. Das vorige Beispiel ist ein besonderer Fall der von Clairaut bearbeiteten und nach ihm benannten Gleichung

1. $$y - xy' = f(y').$$

Für das allgemeine Integral ergiebt sich der Verein der Gleichungen 1. und

2. $$y' = C,$$

also ist das allgemeine Integral

3. $$y = Cx + f(C).$$

Das singuläre Integral entsteht durch Elimination von y' aus 1. und

4. $$x + \frac{df(y')}{dy'} = 0,$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultate der Elimination von C aus 3. und aus der aus 3. durch Differentiation nach C hervorgehenden Gleichung.

29. Die ...

1. $$2xy' = y \ldots)$$

liefert mit y multi...

2. $$y^2 - 2yy' \cdot x = yy' \cdot f(yy').$$

Substituirt man $y^2 = z$, so ist $2yy' = z'$, und es ergiebt sich

$$z - xz' = \tfrac{1}{2} z' f(\tfrac{1}{2} z'),$$

also eine Clairaut'sche Gleichung. Das allgemeine Integral von 1. ist daher

3. $$y^2 = 2Cx + Cf(C),$$

das singuläre folgt durch Elimination von y' aus 1. und aus

4. $$1 + y'^2 \cdot \frac{df(yy')}{d(yy')} = 0,$$

wie man leicht erhält, wenn man die an die Stelle von No. 28, 4 hier tretende Gleichung durch 1. reducirt.

30. Die Aufgabe: Die Curve zu bestimmen, bei welcher die Normale eine gegebene Function f der von der Normalen auf der X-Achse abgeschnittenen Strecke ist, führt auf die Differentialgleichung

1. $$y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy').$$

Führt man statt y eine neue abhängige Variable r durch die Substitution ein

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so ist

$$rr' = x + yy',$$

$$y' = \frac{1}{y}(rr' - x), \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r^2r'^2 - 2xrr'}{r^2 - x^2}.$$

Daher ergiebt sich aus 1.

2. $$r^2 + r^2r'^2 - 2xrr' = [f(rr')]^2.$$

Hieraus folgt die neue Differentialgleichung

$$r - 2xr' = r' \cdot \frac{[f(rr')]^2 - r^2r'^2}{rr'};$$

diese ist von derselben Form, wie No. 29, 1.

31. Denkt man sich die Gleichung

1. $$\varphi(x, y, y') = 0$$

in Bezug auf y' aufgelöst, so erhält man ein Resultat von der Form

2. $$dy - y'dx = 0,$$

worin man y' aus 1. zu substituiren hat. Man kann nun versuchen, einen integrirenden Faktor F als Function von x, y, y' so zu bestimmen, dass

3. $$F \cdot (dy - y'dx) = 0$$

unter der Voraussetzung 1. ein vollständiges Differential wird. Das allgemeine Integral von 1. wird alsdann durch Elimination von y' aus 1. und aus

$$\int F \cdot (dy - y'dx) = C$$

erhalten, wenn man mit $\int F \cdot (dy - y'dx)$ eine Function bezeichnet, deren vollständiges Differential $F \cdot (dy - y'dx)$ ist.

Ist 3. ein vollständiges Differential, so sind die Bedingungen erfüllt

4. $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + F \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0.$$

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y}$$

sind aus 1. zu berechnen. Nun ist für jede Verschiebung des Punktes x, y entlang einer Integralcurve

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \ldots y' \ldots$$

Daher folgt aus 4.

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{dF}{dx}=-\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}.$$

Wenn sich die rechte Seite dieser Gleichung als ein Differentialquotient nach x darstellen lässt, so erhält man

$$F=e^{\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)dx}.$$

32. Giebt man dem integrirenden Faktor die Gestalt $G:y'$, so ist das Kriterium dafür, dass

1. $$\frac{G}{y'}(dy-y'\,dx)$$

ein vollständiges Differential ist,

2. $$\frac{1}{y'}\left(\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}\right)+G\frac{\partial\frac{1}{y'}}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}=0.$$

Da nun für jede unendlich kleine Verschiebung des Punktes x, y auf einer Integralcurve

$$\frac{dG}{dy}=\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{\partial G}{\partial y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}\right),$$

so folgt aus 2.

3. $$\frac{1}{G}\cdot\frac{dG}{dy}=-\frac{\partial\frac{1}{y'}}{\partial x}=\frac{1}{y'^2}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}=-\frac{1}{y'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right).$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung ein Differentialquotient nach y, so kann man integriren und erhält

$$G=e^{-\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\frac{dy}{y'^2}}.\text{*)}$$

33. Wir geben hierzu zwei Beispiele.

Die Curve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Tangente gefällte Loth eine gegebene Function der Normalen ist.

Die Differentialgleichung der Curve ist

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}=f(y\sqrt{1+y'^2}).$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $y\sqrt{1+y'^2}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

1. $$\varphi\equiv\psi(y\sqrt{1+y'^2})-y(xy'-y)=0.$$

Durch partiale Differentiation folgt hieraus

2. $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-yy'.$$

3. $$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=\psi'\cdot\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}-xy.$$

Durch vollständige Differentiation folgt aus 1.

$$\psi'\left(\sqrt{1+y'^2}\cdot y'+\frac{yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=xy'^2+xyy''-yy',$$

---

*) Malmsten, Mémoire sur l'integration des équations differentielles, Liouville, Journal de Mathematiques pures et appliquées. 2. Série, t. VII. pag. 315—333, 1862.

Breslau. Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).