5 23

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 22. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK.

NEUNTE LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der zweiundzwanzigsten Lieferung:

Fortsetzung des Handbuchs der Mathematik. Differentialrechnung (Fortsetzung) von Professor Dr. Heger. (Seite 417—560.)

Aus der Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2a^2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}x - \frac{\partial F}{\partial x}y = 2(a^2 - b^2)xy.$$

Daher ist $u = \dfrac{a^2}{c^2x}, \quad v = -\dfrac{b^2}{c^2y}.$

Hieraus folgt $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{c^2u}, \quad \dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{c^2v}.$

Quadrirt man diese Werthe und addirt, so erhält man schliesslich die Evolutengleichung in der Form

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4.$$

Beseitigt man die Nenner, so erkennt man, dass sie vom vierten Grade ist, in Uebereinstimmung mit No. 10.

Für die Cycloide haben wir die Formeln im vorigen Abschnitte so umzugestalten, dass sie dem Falle entsprechen, wenn x und y als Functionen einer Variabeln t gegeben sind. Nehmen wir die Normalengleichung zunächst in der Form No. 2, 4 und ersetzen y' durch $\dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt}$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) = 0.$$

Es ist daher

$$u = \frac{dx}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y\right), \quad v = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y\right),$$

und man erhält somit u und v durch t ausgedrückt. Die Evolutengleichung ist die Resultante dieser Gleichungen in Bezug auf t.

Aus den Formeln in No. 6 ergiebt sich für die Cycloide

$$\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y = xy + aty - xy = aty,$$

und daher

1. $$u = \frac{1}{at}, \quad v = \frac{\sin t}{at(1 - \cos t)} = \frac{1}{at \operatorname{tang} \frac{1}{2}t}.$$

Die Gleichung der Evolute folgt hieraus zu

2. $$u - v \operatorname{tang} \frac{1}{2au} = 0, \quad \text{oder} \quad 2au \cdot \operatorname{arc\,tang} \frac{u}{v} = 1.$$

Aus der Gleichung der Cycloidentangente

$$\frac{dy}{dt}(\xi - x) - \frac{dx}{dt}(\eta - y) = 0$$

folgen die Coordinaten der Tangente

$$u = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right), \quad v = -\frac{dx}{dt} : \left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right).$$

Da nun

$$\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y = a^2(t \sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t),$$
$$= a^2(t \sin t - 2 + 2\cos t),$$

so ergiebt sich

$$u = \frac{\sin t}{aM}, \quad v = \frac{\cos t - 1}{aM}, \quad M = t \sin t - 2 + 2\cos t.$$

Verschiebt man die Coordinatenachsen und wählt den Scheitel A zum neuen Nullpunkte, so erhält man die Coordinaten U und V der Tangente im neuen Systeme aus u und v durch die Formeln (Anal. Geom. der Ebene § 9, No. 6, 3)

$$U = \frac{u}{1 - \alpha u - \beta v}, \qquad V = \frac{v}{1 - \alpha u - \beta v},$$

wobei α und β die Coordinaten des neuen Nullpunkts sind, also

$$\alpha = a\pi, \qquad \beta = 2a.$$

Da nun

$$1 - a\pi u - 2av = [M - \pi\, sin t - 2(cos t - 1)] = (t - \pi) sin t : M,$$

so erhält man

$$U = \frac{1}{a(t-\pi)}, \qquad V = \frac{cos\, t - 1}{a(t-\pi) sin\, t} = -\frac{tang \frac{1}{2} t}{a(t-\pi)}.$$

Setzt man $t - \pi = T$, so ist $tang \frac{1}{2} t = - cot \frac{1}{2} T$, und man erhält

$$U = \frac{1}{aT}, \qquad V = \frac{1}{a T\, tang \frac{1}{2} T}.$$

Vergleicht man diese Formeln mit 1., so erkennt man, dass die Evolute der Cycloide mit der Cycloide congruent ist und nur gegen dieselbe parallel verschoben erscheint, und zwar um $-a\pi$ in der Richtung der Abscissenachse und um $-2a$ in der Richtung der Ordinatenachse.

12. Fusspunktcurven. Unter der Fusspunktcurve einer gegebenen Curve in Bezug auf einen gegebenen Punkt (Pol) versteht man den Ort der Normalprojectionen des Pols auf die Tangenten der gegebenen Curve. Wir legen die Coordinatenachsen durch den Pol, und es sei

$$f(u, v) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Liniencoordinaten. Der Normalabstand ρ der Geraden u, v vom Nullpunkte ist bekanntlich

$$\rho = 1 : \sqrt{u^2 + v^2};$$

für den Winkel, den ρ mit der X-Achse einschliesst, hat man

$$cos\, \varphi = u\rho, \qquad sin\, \varphi = v\rho.$$

Der Endpunkt von ρ ist ein Punkt der Fusspunktcurve; seine Coordinaten sind

$$\xi = \rho\, cos\, \varphi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad \eta = \rho\, sin\, \varphi = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Hieraus folgt umgekehrt

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad v = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $f(u, v) = 0$ ein, so erhält man die Bedingung, die ein Punkt Π erfüllen muss, wenn durch Π eine Tangente der Curve normal zu $O\Pi$ gezogen werden kann, d. i. die verlangte Gleichung der Fusspunktcurve; wir haben somit für dieselbe

1. $$f\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}\right) = 0.$$

So ist z. B. die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die Hauptachsen,

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Daher hat der Ort der Normalprojectionen des Ellipsencentrums auf die Ellipsentangenten die Gleichung

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - (\xi^2 + \eta^2)^2 = 0.$$

Einen Punkt der gegebenen Curve und den auf der Tangente in P gelegenen Punkt der Fusspunktcurve wollen wir als verbundene Punkte beider Curven bezeichnen. Die Tangente der Fusspunktcurve in einem Punkte Π derselben lässt sich von dem verbundenen Punkte P der gegebenen Curve aus in einfacher Weise construiren. Ist nämlich $y = F(x)$ die Gleichung der gegebenen

Curve in Punktcoordinaten, so genügen die Coordinaten der verbundenen Punkte P und Π der Tangentengleichung

2. $$y'(\xi - x) - (\eta - y) = 0$$

sowie der Gleichung der durch O gehenden Normalen zur Tangente

3. $$\xi + y'\eta = 0.$$

Eliminirt man y' aus 2. und 3., so erhält man

$$\xi(\xi - x) + \eta(\eta - y) = 0, \quad \text{oder}$$

4. $$\xi^2 + \eta^2 = \xi x + \eta y.$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = \xi dx + x d\xi + \eta dy + y d\eta.$$

Da nun aus 3. folgt $\xi dx + \eta dy = 0$, so giebt die vorige Gleichung

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = x d\xi + y d\eta.$$

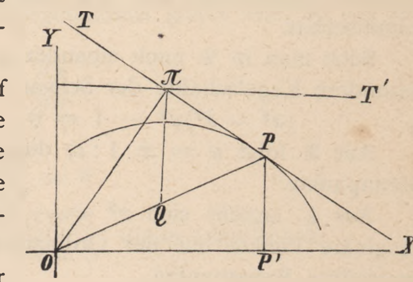
Hieraus folgt

5. $$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - \frac{x}{2}}{\eta - \frac{y}{2}}.$$

Ist Q die Mitte von OP, so ist

$$tang(\Pi Q, x) = \left(\eta - \frac{y}{2}\right) : \left(\xi - \frac{x}{2}\right).$$

Vergleicht man dies mit 5., so erkennt man, dass die Tangente T' der Fusspunktcurve normal zu ΠQ ist.



(M.479.)

13. Parallelcurven. Trägt man auf den Normalen einer Curve von der Curve aus nach derselben Seite hin eine gegebene Strecke ab, so bilden die Endpunkte eine neue Curve, die als Parallelcurve der gegebenen Curve bezeichnet wird.

Der Winkel λ, den die Normale der Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte x, y mit der Abscissenachse bildet, ergiebt sich aus

1. $$cos\, \lambda = -\frac{dy}{ds} = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad sin\, \lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Hierbei ist in beiden Formeln derselbe Werth der Wurzel zu nehmen.

Die Coordinaten ξ, η des Punktes Π, den man erhält, wenn man von der Normalen die Strecke l abschneidet, sind daher

2. $$\xi = x - l \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \eta = y + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Gleichung der Parallelcurve ergiebt sich, indem man aus den Gleichungen 2. und der Gleichung $F(x, y) = 0$ die Coordinaten x, y eliminirt. Um die Tangente der Parallelcurve im Punkte Π zu erhalten, schreiben wir die Gleichungen 2.

$$\xi = x + l\, cos\, \lambda, \qquad \eta = y + l\, sin\, \lambda$$

und differenziren; wir erhalten

$$d\xi = dx - l\, sin\, \lambda d\lambda, \qquad d\eta = dy + l\, cos\, \lambda d\lambda.$$

Hieraus folgt weiter

$$cos\, \lambda d\xi + sin\, \lambda d\eta = cos\, \lambda dx + sin\, \lambda dy.$$

Aus 1. ergiebt sich $cos\, \lambda dx + sin\, \lambda dy = 0$; daher ist

$$cos\, \lambda d\xi + sin\, \lambda d\eta = 0,$$

folglich
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}.$$

Die Tangente der Parallelcurve im Punkte Π ist parallel der Tangente der gegebenen Curve im entsprechenden Punkte P.

Man kann daher die Parallelcurve einer gegebenen Curve auch als die Curve definiren, die von den Geraden umhüllt wird, welche den Tangenten der gegebenen Curve parallel sind und von ihnen einen gegebenen Abstand (l) haben.

14. Confocale Kegelschnitte. Alle Kegelschnitte, deren Gleichungen aus

1. $$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} - 1 = 0, \quad a^2 > b^2$$

hervorgehen, wenn man μ alle realen Werthe ertheilt, haben dieselben Brennpunkte; denn es ist
$$a^2 + \mu - (b^2 + \mu) = a^2 - b^2.$$

Man bezeichnet sie daher als confocale Kegelschnitte.

Die Gleichung des Kegelschnitts 1. in Liniencoordinaten ist

2. $$(a^2 + \mu)u^2 + (b^2 + \mu)v^2 - 1 = 0, \quad \text{oder}$$
$$a^2u^2 + b^2u^2 - 1 + \mu(u^2 + v^2) = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung ist linear aus den quadratischen Functionen $a^2u^2 + b^2u^2 - 1$ und $u^2 + v^2$ zusammengesetzt; die Gesammtheit aller confocalen Kegelschnitte mit gegebenen Brennpunkten bilden daher eine Kegelschnittschaar.

Setzt man in 2. nach einander $\mu = -b^2$, $\mu = -a^2$, so erhält man zwei besondere Kegelschnitte der Schaar

3. $(a^2 - b^2)u^2 - 1 = 0$, 4. $(b^2 - a^2)v^2 - 1 = 0$.

Aus 3. folgt $u = \pm 1 : c$; dieser Kegelschnitt zerfällt daher in die beiden Brennpunkte.

Aus 4. ergiebt sich $v^2 = -1 : c^2$. Dieser Gleichung entsprechen zwei imaginäre Punkte auf der Ordinatenachse; man bezeichnet dieselben als die imaginären Brennpunkte.

Die Kegelschnitte der Schaar, welche durch einen gegebenen Punkt Π der Ebene gehen, erhält man, indem man μ aus der Gleichung bestimmt

5. $$\frac{\xi^2}{a^2+\mu} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu} - 1 = 0.$$

Beseitigt man die Nenner, so folgt
$$\xi^2(b^2 + \mu) + \eta^2(a^2 + \mu) - (a^2 + \mu)(b^2 + \mu) = 0.$$

Ersetzt man in dieser quadratischen Gleichung μ der Reihe nach durch $-a^2$, $-b^2$, $+\infty$, so erhält die linke Seite die Werthe
$$\xi^2(b^2 - a^2), \quad \eta^2(a^2 - b^2), \quad -\infty.$$

Der erste Werth ist negativ, der zweite positiv, und man sieht daher, dass die Gleichung 6. immer zwei reale Wurzeln hat, deren eine μ_1 zwischen $-a^2$ und $-b^2$ liegt, während die andere μ_0 grösser als $-b^2$ ist. Für μ_0 wird der Kegelschnitt 1. eine Ellipse, für μ_1 eine Hyperbel. Durch jeden Punkt der Ebene gehen daher zwei Kegelschnitte einer confocalen Schaar; der eine ist eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

Aus den beiden Gleichungen
$$\frac{\xi^2}{a^2+\mu_0} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu_0} - 1 = 0, \quad \frac{\xi^2}{a^2+\mu_1} + \frac{\eta^2}{b^2+\mu_1} - 1 = 0$$
folgt durch Subtraction und nachherige Division durch den von Null verschiedenen Faktor $\mu_0 - \mu_1$ die Gleichung

6. $$\frac{\xi^2}{(a^2+\mu_0)(a^2+\mu_1)} + \frac{\eta^2}{(b^2+\mu_0)(b^2+\mu_1)} = 0.$$

Bilden die durch Π gelegten Tangenten der beiden durch Π gehenden Kegelschnitte der Schaar mit der Abscissenachse die Winkel φ_0 und φ_1, so ist
$$tang\,\varphi_0 = -\frac{\xi(b^2+\mu_0)}{\eta(a^2+\mu_0)}, \quad tang\,\varphi_1 = -\frac{\xi(b^2+\mu_1)}{\eta(a^2+\mu_1)}.$$

Daher hat man
$$tang\,\varphi_0\, tang\,\varphi_1 = \frac{\xi^2(b^2+\mu_0)(b^2+\mu_0)}{\eta^2(a^2+\mu_0)(a^2+\mu_1)},$$
also mit Rücksicht auf 6.

7. $$tang\,\varphi_0\, tang\,\varphi_1 = -1.$$

Dies ergiebt: Je zwei Kegelschnitte einer confocalen Schaar schneiden sich unter rechten Winkeln, wenn man unter dem Winkel, unter dem sich zwei Curven schneiden, den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkte versteht. Zugleich sieht man, dass immer nur zwei ungleichartige Curven der Schaar sich in realen Punkten schneiden, nicht aber zwei confocale Ellipsen oder zwei confocale Hyperbeln.

15. Wir fragen nach den Curven $\eta = \varphi(x)$, die für dieselbe Abscisse x gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subnormale oder Subtangente haben, wie eine gegebene Curve $y = f(x)$.

Sollen die Subnormalen gleich oder entgegengesetzt gleich sein, so hat man die Beziehung

1. $$\eta\frac{d\eta}{dx} = \pm y\frac{dy}{dx},$$

aus welcher folgt

2. $$2\eta\frac{d\eta}{dx} \mp 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun ist $2\eta\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{d(\eta^2)}{dx}$, $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(y^2)}{dx}$; daher folgt aus 2.

3. $$\frac{d(\eta^2 \mp y^2)}{dx} = 0.$$

Hieraus schliesst man, dass $\eta^2 \mp y^2$ von x unabhängig, also gleich einer Constanten A ist. Man erhält daher die Gleichung der gesuchten Curve in der Form

4. $$\eta^2 = f(x)^2 + A, \quad \text{bez.} \quad \eta^2 = -f(x)^2 + A.$$

Da A in beiden Fällen unbestimmt bleibt, so giebt es für beide Aufgaben unendlich viele Lösungen.

Die Forderung, dass die Curve $\eta = \varphi(x)$ für alle Punkte gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subtangenten haben soll, wie die gegebene, führt auf die Beziehung
$$\frac{1}{\eta}\cdot\frac{d\eta}{dx} = \pm\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus schliesst man
$$\frac{dl\eta}{dx} \mp \frac{dly}{dx} = \frac{d(l\eta \mp ly)}{dx} = 0;$$
daher ist $l\eta \mp ly$ von x unabhängig; bezeichnet man diesen Werth mit lA, so erhält man
$$l\eta \mp ly = lA.$$

Hieraus folgen, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, die beiden Gleichungen

5. $$\eta = A f(x)\,, \quad \text{bez.} \quad \eta = \frac{A}{f(x)}.$$

Hat man Tangente und Normale eines Punktes der Curve $y = f(x)$, so erhält man ohne Weiteres auch die Tangente und Normale des zu derselben Abscisse gehörenden Punkts einer der abgeleiteten Curven 4., 5.

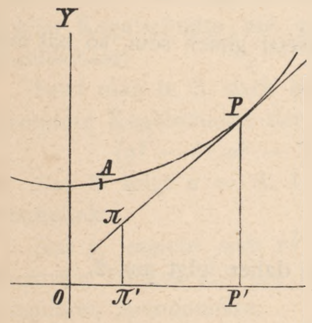
Ist z. B. $f = bx : a$, also die gegebene Curve eine durch den Nullpunkt gehende Gerade, so sind

$$\eta^2 = \left(\frac{b}{a}x\right)^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \eta^2 = -\left(\frac{b}{a}x\right)^2 + b^2$$

die Gleichungen einer Hyperbel und einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Die Subnormale eines Hyperbelpunktes ist gleich der Subnormale des zugehörigen Asymptotenpunktes, und die Subnormale eines Ellipsenpunktes ist entgegengesetzt gleich der Subnormale des zugehörigen Punkts der Geraden $y = bx : a$.*)

16. Unter der **Evolvente einer gegebenen Curve** versteht man die Curve, die von einem Punkte einer Tangente der gegebenen Curve beschrieben wird, wenn diese Tangente sich entlang der Curve fortbewegt, ohne zu gleiten. Bei einer bestimmten Lage der beweglichen Tangente fällt der die Evolvente beschreibende Punkt mit einem Punkte der gegebenen Curve zusammen; dieser Punkt sei A. Berührt die Tangente in P und ist Π der Punkt, welcher die Evolvente beschreibt, so ist nach der Definition ΠP gleich dem Curvenbogen AP. Bezeichnet man diesen Bogen mit s und den Winkel (T, x) wieder mit τ, so sind die Coordinaten von Π



(M. 480.)

$$\xi = x - s\cos\tau\,, \qquad \eta = y - s\sin\tau\,.$$

Durch Differentiation ergiebt sich hieraus

$$d\xi = dx - \cos\tau \cdot ds + s \cdot \sin\tau \cdot d\tau\,,$$
$$d\eta = dy - \sin\tau \cdot ds - s \cdot \cos\tau \cdot d\tau\,.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos\tau \cdot d\xi + \sin\tau \cdot d\eta = \cos\tau\, dx + \sin\tau \cdot dy - ds\,.$$

Da nun $dx = ds\cos\tau$, $dy = ds \cdot \sin\tau$, so folgt

$$\cos\tau \cdot d\xi + \sin\tau\, d\eta = 0\,, \quad \text{also}$$
$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\cot\tau\,.$$

Die Tangente der Evolvente in Π ist daher normal zu T, die Normale der Evolvente fällt mit T zusammen.

Hiernach ist die gegebene Curve die Evolute ihrer Evolvente. Zu einer gegebenen Curve gehören unzählige Evolventen, die den unendlich vielen verschiedenen Lagen des Punktes Π auf der beweglichen Tangente entsprechen; alle diese Evolventen sind Parallelcurven.

---

17. **Formeln für Polarcoordinaten.** Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten

$$f(r, \varphi) = 0\,,$$

so hat man für das Differentialverhältniss $dr : d\varphi$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Die Polarcoordinaten eines Punktes P und die rechtwinkeligen in Bezug auf ein System, welches mit dem polaren den Nullpunkt gemein hat, und dessen

*) Hermite, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Paris 1873. I. Th. pag. 169.

Abscissenachse die Nulllinie des polaren ist, hängen bekanntlich durch die Formeln zusammen

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

Nach der Regel für das Differential eines Produkts findet man hieraus

1. $$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi\,, \qquad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi\,,$$

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{r'\operatorname{tang}\varphi + r}{r' - r\operatorname{tang}\varphi}\,,$$

wobei r' für den Differentialquotienten $dr : d\varphi$ gesetzt worden ist. Ersetzt man $dy : dx$ durch $\operatorname{tang}\tau$, so erhält man aus 2.

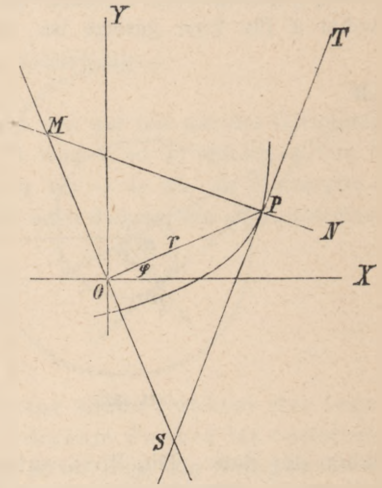
3. $$r' = \frac{r(1 + \operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\varphi)}{\operatorname{tang}\tau - \operatorname{tang}\varphi} = \frac{r}{\operatorname{tang}(\tau - \varphi)}\,.$$

Bezeichnet man mit σ den Winkel (r, T), so ist $\sigma = \tau - \varphi$, und man erhält daher

4. $$\operatorname{tang}\sigma = \frac{r}{r'}\,.$$

Durchschneidet man die Tangente T und die Normale N der Curve mit einer Geraden, die durch den Nullpunkt normal zu r gelegt ist, so erhält man zwei Abschnitte MO und OS, welche die Namen **Polarsubnormale** und **Polarsubtangente** führen. Man hat $MO = OP\cot\sigma$, $OS = OP\operatorname{tang}\sigma$ und daher

5. $$\textit{Polarsubnorm.} = r', \quad \textit{Polarsubtang.} = \frac{r^2}{r'}\,.$$



(M. 481.)

Für das **Bogendifferential** gewinnt man aus 1. durch Quadriren und Addiren

6. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi\,.$$

18. Wir wenden diese Formeln zunächst auf die **Kegelschnitte** an. Nimmt man einen Brennpunkt F zum Pol und die grosse Achse als Nulllinie, und rechnet sie noch dem nächsten Scheitel positiv, so ist die Polargleichung für alle drei Arten von Kegelschnitten

1. $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r' = \frac{p\,\varepsilon\sin\varphi}{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{r^2\varepsilon\sin\varphi}{p}\,.$$

Daher ist die

$$\textit{Polarsubtangente} = \frac{r^2}{r'} = \frac{p}{\varepsilon\sin\varphi}\,.$$

Dies ergiebt

$$\sin\varphi \cdot \textit{Polarsubtangente} = \frac{p}{\varepsilon}\,.$$

Die linke Seite ist offenbar die Projection der Polarsubtangente auf die Hauptachse; die rechte Seite ist der Abstand des Brennpunktes von der zunächst gelegenen Directrix. Wir haben daher den Satz: **Nimmt man einen Brennpunkt zum Pol, so reicht für alle Punkte des Kegelschnitts die Polarsubtangente bis zu der dem Pole zunächst liegenden Directrix.** Dieser Satz lehrt eine sehr einfache Tangentenconstruction. Man kann aus ihm ersehen, dass die Tangenten in den Endpunkten der Brennpunktscoordinate sich mit einer Directrix auf der Hauptachse schneiden.

19. Die Archimedische Spirale ist die Curve, welche die Gleichung hat

$$r = a\varphi .$$

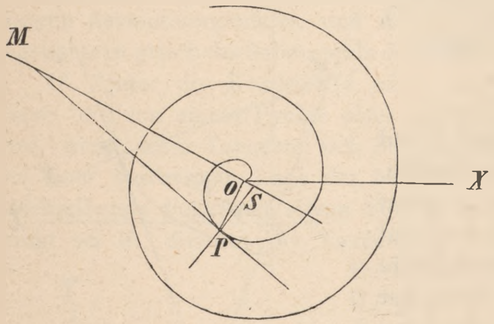
Zu einer Amplitude φ_0 gehört der Radius $r_0 = a\varphi_0$. Wächst die Amplitude um 2π, so kommt der Radius wieder auf r_0 zu liegen, hat aber die Länge

$$r_1 = a(\varphi_0 + 2\pi) = r_0 + 2\pi a .$$

Lässt man φ wiederholt um 2π wachsen, so erkennt man, dass auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden unzählig viele Spiralenpunkte liegen, denen die Radien zugehören

$$\ldots r_0 - 4d,\; r_0 - 3d,\; r_0 - 2d,\; r_0 - d,\; r_0,\; r_0 + d,\; r_0 + 2d,\; r_0 + 3d,\; r_0 + 4d, \ldots,$$

wobei d für $2a\pi$ gesetzt ist; diese Strecke wird als Windungsbreite der Spirale bezeichnet. In Fig. 13 ist der Theil einer Archimedischen Spirale aufgezeichnet, der den Amplituden $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{9}{2}\pi$ entspricht, also $2\frac{1}{4}$ Windungen enthält. Die Windungen, welche zu $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\frac{9}{2}\pi$ gehören, bilden eine Figur, die mit der gegebenen gegen eine durch O gehende Normale zur Nulllinie symmetrisch liegt.



(M. 482.)

Aus der Gleichung der Spirale folgt

$$r' = a,$$

daher der Satz: Die Polarsubnormale der Archimedischen Spirale ist constant. Hieraus folgt, wie man die Normale und Tangente in jedem Punkte der Spirale in sehr einfacher Weise construirt.

20. Die hyperbolische Spirale hat die Gleichung

1. $$r = \frac{a}{\varphi} .$$

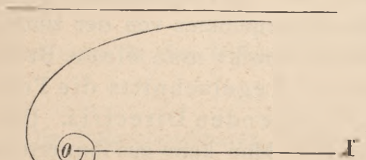
Dem Werthe $\varphi = 0$ gehört der Radius $r = \pm\infty$ zu. Die Ordinate eines Spiralenpunktes ist $y = r\sin\varphi$, also zufolge 1.

$$y = a\frac{\sin\varphi}{\varphi} .$$

Verschwindet φ, so erhält man

$$\lim y = a \lim \frac{\sin\varphi}{\varphi} = a .$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die beiden nach entgegengesetzten Seiten der Nulllinie sich erstreckenden unendlichen Aeste der Spirale eine gemeinschaftliche Asymptote haben, die parallel zur Nulllinie und von ihr um die Strecke a entfernt ist. Wächst φ von 0 bis $+\infty$, so erhält, wenn a positiv vorausgesetzt wird, r positive Werthe, die stetig abnehmen und gegen die Grenze Null convergiren; die Spirale nähert sich also in unendlich vielen Windungen dem Nullpunkte; man bezeichnet aus diesem Grunde den Nullpunkt als den asymptotischen Punkt der Spirale. Die beiden Theile der Spirale, welche positiven und negativen Werthen von φ zugehören, sind congruent und liegen, wie bei der Archimedischen Spirale, symmetrisch gegen die durch



(M. 483.)

O gehende Normale zur Nulllinie. In Figur 14 ist der Theil einer hyperbolischen Spirale aufgezeichnet, der den Amplitudengrenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 4\pi$ entspricht, also zwei volle Windungen. Aus der Gleichung der Spirale folgt

$$r' = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{r^2}{a} .$$

Folglich ist die *Polarsubtangente* $= \frac{r^2}{r'} = -a$.

Die Polarsubtangente der hyperbolischen Spirale ist also constant. Dies ergiebt die Construction der Tangente und Normale in einem gegebenen Punkte der Curve.

21. Die logarithmische Spirale hat die Gleichung

1. $$r = e^{\alpha\varphi} .$$

Wir setzen α positiv voraus und beschränken uns auf die aus der Gleichung folgenden positiven Werthe von r. Für $\varphi = 0$ wird $r = 1$; wächst φ von 0 bis $+\infty$, so wächst auch r bis $+\infty$; nimmt φ bis $-\infty$ ab, so convergirt r gegen den Grenzwerth Null; der Nullpunkt ist also auch diesmal ein asymptotischer Punkt der Spirale. Die Gleichung 1. ergiebt

$$r' = \alpha e^{\alpha\varphi} = \alpha r,$$

daher ist

$$tang\,\sigma = \frac{r}{r'} = \frac{1}{\alpha} .$$

Der Winkel zwischen dem Radius vector eines Punktes der logarithmischen Spirale und der Tangente in diesem Punkte ist constant.

22. Wenn bei zwei Curven $r = f(\varphi)$ und $R = F(\varphi)$ die Tangenten in den Punkten, welche zu derselben Amplitude φ gehören, denselben Winkel mit dem Radius vector bilden, so hat man die Gleichung

1. $$\frac{R'}{R} = \frac{r'}{r},$$

für welche man setzen kann

$$\frac{dlR}{d\varphi} = \frac{dlr}{d\varphi} .$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{d(lR - lr)}{d\varphi} = 0, \quad \text{und daher}$$

2. $$lR - lr = lA, \quad \text{oder einfacher}$$

3. $$R = Ar,$$

wobei A eine Constante bedeutet. Zwei solche Curven, die zu gleicher Amplitude Radien von constantem Verhältniss haben, sind ähnliche Curven, und der Nullpunkt ist ihr Aehnlichkeitspunkt.

Verlangt man für gleiche φ entgegengesetzt gleiche Werthe von σ, so ändert die linke Seite in 1. ihr Zeichen. Man erhält in Folge dessen statt 2. die Gleichung

$$lR + lr = lA,$$

und daher den Zusammenhang

4. $$Rr = A .$$

Curven, die dieser Bedingung genügen, werden als reciproke Curven bezeichnet.

Verlangt man für denselben Werth von φ gleiche Polarsubtangenten, so hat man der Gleichung zu genügen

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi},$$

aus welcher man schliesst

$$\frac{d(R-r)}{d\varphi} = 0, \quad \text{folglich}$$

$$R = r + A.$$

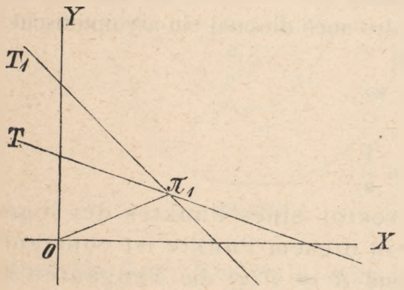
Eine Curve, die aus einer gegebenen dadurch hervorgeht, dass man alle Radien um gleiche Strecken (A) verlängert oder verkürzt, heisst eine Conchoide der gegebenen Curve. Ist C_1 eine Conchoide von C, so ist auch C eine Conchoide von C_1.

---

23. Die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten sei

$$f(u, v) = 0,$$

und es sei die Gerade T mit den Coordinaten u, v eine Tangente der Curve.



(M. 484.)

Aendern sich u um Δu und v um Δv gemäss der Gleichung

$$f(u + \Delta u,\ v + \Delta v) = 0,$$

so wird die Curve auch von der Geraden T_1 berührt, deren Coordinaten $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ sind. Die Coordinaten des Schnittpunkts Π_1 der beiden Geraden T und T_1 folgen aus den beiden Gleichungen

$$\xi_1 u + \eta_1 v - 1 = 0,$$
$$\xi_1 (u + \Delta u) + \eta_1 (v + \Delta v) - 1 = 0.$$

Durch Subtraction erhält man hieraus

$$\xi_1 \Delta u + \eta_1 \Delta v = 0, \quad \frac{\eta_1}{\xi_1} = -\frac{\Delta u}{\Delta v}.$$

Nimmt nun Δu und damit im Allgemeinen auch Δv bis zur Grenze Null ab, so nähert sich der Schnittpunkt Π_1 und mit ihm die Gerade $O\Pi_1$ einer bestimmten Grenzlage; diese Grenzlage Π des Punktes Π_1 ist der Berührungspunkt der Geraden T und der Curve $f(u, v) = 0$. Werden die Arcus des Winkels $O\Pi$, x mit ρ und die Coordinaten von Π mit ξ, η bezeichnet, so ist

$$tang\,\rho = \frac{\eta}{\xi} = -\lim \frac{\Delta u}{\Delta v}, \quad \text{und daher}$$

1. $$tang\,\rho = -\frac{du}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Hieraus folgen weiter die Formeln

2. $$\xi = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad \eta = -\frac{du}{u\,dv - v\,du},$$

oder $$\xi = \frac{\partial f}{\partial u} : \left(\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v\right), \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial u} : \left(\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v\right),$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich die Gleichung des auf der Tangente T gelegenen Berührungspunktes Π, wenn mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ hierbei die laufenden Coordinaten bezeichnet werden,

$$\frac{dv}{u\,dv - v\,du} \cdot \mathfrak{u} - \frac{du}{u\,dv - v\,du} \cdot \mathfrak{v} - 1 = 0,$$

oder, wenn man die Nenner beseitigt und besser ordnet,

3. $$\frac{dv}{du}(\mathfrak{u} - u) - (\mathfrak{v} - v) = 0, \quad \text{bez.}$$

4. $$\Pi \equiv \frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) = 0.$$

24. Die Frage nach der Anzahl der Punkte der Curve $f(u, v) = 0$, die auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ der Ebene liegen, führt uns auf Betrachtungen, die den in No. 8 durchgeführten dual entsprechen.

Die auf $\mathfrak{T}$ liegenden Berührungspunkte liegen auf den Tangenten der gegebenen Curve, welche der Gleichung genügen

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v} - \left(\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v\right) = 0.$$

Durch Zeichenwechsel folgt hieraus

1. $$\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v}\right) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung $n$ten Grades. Die Tangenten der Curve $f = 0$, deren Berührungspunkte auf $\mathfrak{T}$ liegen, sind daher zugleich Tangenten der Curve 1. Die Glieder der Function f lassen sich so gruppiren, dass f als Summe von homogenen Functionen $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten u. s. w. Grades erscheint; bezeichnet man diese Gruppen der Reihe nach mit φ_n, φ_{n-1}, $\varphi_{n-2}, \ldots$, so hat man

$$f \equiv \varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v = n\varphi_n + (n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \ldots$$

Führt man dies in 1. ein und dividirt durch n, so erhält man

2. $$F \equiv \varphi_n + \frac{1}{n}\left[(n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \ldots - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathfrak{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathfrak{v}\right)\right] = 0.$$

Der Klammerinhalt ist vom $(n-1)$ten Grade; folglich stimmen die Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ in Bezug auf die Glieder n-ten Grades überein.

Die geometrische Bedeutung dieses Umstandes lässt sich leicht erkennen. Setzt man $v = tu$ in die Gleichung $f = 0$, so enthalten die Functionen φ_n, φ_{n-1}, $\varphi_{n-2} \ldots$ der Reihe nach die Faktoren u^n, u^{n-1}, $u^{n-2} \ldots$; nach Absonderung derselben bleiben Functionen desselben Grades in Bezug auf t übrig. Bezeichnet man dieselben durch (φ_n), $(\varphi_{n-1}), \ldots$, so erhält man

$$f(u, tu) = u^n(\varphi_n) + u^{n-1}(\varphi_{n-1}) + u^{n-2}(\varphi_{n-2}) + \ldots$$

Die Division durch u^n ergiebt

4. $$(\varphi_n) + \frac{1}{u}(\varphi_{n-1}) + \frac{1}{u^2}(\varphi_{n-2}) + \ldots = 0.$$

Für jede Curventangente, die durch den Nullpunkt geht, ist $u = \infty$; führt man dies in 4. ein, so bleibt zur Bestimmung von t die Gleichung

5. $$(\varphi_n) = 0.$$

Die Grösse t ist die Tangente des Winkels, den eine Normale zu u, v mit der Abscissenachse einschliesst. Die Gleichung 5. bestimmt daher die Richtungen der durch den Nullpunkt gehenden realen oder complexen Tangenten der Curve $f = 0$. Hieraus erkennt man: Wenn zwei Functionen von Liniencoordinaten f und F in Bezug auf die Glieder höchster Potenz übereinstimmen, so fallen die durch den Nullpunkt gehenden Tangenten der Curven $f = 0$ und $F = 0$ zusammen.

Die durch den Nullpunkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Curven

$$f = 0 \quad \text{und} \quad F = 0$$

enthalten im Allgemeinen keine auf der beliebig gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ gelegenen Berührungspunkte; also sind von den n^2 gemeinsamen Tangenten von $f = 0$

und $F = 0$ diese n durch den Nullpunkt gehenden abzuziehen. Hieraus folgt: Eine Gerade enthält im Allgemeinen $n(n-1)$ Punkte einer algebraischen Curve $n$ter Klasse; oder: eine Curve $n$ter Klasse ist im Allgemeinen von der $(n-1)$ten Ordnung.

Wenn die Curven $f = 0$ und $F = 0$ in Folge der besonderen Beschaffenheit von f noch weitere besondere Beziehungen zeigen, so kann die Ordnungszahl sich vermindern. Nur für $n = 2$ stimmt die Ordnungszahl mit der Klassenzahl überein. Curven 3ter, 4ter, 5ter . . . Klasse sind im Allgemeinen von der 6ten, 12ten, 20ten . . . Ordnung.

Die Gleichung der Curve $f(u, v) = 0$ in Punktcoordinaten ergiebt sich durch Elimination von u und v aus den drei Gleichungen

$$x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = -\frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad f(u, v) = 0.$$

25. Als Beispiel wählen wir die Ellipsenevolute (No. 11)

1. $$f \equiv a^2 v^2 + b^2 u^2 - c^4 u^2 v^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2b^2 u - 2c^4 v^2 u = 2(b^2 - c^4 v^2)\,u,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2a^2 v - 2c^4 u^2 v = 2(a^2 - c^4 u^2)\,v.$$

Zieht man aus 1. die Werthe

$$b^2 - c^4 v^2 = -\frac{a^2 v^2}{u^2}, \quad a^2 - c^4 u^2 = -\frac{b^2 u^2}{v^2},$$

so erhält man

2. $$\frac{\partial f}{\partial u} = -2\frac{a^2 v^2}{u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -2\frac{b^2 u^2}{v}.$$

Die Gleichung des auf der Tangente u, v gelegenen Berührungspunkts der Evolute ergiebt sich daher zu

3. $$\Pi \equiv a^2 v^3(\mathfrak{u} - u) + b^2 u^3(\mathfrak{v} - v) = 0.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial u}u + \frac{\partial f}{\partial v}v = -2(a^2 v^2 + b^2 u^2) = -2c^4 u^2 v^2;$$

daher folgen die Coordinaten des Punktes Π

4. $$\xi = -\frac{a^2}{c^4 u^3}, \quad \eta = -\frac{b^2}{c^4 v^3}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{u^2} = \frac{c^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}, \quad \frac{1}{v^2} = \frac{c^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 1., so erhält man die Gleichung der Evolute in Punktcoordinaten

5. $$a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Cubirt man beide Seiten der Gleichung und beachtet, dass

$$(r + s)^3 = r^3 + s^3 + 3rs(r + s),$$

so ergiebt sich

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{4}{3}} = c^4;$$

hieraus folgt die Evolutengleichung in rationaler Form

$$(c^4 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2)^3 = 27a^2b^2c^4\xi^2\eta^2.$$

Diese Gleichung ist vom sechsten Grade, während im Allgemeinen die Gleichung einer Curve 4ter Kl. von der 12ten Ordnung ist.

---

26. Wir schliessen hieran noch die Ableitung der Gleichung der Tangente und des Tangentialpunkts für homogene Punkt- und Liniencoordinaten.

Die Coordinaten der Geraden, welche die Curve $n$ter Ordnung

1. $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

im Punkte P berührt, seien u_1, u_2, u_3. Dann ist zunächst

2. $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Sind ferner ξ_1, ξ_2, ξ_3 die laufenden Coordinaten der Tangentenpunkte, so ist auch

3. $$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0.$$

Die Tangente verbindet den Punkt P der Curve mit dem nächst benachbarten Punkte derselben, dessen Coordinaten sind

$$x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \quad x_3 + dx_3;$$

daher gilt auch die Gleichung

$$u_1(x_1 + dx_1) + u_2(x_2 + dx_2) + u_3(x_3 + dx_3) = 0.$$

Wenn man von derselben 2. subtrahirt, so bleibt

4. $$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0.$$

Aus den drei Gleichungen 3., 2. und 4. gewinnt man die gesuchte Tangentengleichung, indem man u_1, u_2, u_3 eliminirt; man erhält sie zunächst in der Form

5. $$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Curvengleichung folgt durch Differentiation für die Differentiale der Coordinaten die Gleichung

6. $$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0,$$

wobei $$\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i.$$

Da ferner nach dem Euler'schen Satze

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = f,$$

und der Punkt P auf der Curve liegt, so ist

7. $$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen 6. und 7. kann man f_1 und f_2 durch f_3 ausdrücken; man erhält die Proportion

8. $$f_1 : f_2 : f_3 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante 5. nach den Gliedern der ersten Zeile, so erhält man

9. $$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} \cdot \xi_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} \cdot \xi_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} \cdot \xi_3 = 0.$$

Ersetzt man nun die Coefficienten in 9. durch die proportionalen Werthe f_1, f_2, f_3, so erhält man die Gleichung der Tangente in der endgültigen Form

$$T \equiv f_1 \cdot \xi_1 + f_2 \cdot \xi_2 + f_3 \cdot \xi_3 = 0.$$

Die dual entsprechenden Betrachtungen führen zur Gleichung des Punktes P, in welchem die Curve $n$ter Klasse

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

von der Tangente u_1, u_2, u_3 berührt wird. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die Coordinaten von P, so ist die Gleichung von P

10. $$P \equiv x_1\mathfrak{u}_1 + x_2\mathfrak{u}_2 + x_3\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Da P der gemeinsame Punkt der Geraden u_1, u_2, u_3 und $u_1 + du_1$, $u_2 + du_2$, $u_3 + du_3$ ist, so gelten die Gleichungen

11. $$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$
$$x_1(u_1 + du_1) + x_2(u_2 + du_2) + x_3(u_3 + du_3) = 0,$$
aus denen durch Subtraction hervorgeht

12. $$x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0.$$

Eliminirt man x_1, x_2, x_3 aus 10., 11., 12., so erhält man die gesuchte Gleichung zunächst in der Form
$$\begin{vmatrix} \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ du_1 & du_2 & du_3 \end{vmatrix} = 0,$$
oder nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt

13. $$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ du_2 & du_3 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ du_3 & du_1 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ du_1 & du_2 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Nun gelten die beiden Gleichungen
$$F_1 \cdot u_1 + F_2 \cdot u_2 + F_3 \cdot u_3 = 0, \qquad F_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_i},$$
$$F_1 \cdot du_1 + F_2 \cdot du_2 + F_3 \cdot du_3 = 0,$$
deren erste mit $F = 0$ identisch ist, während die andere durch Differentiation dieser Gleichung entsteht. Hieraus erhält man

14. $$F_1 : F_2 : F_3 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ du_2 & du_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ du_3 & du_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ du_1 & du_2 \end{vmatrix}.$$

Aus 13. und 14. folgt die gesuchte Gleichung des Tangentialpunktes
$$P = F_1 \cdot \mathfrak{u}_1 + F_2 \cdot \mathfrak{u}_2 + F_3 \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

§ 6. Tangentenebene und Tangentialpunkt von Flächen; Tangente und Normalebene von Raumcurven; Gerade auf abwickelbaren Flächen.

1. Legt man eine Gerade durch einen Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$, sowie durch den Punkt P_1 der Fläche, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so gilt für die Richtungscosinus dieser Geraden (d. i. für die Cosinus ihrer Winkel mit den Coordinatenachsen) die Proportion

1. $$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \Delta x : \Delta y : \Delta z.$$

Convergiren Δx und Δy, und damit auch im Allgemeinen Δz gegen den Grenzwerth Null, so wird die Gerade zu einer Tangente der Fläche. Für die Richtungscosinus einer Tangente ist also

2. $$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = dx : dy : dz.$$

Durch Differentiation der Flächengleichung folgt

3. $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Führt man hier aus 2. für die Differentiale dx, dy, dz die proportionalen Werthe $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ ein, so erhält man

4. $$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\chi = 0.$$

Die Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und deren Richtungscosinus durch eine Gleichung verbunden sind (ausser der selbstverständlichen Gleichung $\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$), sind die Mantellinien einer Kegelfläche, deren Spitze der gegebene Punkt ist. Die Gleichung dieser Kegelfläche wird erhalten, wenn man in 4. die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punkts einer dieser Geraden (d. i. also eines Punkts der von den Geraden beschriebenen Kegelfläche) durch die Formeln einführt

5. $$\cos\varphi = \frac{\xi - x}{\rho}, \quad \cos\psi = \frac{\eta - y}{\rho}, \quad \cos\chi = \frac{\zeta - z}{\rho},$$
wobei
$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Führt man diese Substitution aus, und beseitigt den Divisor ρ, so erhält man die Gleichung
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Diese Gleichung ist linear in Bezug auf ξ, η, ζ. Sie lehrt: Alle Geraden, die eine Fläche in einem gegebenen Punkte P berühren, sind auf einer Ebene enthalten. Diese Ebene wird aus diesem Grunde als die Tangentenebene, der Punkt P als ihr Berührungspunkt bezeichnet.

Die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f(x, y, z) = 0$ im Punkte P ist daher

6. $$T = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Die Gerade, welche durch P normal zu T gelegt wird, heisst die Normale der Fläche im Punkte P. Die Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen sind

7. $$\cos\varphi = \frac{\partial f}{\partial x} : N, \quad \cos\psi = \frac{\partial f}{\partial y} : N, \quad \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial z} : N,$$
wobei
$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Die Gleichungen der Normalen sind

8. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben
$$z = F(x, y),$$
so kann man dieselbe durch die Anordnung
$$F(x, y) - z = 0$$
in die Form $f(x, y, z) = 0$ bringen. Man hat dann
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1.$$

Daher wird die Gleichung der Tangentenebene

9. $$T = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0;$$

die Gleichungen der Normale sind

10. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -(\zeta - z);$$

ihre Winkel mit den Achsen folgen aus

11. $$\cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} : N_1, \quad \cos\psi = \frac{\partial z}{\partial y} : N_1, \quad \cos\chi = -\frac{1}{N_1},$$
$$N_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Die Coordinaten der Tangentenebene folgen aus 6.
$$u = \frac{\partial f}{\partial x} : M, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} : M, \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} : M,$$

12. $$M = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Eliminirt man x, y, z aus diesen Gleichungen und aus der Flächengleichung

$$f(x, y, z) = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten.

2. Unter einer Cylinderfläche versteht man eine Fläche, welche von einer Geraden beschrieben wird, die einer gegebenen Richtung parallel bleibt. Die Bewegung der Geraden kann in verschiedener Weise bestimmt werden; dadurch, dass sie entlang der Schnittcurve zweier Oberflächen gleitet; oder dadurch, dass sie beständig eine gegebene Fläche berührt; oder dadurch, dass in den Gleichungen der erzeugenden Geraden ausser den Coordinaten eine unbestimmte, veränderliche Grösse vorkommt, durch deren Werthveränderungen die Ortsveränderungen der Geraden bedingt werden u. s. w.

Hat man die Cylindergleichung erhalten, und bestimmt man hierauf die Schnittcurve des Cylinders mit einer Ebene E, die den Mantellinien nicht parallel ist, so erhält man eine Curve C, den Ort der Spuren der Mantellinien auf der Ebene E; man kann nun offenbar den Cylinder als die Bahn der Geraden definiren, die einer gegebenen Richtung parallel sind und die ebene Curve C treffen. Insbesondere kann man die XY-Ebene als Schnittebene wählen und somit den Cylinder durch die Richtung seiner Mantellinien und seine Horizontalspur definiren.

Wir machen zunächst von dieser Bestimmungsweise Gebrauch. Es sei $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Horizontalspur und φ, ψ, χ seien die Winkel der Mantellinien mit den Achsen. Ist P ein Punkt der Mantellinie, die durch den Punkt Π der Curve $f(\xi, \eta) = 0$ geht, so ist

$$\frac{x - \xi}{\cos\alpha} = \frac{y - \eta}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Hieraus folgen die Werthe

$$1. \qquad \xi = x - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} z, \quad \eta = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} z.$$

Substituirt man diese Werthe in f, so erhält man die Cylindergleichung

$$2. \qquad f\left(x - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} z, \quad y - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} z\right) = 0.$$

Sind die Mantellinien mit der Z-Achse parallel, so ist

$$\cos\alpha = \cos\beta = 0,$$

und die Gleichung wird einfach

$$f(x, y) = 0.$$

Sind zwei Oberflächen $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ gegeben, entlang deren Schnittcurve die Gerade gleiten soll, und ist Π ein Punkt dieser Schnittcurve, so erhält man die Cylindergleichung, indem man die Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes Π aus den vier Gleichungen eliminirt.

$$\frac{x - \xi}{\cos\alpha} = \frac{y - \eta}{\cos\beta} = \frac{z - \zeta}{\cos\gamma}, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Sollen die Mantellinien Tangenten der Fläche $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ sein, so muss für die Coordinaten der Berührungspunkte die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Oberfläche, die von der Fläche f und von den Winkeln α, β, γ abhängt. Die Schnittpunkte dieser Fläche mit der Fläche f sind die Berührungspunkte der Mantellinien; damit ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. Man hat diesmal ξ, η, ζ aus den Gleichungen zu eliminiren

$$\frac{x - \xi}{\cos\alpha} = \frac{y - \eta}{\cos\beta} = \frac{z - \zeta}{\cos\gamma},$$

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\gamma = 0.$$

Wir bestimmen nun die Gleichung der Tangentenebene eines Cylinders, und gehen dabei von Gleichung 2. aus; die partialen Differentialquotienten von f ergeben sich wie folgt:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene ist daher, wenn die laufenden Coordinaten mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden

$$3. \qquad T = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathfrak{y} - y) - \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)(\mathfrak{z} - z) = 0^{*)}.$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Normale von T mit den Achsen einschliesst, so ist

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : -\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right).$$

Hieraus erkennt man, dass

$$\cos\varphi\cos\alpha + \cos\psi\cos\beta + \cos\chi\cos\gamma = 0.$$

Dies zeigt, dass die Ebene T die Richtung α, β, γ enthält; wir erhalten somit den Satz: Jede Tangentenebene eines Cylinders berührt den Cylinder längs einer Mantellinie, so dass jeder Punkt dieser Mantellinie ein Berührungspunkt ist.

3. Unter einer Kegelfläche versteht man eine Fläche, welche von einer Geraden beschrieben wird, die durch einen festen Punkt geht; dieser Punkt heisst die Spitze des Kegels. Man kann die Bewegung der Geraden in derselben Weise näher definiren, wie bei der Erzeugung des Cylinders.

Ist $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Horizontalspur des Kegels (vorausgesetzt, dass die Spitze S nicht auf der XY-Ebene liegt) und sind a, b, c die Coordinaten der Spitze, so sind die Gleichungen der Geraden ΠS

$$1. \qquad \frac{x - a}{a - \xi} = \frac{y - b}{b - \eta} = \frac{z - c}{c};$$

jeder dieser Quotienten ist dem Verhältniss $PS : S\Pi$ gleich. Aus den Gleichungen 1. ergiebt sich

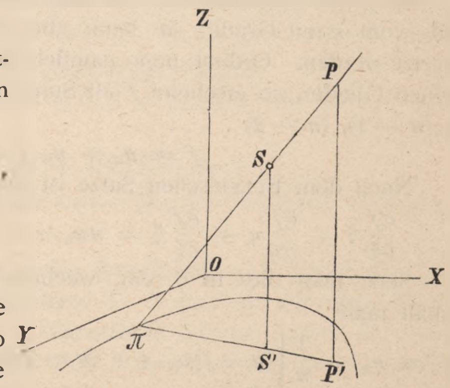
$$a - \xi = \frac{c(x - a)}{z - c}, \quad b - \eta = \frac{c(y - b)}{z - c},$$

und hieraus folgt weiter

$$\xi = \frac{az - cx}{z - c}, \quad \eta = \frac{bz - cy}{z - c}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Horizontalspur ein, so erhält man die Gleichung der Kegelfläche

$$2. \qquad f\left(\frac{az - cx}{z - c}, \quad \frac{bz - cy}{z - c}\right) = 0.$$



(M. 485.)

*) In den Differentialquotienten von $f(\xi, \eta)$ sind ξ, η durch die Werthe 1. zu ersetzen.

Verlegt man den Nullpunkt in die Kegelspitze, und nimmt die neuen Achsen den alten parallel, so gelten für die neuen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Formeln

$$x - a = \mathfrak{x}\,, \quad y - b = \mathfrak{y}\,, \quad z - c = \mathfrak{z}\,,$$
$$az - cx = a\mathfrak{z} - c\mathfrak{x}\,, \quad bz - cy = b\mathfrak{z} - c\mathfrak{y}\,.$$

Die Kegelgleichung wird daher

3. $$f\left(\frac{a\mathfrak{z} - c\mathfrak{x}}{\mathfrak{z}}\,,\ \frac{b\mathfrak{z} - c\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right) = 0\,.$$

Hier ist nun $f(\mathfrak{x} + a,\ \mathfrak{y} + b) = 0$ die Gleichung des Querschnitts der Kegelfläche mit einer Ebene, die parallel zur XY-Ebene ist und von ihr den Abstand $z = -c$ hat. Setzt man $a = b = 0$, und vertauscht $(-c)$ gegen $(+c)$, so wird die Kegelgleichung einfacher

4. $$f\left(\frac{cx}{z}\,,\ \frac{cy}{z}\right) = 0\,.$$

Ist f eine algebraische Function $n$ten Grades, so wird die Kegelgleichung 3. nach Beseitigung der Nenner eine homogene Gleichung $n$ten Grades.

Wird verlangt, dass die Mantellinien des Kegels die Schnittlinie zweier Flächen $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ treffen, so hat man ξ, η, ζ aus den Gleichungen zu eliminiren

$$\frac{x - a}{a - \xi} = \frac{y - b}{b - \eta} = \frac{z - c}{c - \zeta}\,, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0\,, \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0\,.$$

Verlangt man den Kegel, dessen Mantellinien die Fläche $f(\xi, \eta, \zeta)$ berühren, so gelten für die Coordinaten eines Punkts einer Mantellinie und ihres Berührungspunkts zunächst wieder die Gleichungen

5. $$\frac{x - a}{a - \xi} = \frac{y - b}{b - \eta} = \frac{z - c}{c - \zeta}\,, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0\,.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Gerade ΠS mit den Achsen bildet, sind proportional den Differenzen $a - \xi$, $b - \eta$, $c - \zeta$; ist ΠS Tangente der Fläche f im Punkte Π, so gilt daher die Gleichung

6. $$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a - \xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(b - \eta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(c - \zeta) = 0\,.$$

Durch Elimination von ξ, η, ζ aus 5. und 6. ergiebt sich die gesuchte Kegelgleichung.

Ist f eine algebraische Function $n$ten Grades, so ist die Gleichung 6. ebenfalls vom $n$ten Grade; sie kann aber durch eine Function $(n-1)$ten Grades ersetzt werden. Ordnet man nämlich die Function f nach dem Grade der einzelnen Glieder, so erscheint f als Summe von homogenen Functionen vom Grade n, $(n-1)$, $(n-2)$ . . . . .

$$f = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots\,.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist nun

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\zeta = nu_n + (n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \dots$$

Setzt man dies in 6. ein, wechselt die Zeichen und dividirt durch n, so erhält man

$$F = u_n + \frac{1}{n}\left[(n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \dots - \frac{\partial f}{\partial \xi}a - \frac{\partial f}{\partial \eta}b - \frac{\partial f}{\partial \zeta}c\right].$$

Die Differenz $f - F$ ergiebt sich daher zu

$$f - F = \frac{1}{n}u_{n-1} + \frac{2}{n}u_{n-2} + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}a + \frac{\partial f}{\partial \eta}b + \frac{\partial f}{\partial \zeta}c\right) = \varphi_{n-1}$$

wo nun φ_{n-1} eine Function $(n-1)$ten Grades ist. Alle nicht unendlich fernen

Punkte, welche die Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ befriedigen, erfüllen auch die Gleichung $\varphi_{n-1} = 0$. Die Punkte, in welchen eine Fläche $n$ter Ordnung von einem umschriebenen Kegel berührt wird, liegen daher auf einer bestimmten Fläche $(n-1)$ter Ordnung $\varphi_{n-1} = 0$.

Um die Tangentenebenen einer Fläche f zu erhalten, die durch eine gegebene Gerade gehen, hat man von zwei Punkten dieser Geraden aus Tangentenkegel K_1 und K_2 der Fläche zu umschreiben; die Tangentenebenen der Punkte, in welchen die Berührungscurven des Kegels K_1 bez. K_2 und der Fläche f sich schneiden, sind die verlangten. Da nun diese Berührungscurven auf der Fläche f durch zwei Flächen φ und Φ vom $(n-1)$ten Grade ausgeschnitten werden, so sind die Schnittpunkte dieser Curven die gemeinsamen Punkte der drei Flächen f, φ und Φ; die Anzahl dieser Schnittpunkte ist gleich dem Produkte der Gradzahlen der drei Functionen f, φ, Φ, also gleich

$$n(n-1)^2\,.$$

Die Anzahl der durch eine Gerade gehenden Tangentenebenen ist gleich der Klassenzahl der Fläche, d. i. gleich dem Grade ihrer Gleichung in Ebenencoordinaten. Wir finden daher: Eine Fläche $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse $n(n-1)^2$. Nur für $n = 2$ ist im Allgemeinen die Klassenzahl gleich der Ordnungszahl. Flächen 3ter, 4ter, 5ter . . . Ordnung sind im Allgemeinen von der 12ten, 36ten, 80ten Klasse.

Von der Kegelgleichung 2. ausgehend, erhält man

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = -\frac{c}{z - c}\cdot\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\,,$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dy} = -\frac{c}{z - c}\cdot\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\,,$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dz} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dz} = \frac{c(x - a)}{(z - c)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{c(y - b)}{(z - c)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\,.$$

Die Gleichung der Tangentialebene des Kegels im Punkte P ergiebt sich daher, wenn mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die laufenden Coordinaten bezeichnet werden,

$$T \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathfrak{y} - y) - \left(\frac{x - a}{z - c}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y - b}{z - c}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)(\mathfrak{z} - z) = 0^*)\,.$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel der Normalen mit den Achsen, so ist demnach

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : -\left(\frac{x - a}{z - c}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y - b}{z - c}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\right).$$

Für die Richtungswinkel λ, μ, ν der Mantellinie PS gilt

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = (x - a) : (y - b) : (z - c)\,.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$\cos\varphi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\chi\cos\nu = 0\,.$$

Dies lehrt: Jede Tangentenebene eines Kegels berührt den Kegel entlang einer Mantellinie.

Da hiernach die Tangentenebene jedes Kegelpunktes P durch die Spitze geht, so folgt, dass man die Tangentenebene in P auch als die Grenzlage der Ebenen betrachten kann, die durch die Mantellinie SP und durch eine zweite Mantellinie SP_1 gehen, wenn der Winkel SP, SP_1 gegen den Grenzwerth Null convergirt. Hieraus folgt weiter, dass die Tangentenebene des Punktes P zugleich Tangentenebene für alle Punkte der Mantellinie SP ist.

*) Hier gilt dieselbe Bemerkung wie zu Gleichung 3. der vorigen Nummer.

4. Die Cylinderflächen und die Kegelflächen gehören unter den allgemeineren Begriff der Regelflächen. Unter einer Regelfläche versteht man eine Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Die Bewegung der Geraden kann in verschiedener Weise definirt werden: man kann verlangen, dass die Gerade immer drei gegebene (ebene oder unebene) Curven trifft; oder dass sie zwei gegebene Curven trifft und eine gegebene Fläche berührt; oder dass sie eine gegebene Curve trifft und zwei gegebene Flächen berührt u. s. w.

Sind $z = mx + n$ und $y = Mx + N$ die Gleichungen einer erzeugenden Geraden der Fläche, so müssen m, n, M, N veränderlich sein; und zwar können es nur Functionen einer Variabeln sein; denn angenommen, sie enthielten zwei Variable, so könnte man die Variabeln so bestimmen, dass die Gleichungen der Geraden durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend eines Raumpunktes erfüllt würden, es würde also dann jeder Raumpunkt der Fläche angehören, im Widerspruche mit dem Begriffe einer Fläche. Sei σ eine Veränderliche, so haben die Gleichungen einer erzeugenden Geraden einer Regelfläche daher die Form

1. $$z = g(\sigma)\cdot x + h(\sigma), \quad y = G(\sigma)\cdot x + H(\sigma),$$

worin g, h, G, H Functionszeichen sind. Durch diese Gleichungen sind die Coordinaten jedes Flächenpunktes von zwei unabhängigen Variabeln x und σ abhängig gemacht. Die Flächengleichung wird aus 1. durch Elimination von σ gewonnen.

Um die Gleichung der Tangentenebene im Punkte P zu erhalten, haben wir die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ zu bilden. Im ersten Falle haben wir x und σ so zu ändern, dass nur z sich ändert, y aber ungeändert bleibt; im zweiten Falle ändern sich y und σ, während x ungeändert bleibt. Unter der ersten Voraussetzung gehen aus 1. die beiden Gleichungen hervor

2. $$dz = g\,dx + (g'x + h')\,d\sigma,$$

3. $$0 = G\,dx + (G'x + H')\,d\sigma,$$

wobei g', h', G', H' die Grössen $dg : d\sigma \,.\,.\,.\,.\,.$ bezeichnen. Aus 3. folgt

$$d\sigma = -\frac{G}{G'x + H'}\,dx.$$

Setzt man dies in 2. ein, so erhält man

4. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(gG' - Gg')\,x + (gH' - Gh')}{G'x + H'}.$$

Unter der andern Voraussetzung folgt aus 1.

$$dz = (g'x + h')\,d\sigma, \quad dy = (G'x + H')\,d\sigma$$

und hieraus durch Division

5. $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g'x + h'}{G'x + H'}.$$

Führt man diese Werthe 4. und 5. in die Gleichung der Tangentenebene ein, so erhält man nach Beseitigung der Nenner für die Tangentenebene einer Regelfläche

$$T \equiv [(gG' - Gg')x + gH' - Gh'](\xi - x) + (g'x + h')(\eta - y) - (G'x + H')(\zeta - z) = 0.$$

Für die Richtungscosinus der Normalen folgt hieraus

$$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = [(gG' - Gg')\,x + gH' - Gh'] : (g'x + h') : -(G'x + H').$$

Für die Winkel λ, μ, ν der erzeugenden Geraden 1. und der Achsen ist

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = 1 : G : g.$$

Aus diesen Proportionen folgt die Gleichung

$$\cos\varphi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\chi\cos\nu = 0.$$

Dieselbe lehrt: Jede Tangentenebene einer Regelfläche enthält die durch den Berührungspunkt gehende erzeugende Gerade.

Bleibt in der Gleichung $T = 0$ die Variable σ ungeändert, während x geändert wird, so verschiebt sich der Berührungspunkt entlang einer erzeugenden Geraden; dabei ändert sich die Function T; dies ergiebt: Wenn der Berührungspunkt auf einer erzeugenden Geraden fortschreitet, so dreht sich seine Tangentenebene um diese Gerade.

Zwischen der Reihe der auf einer erzeugenden Geraden liegenden Punkte und dem zugehörigen Büschel von Tangentenebenen besteht ein sehr einfacher Zusammenhang. Um diesen zu erkennen, wählen wir das Coordinatensystem so, dass die erzeugende Gerade, die wir in Betracht ziehen wollen, als X-Achse genommen wird, den Nullpunkt wählen wir beliebig auf dieser Geraden; zur XY-Ebene nehmen wir die Tangentenebene des Nullpunktes. Für die X-Achse ist $y = z = 0$; für den dieser Geraden der Fläche zugehörigen Werth von σ müssen daher die Functionen g, h, G, H verschwinden. Die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte der X-Achse ergiebt sich hiernach zu

$$T \equiv (g'x + h')\,\eta - (G'x + H')\,\zeta = 0.$$

Der Punkt $x = 0$ hat nach der Voraussetzung die Tangentenebene $\zeta = 0$, folglich ist $h' = 0$, und die Gleichung von T wird noch einfacher

6. $$T \equiv g'x\cdot\eta - (G'x + H')\,\zeta = 0.$$

Ist φ der Winkel dieser Ebene mit der Y-Achse und bezeichnet man mit t die von der XY-Ebene aus gemessene Strecke, welche T von einer Geraden abschneidet, die zur Z-Achse parallel ist und von der X-Achse um die Längeneinheit absteht, so ist $tang\varphi = t$. Nun folgt aus der Gleichung 6.

$$tang\varphi = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{g'x}{G'x + H'};$$

daher ergiebt sich, wenn man t für $tang\varphi$ einführt und den Nenner beseitigt, für t und x die Gleichung

$$G'xt - g'x + H't = 0.$$

Diese Gleichung lehrt (Analyt. Geom. der Ebene § 6, No. 15), dass die von dem Büschel der Tangentenebenen auf der Geraden a erzeugte Punktreihe mit der Reihe der Berührungspunkte projectiv ist; hieraus ergiebt sich: Die Punktreihe auf einer erzeugenden Geraden einer Regelfläche ist mit dem Büschel der zugehörigen Tangentenebenen projectiv, und zwar entspricht jedem Punkte die Tangentenebene in diesem Punkte. In der analytischen Geometrie des Raumes ist dieser Satz für die Regelflächen zweiten Grades bewiesen worden.

5. Es sei $f(u, v, w) = 0$ die Gleichung einer Fläche in Ebenencoordinaten und T und T_1 mit den Coordinaten u, v, w und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ seien zwei Tangentenebenen der Fläche. Durch die Schnittlinie der Ebenen

$$T \equiv ux + vy + wz - 1 = 0,$$

$$T_1 \equiv (u + \Delta u)\,x + (v + \Delta v)\,y + (w + \Delta w)\,z - 1 = 0$$

geht die Ebene

$$T' \equiv T_1 - T \equiv \Delta u\cdot x + \Delta v\cdot y + \Delta w\cdot z = 0;$$

diese Ebene enthält den Nullpunkt, und ihre Stellungswinkel folgen aus

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = \Delta u : \Delta v : \Delta w.$$

Geht man zur Grenze für verschwindende Δu, Δv und Δw über, so nähert sich T' einer bestimmten Grenzlage T; die Gleichung dieser Grenzlage ist

$$1. \qquad \mathfrak{T} \equiv du \cdot x + dv \cdot y + dw \cdot z = 0,$$

für die Richtungswinkel ihrer Normalen hat man

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = du : dv : dw.$$

Auf einer Tangentialebene T liegen unendlich viele Tangenten der Fläche f; dieselben werden auf T durch alle die unzähligen Ebenen $\mathfrak{T}$ ausgeschnitten, die man erhält, wenn man die Verhältnisse $du : dv : dw$ in jeder mit der Gleichung der Fläche verträglichen Weise abändert, mithin so, dass sie der Gleichung genügen, die sich durch Differentiation von f ergiebt

$$2. \qquad \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot dw = 0.$$

Vergleicht man 1. und 2., so erkennt man, dass jede Ebene $\mathfrak{T}$ die Gerade γ enthält, deren Punkte der Proportion genügen

$$3. \qquad x : y : z = \frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Die Ebenen $\mathfrak{T}$ bilden daher ein Büschel, dessen Träger durch den Nullpunkt geht und durch 3. bestimmt ist. Hieraus folgt: Alle Tangenten der Fläche $f(u, v, w) = 0$, die auf einer Tangentialebene liegen, gehen durch einen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Geraden γ mit der Ebene T. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt der Ebene T und der Fläche f.

Sind x, y, z die Coordinaten desselben und $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Coordinaten irgend einer durch ihn gehenden Ebene, so hat man die Gleichungen

$$x\mathfrak{u} + y\mathfrak{v} + z\mathfrak{w} - 1 = 0,$$
$$xu + yv + zw - 1 = 0.$$

Aus ihnen folgt

$$x(\mathfrak{u} - u) + y(\mathfrak{v} - v) + z(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

In Rücksicht auf 3. folgt hieraus die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T

$$4. \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) + \frac{\partial f}{\partial w}(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben

$$w = f(u, v),$$

so erhält man die Gleichung des Berührungspunktes in der Form

$$5. \qquad P \equiv \frac{\partial w}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial w}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) - (\mathfrak{w} - w) = 0.$$

6. Das Ebenengebilde, welches von Ebenenbüscheln gebildet wird, deren Träger auf einer Ebene A liegen und eine Curve C dieser Ebene umhüllen, heisst eine Grenzfläche. Unter den Ebenengebilden nehmen die Grenzflächen dieselbe Stellung ein, wie unter den Punktgebilden die Kegelflächen. Sind α, β, γ die Coordinaten der Ebene A und ist

$$1. \qquad f(U, V) = 0$$

die Gleichung der Horizontalprojection von C, so gehört nach der Definition jede Ebene T zur Grenzfläche, welche durch eine Schnittlinie der Ebene A mit einer Verticalebene $\mathfrak{T}$ geht, die der Gleichung 1. genügt. Die Coordinaten U, V dieser Ebene folgen aus den Coordinaten von A und T durch die Formeln

$$U = \frac{\lambda u + \mu\alpha}{\lambda + \mu}, \quad V = \frac{\lambda v + \mu\beta}{\lambda + \mu}, \quad 0 = \frac{\lambda w + \mu\gamma}{\lambda + \mu}.$$

Aus der letzten folgt

$$\lambda : \mu = -\gamma : w;$$

daher ist

$$2. \qquad U = \frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}, \quad V = \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}.$$

Führt man diese Werthe in 1. ein, so erhält man die Gleichung der Grenzfläche

$$3. \qquad f\left(\frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}, \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}\right) = 0.$$

Wie man sieht, geht diese Gleichung aus der Kegelgleichung No. 3, 2 hervor, wenn man überall die Punktcoordinaten durch Ebenencoordinaten ersetzt.

Um die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$ zu erhalten, in welchem die Grenzfläche von der Ebene T derselben berührt wird, bilden wir

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u} = \frac{\partial f(U, V)}{\partial U} \cdot \frac{dU}{du} = -\frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U},$$
$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v} = \frac{\partial f(U, V)}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dv} = -\frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V},$$
$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{dU}{dw} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dw} = \frac{\gamma(u - \alpha)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{\gamma(v - \beta)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}.$$

Die Gleichung des Tangentialpunktes einer Grenzfläche ist daher, wenn die laufenden Coordinaten mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bezeichnet werden

$$4. \qquad P \equiv \frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - v) - \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}\right)(\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ durch α, β, γ, so wird sie identisch; daher folgt: Die Punkte der Grenzfläche liegen auf der Ebene A. Diese Ebene wird als die Hauptebene der Grenzfläche bezeichnet.

Setzt man in 4. $\mathfrak{w} = 0$, so erhält man die Gleichung der Horizontalprojection von P

$$P' \equiv \frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - v) + \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma}\frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma}\frac{\partial f}{\partial V}\right) w = 0.$$

Hieraus erlangt man durch einfache Reduction

$$P' \equiv \frac{\partial f}{\partial U}\left(\mathfrak{u} - \frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma}\right) + \frac{\partial f}{\partial V}\left(\mathfrak{v} - \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}\right) = 0,$$

und dies kann man nach den Formeln 2. ersetzen durch

$$\frac{\partial f}{\partial U}(\mathfrak{u} - U) + \frac{\partial f}{\partial V}(\mathfrak{v} - V) = 0.$$

Der Berührungspunkt P der Ebene T hat also als Grundriss einen Punkt der Curve $f(U, V) = 0$; folglich ist P ein Punkt der Curve C. Die Curve C enthält daher die Punkte der Grenzfläche.

Hieraus erkennt man weiter, dass jeder Punkt von C der Berührungspunkt eines Büschels von Ebenen der Grenzfläche ist — sowie beim Kegel die Tangentenebene in einem Punkte des Kegels zugleich Tangentenebene in allen Punkten einer geradlinigen Punktreihe, nämlich der durch den Punkt gehenden Mantellinie ist.

7. Unter einer Regelfläche unter den Ebenengebilden versteht man eine Fläche, die von den Ebenen eines Ebenenbüschels umhüllt wird, dessen Träger sich im Raume bewegt. In No. 4 haben wir die Regelflächen unter den Punktgebilden definirt und nachgewiesen, dass die Tangentenebenen Ebenenbüschel bilden, deren Träger die erzeugenden Geraden der Regelfläche sind; dies zeigt, dass die Regelflächen unter den Punktgebilden auch Regelflächen unter den Ebenengebilden sind. Im Verlaufe der jetzt anzustellenden Betrachtung wird sich zeigen, dass bei einer Regelfläche unter den Ebenengebilden die

Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels den Träger dieses Büschels erfüllen; damit wird dann erwiesen sein, dass die Definitionen der Regelfläche für Punkt- und für Ebenengebilde dieselben Objecte umfassen, so dass man von Regelflächen schlechthin sprechen kann.

Ein Ebenenbüschel ist durch die Gleichungen zweier Spurpunkte des Trägers bestimmt, die wir in der Form annehmen wollen

1. $$v = Gu + H, \quad w = gu + h.$$

Soll das Ebenenbüschel beweglich sein, ohne doch jede mögliche Ebene des Raumes enthalten zu können, so müssen G, H, g, h Functionen einer Variabeln σ sein. Zur Bestimmung des partialen Differentialquotienten $\partial w : \partial u$ haben wir die beiden Gleichungen (vergl. No. 4)

$$0 = G du + (G'u + H')\, d\sigma, \quad dw = g du + (g'u + h')\, d\sigma,$$

aus ihnen ergiebt sich

2. $$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{(gG' - Gg')\, u + gH' - Gh'}{G'u + H'}.$$

Der partiale Differentialquotient $\partial w : \partial v$ folgt aus

$$dv = G'u + H', \quad dw = g'u + h',$$

zu

3. $$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{g'u + h'}{G'u + H'}.$$

Daher erhält man für die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T

4. $$P \equiv [(gG' - Gg')\, u + gH' - Gh']\, (\mathfrak{u} - u) + (g'u + h')\, (\mathfrak{v} - v) \\ - (G'u + H')\, (\mathfrak{w} - w) = 0.$$

Hier kann man noch v und w nach den Formeln 1. durch u und σ ausdrücken. Lässt man σ ungeändert und ändert nur u, so erhält man aus 4. die Berührungspunkte aller Ebenen des Büschels, dessen Träger dem angenommenen Werthe von σ zugehört; man sieht, dass dabei im Allgemeinen die Coefficienten der Gleichung wesentliche Aenderungen erleiden und schliesst daher: Die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels wechseln im Allgemeinen von Ebene zu Ebene.

Führt man denselben Werth σ in 1. ein, so erkennt man leicht, dass jede diesem Werthe zugehörige Gruppe von Ebenencoordinaten der Gleichung $P = 0$ genügt; denn ist U, V, W eine solche Gruppe, so ist

$$V = GU + H, \quad W = gU + h.$$

Für die Ebene T ist ebenfalls

$$v = Gu + H, \quad w = gu + h,$$

und daher

$$V - v = G(U - u), \quad W - w = g(U - u).$$

Setzt man dies in 4. für $\mathfrak{v} - v$ und $\mathfrak{w} - w$, so wird 4. identisch.

Da hiernach jede dem Büschel σ angehörige Ebene den Punkt P enthält, so folgt: Die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels sind auf dem Träger des Büschels enthalten. Hiermit ist die anfangs ausgesprochene Behauptung erwiesen.

8. Eine Raumcurve ist durch zwei Flächen bestimmt, die sie enthalten und als deren vollständiger oder theilweiser Durchschnitt sie erscheint. Die Gleichungen dieser Flächen seien

1. $$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Verbindet man einen Punkt P der Curve mit einem andern Punkte P_1 derselben, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so bildet die

Gerade PP_1 mit den Achsen X, Y, Z Winkel, deren Cosinus die Verhältnisse haben $\Delta x : \Delta y : \Delta z$. Convergirt Δx gegen die Grenze Null, so wird PP_1 zur Tangente der Raumcurve im Punkte P.

Sind φ, ψ, χ die Richtungswinkel der Tangente, so hat man also

2. $$\cos\varphi : \cos\psi : \cos\chi = dx : dy : dz.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 1. folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Hieraus erhält man (vergl. § 4, No. 4)

3. $$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

Die Gleichungen der Tangente sind daher

4. $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Eliminirt man aus 1. und 4. die Coordinaten x, y, z, so erhält man eine Gleichung, welche die Coordinaten ξ, η, ζ erfüllen, wenn Π auf einer Tangente der Raumcurve liegt; das Eliminationsresultat ist daher die Gleichung der von den Tangenten der Raumcurve beschriebenen Fläche.

Eliminirt man aus 1. einmal z und dann y, so erhält man die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection der Curve; bringt man dieselben in die Form

$$y = \varphi(x), \quad z = \Phi(x),$$

so ist

$$dy = \varphi'(x)\, dx, \quad dz = \Phi'(x)\, dx.$$

Daher werden die Gleichungen der Tangente

5. $$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Die Richtungscosinus sind

6. $$\cos\varphi = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist der Grenzwerth von $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ und ist daher der Grenzwerth der Sehne PP_1 für ein verschwindendes Δx; dieser Grenzwerth ist (§ 5, No. 1) das Differential ds des Curvenbogens; man hat also

7. $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

und kann 6. ersetzen durch

8. $$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{ds}.$$

Die Ebene, welche durch P normal zur Curventangente gelegt wird, heisst Normalebene der Curve im Punkte P. Die Gleichung der Normalebene ergiebt sich aus

$$\cos\varphi\cdot(\xi - x) + \cos\psi\cdot(\eta - y) + \cos\chi\cdot(\zeta - z) = 0,$$

wenn man $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ durch die proportionalen Werthe dx, dy, dz ersetzt

$$N \equiv dx\cdot(\xi - x) + dy\cdot(\eta - y) + dz\cdot(\zeta - z) = 0.$$

Sind die Gleichungen der Projectionen gegeben, so hat man

9. $$N \equiv (\xi - x) + y'(\eta - y) + z'(\zeta - z) = 0;$$

im Anschluss an die Gleichungen 1. ist

10. $$N = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} & (\xi - x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} & (\eta - y) \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} & (\zeta - z) \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Coordinaten der Normalebene ergeben sich aus 9. zu

11. $$u = \frac{1}{x + y'y + z'z}, \quad v = \frac{y'}{x + y'y + z'z}, \quad w = \frac{z'}{x + y'y + z'z}.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen

$$y = \varphi(x), \quad z = \Phi(x)$$

die Coordinaten x, y, z eliminirt, so erhält man zwei Bedingungsgleichungen für u, v, w; diese werden von den Normalebenen der Curve erfüllt, sie sind mithin die Gleichungen der von den Normalebenen der gegebenen Raumcurve umhüllten abwickelbaren Fläche.

9. Eine abwickelbare Fläche ist eine Fläche, deren Berührungsebenen zwei Bedingungsgleichungen genügen. Sind

1. $$f(u, v, w) = 0, \quad F(u, v, w) = 0$$

zwei solche Gleichungen, so erscheint die abwickelbare Fläche umhüllt von den gemeinsamen Tangentenebenen der Flächen $f = 0$ und $F = 0$. Eliminirt man aus 1. einmal w und dann v, so erhält man zwei Gleichungen, die eine zwischen u und v, die andere zwischen u und w; wir wollen sie uns in der Form denken

2. $$v = \varphi(u), \quad w = \Phi(u).$$

Es sind dies die Gleichungen der horizontalen und der verticalen Spur der abwickelbaren Fläche; durch diese ist die Fläche ebenfalls bestimmt.

Die Coordinaten der Ebenen T und T_1 mögen den Gleichungen 1. genügen, es mögen also T und T_1 Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche sein. Ist $\mathfrak{T}$ irgend eine die Gerade TT_1 enthaltende Ebene, so ergeben sich die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ aus den Coordinaten von T und T_1 zu

$$\mathfrak{u} = \lambda u + \mu u_1, \quad \mathfrak{v} = \lambda v + \mu v_1, \quad \mathfrak{w} = \lambda w + \mu w_1, \quad \lambda + \mu = 1.$$

Hieraus gewinnt man

$$\mathfrak{u} - u = \lambda u + \mu u_1 - u = \mu(u_1 - u),$$
$$\mathfrak{v} - v = \mu(v_1 - v), \quad \mathfrak{w} - w = \mu(w_1 - w).$$

Hieraus folgt, dass die Coordinaten jeder die Gerade TT_1 enthaltenden Ebene den beiden Gleichungen genügen

3. $$\frac{\mathfrak{u} - u}{u_1 - u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{v_1 - v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{w_1 - w},$$

und umgekehrt. Diese Gleichungen sind als die Gleichungen der Geraden in Plancoordinaten zu bezeichnen.

Setzt man $u_1 = u + \Delta u$, $v_1 = v + \Delta v$, $w_1 = w + \Delta w$, so gehen sie über in

4. $$\frac{\mathfrak{u} - u}{\Delta u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{\Delta v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{\Delta w}.$$

Nähert sich Δu dem Grenzwerthe Null, so nähern sich im Allgemeinen auch Δv und Δw demselben Grenzwerthe. Die Gerade TT_1 nähert sich dabei im Allgemeinen einer bestimmten Grenzlage $\mathfrak{G}$, entlang welcher die Ebene T die abwickelbare Fläche berührt. Die Gleichungen dieser Geraden $\mathfrak{G}$ sind daher

5. $$\frac{\mathfrak{u} - u}{du} = \frac{\mathfrak{v} - v}{dv} = \frac{\mathfrak{w} - w}{dw}.$$

Hierbei bestimmen sich du, dv, dw durch die aus 1. fliessenden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw = 0,$$

aus welchen folgt

6. $$du : dv : dw = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial u} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Oder man zieht aus 2. die Werthe v' und w' und hat dann die Gleichungen von $\mathfrak{G}$

7. $$\mathfrak{u} - u = \frac{\mathfrak{v} - v}{v'} = \frac{\mathfrak{w} - w}{w'}.$$

Eliminirt man u, v, w aus den beiden Gleichungen 7. und aus den Gleichungen

$$f(u, v, w) = 0, \quad F(u, v, w) = 0,$$

so erhält man in Plancoordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Gleichung der von den Geraden $\mathfrak{G}$ der abwickelbaren Fläche berührten Rückkehrkante der Fläche.

9. Wir wenden die entwickelten Formeln auf die Schraubenlinie und die Schraubenregelfläche an.

Eine Schraubenlinie wird von einem Punkte beschrieben, der sich auf der Oberfläche eines Rotationscylinders von einem bestimmten Normalschnitte und einer bestimmten Mantellinie ausgehend so bewegt, dass sein Abstand von diesem Normalschnitte proportional dem Bogen ist, den seine Projection auf den Normalschnitt immer in derselben Richtung zurückgelegt hat. Wird die Cylinderachse zur Z-Achse genommen, die X-Achse durch einen Punkt der Schraubenlinie gelegt und die Schraubenlinie so beschrieben, dass sich die Drehung in der Richtung von der positiven X-Achse nach der positiven Y-Achse mit einer Fortschreitung in der Richtung der positiven Z-Achse verbindet, so ist nach der Definition $z = k\varphi$, wo k eine positive Constante und φ den Arcus des Winkels bedeutet, den der Radius vector der Horizontalprojection mit der X-Achse bildet. Ersetzt man φ durch $\varphi + 2\pi$, so geht man von einem Punkte P der Schraubenlinie zu dem auf derselben Mantellinie zunächst darüber liegenden Punkte; die Z-Ordinate desselben ist $k\varphi + k \cdot 2\pi$. Der Unterschied beider ist die Ganghöhe der Schraubenlinie; bezeichnet man diese mit h, so ist

$$h = 2\pi k.$$

Da nun $y = x \operatorname{tang} \varphi$, so folgt eine Gleichung der Schraubenlinie zu

1. $$z = k \operatorname{Arc\,tang} \frac{y}{x};$$

die andere ist die Cylindergleichung

2. $$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

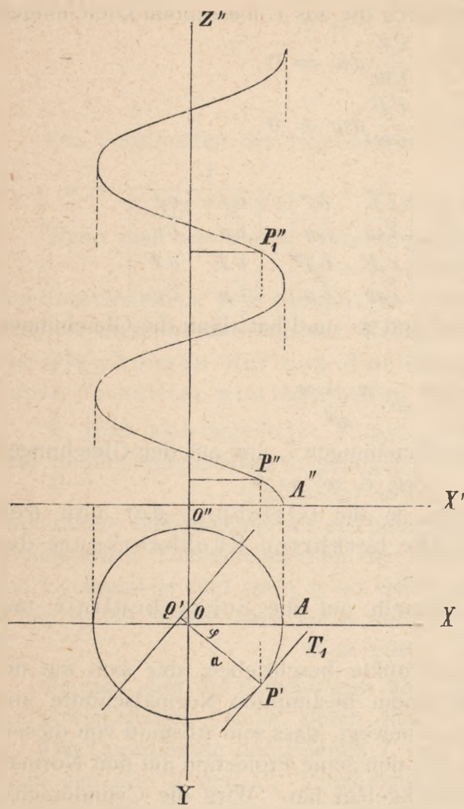
wenn a den Radius des Cylinders bezeichnet.

In Fig. 486 sind zwei Gänge einer Schraubenlinie im Aufriss aufgezeichnet.

Durch Differentiation folgt aus 2. und 1.

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad \text{folglich} \quad y' = -\frac{x}{y},$$

$$dz = k\cdot\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = -\frac{k}{y}\,dx,\quad z' = -\frac{k}{y}.$$



(M. 486.)

Daher sind die Gleichungen der Tangente

3. $$\frac{\xi - x}{y} = -\frac{\eta - y}{x} = -\frac{\zeta - z}{k}.$$

Der Grundriss der Tangente hat hiernach die Gleichung

$$\xi x + \eta y = a^2,$$

er berührt daher den Normalschnitt des Cylinders, wie aus geometrischen Gründen auch sofort erhellt. Sind ξ, η die Coordinaten der Horizontalspur der Tangente, so folgt aus 3. für $\zeta = 0$

$$\xi - x = \frac{z}{k}y,\quad \eta - y = -\frac{z}{k}x,$$

und daher weiter

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{z^2}{k^2}(x^2 + y^2).$$

Ersetzt man z und $x^2 + y^2$ durch $k\varphi$ und a^2, und bezeichnet die Spur der Tangente mit T_1, so erhält man $P'T_1 = a\varphi$, d. i. = Kreisbogen $P'A$.

Hieraus folgt: Die Spuren der Tangenten der Schraubenlinie auf einer Ebene normal zur Achse liegen auf einer Kreisevolvente.

Der Winkel χ der Tangente mit der Schraubenachse ergiebt sich aus 3. zu

4. $$\cos\chi = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}},\quad \operatorname{tang}\chi = \frac{a}{k}.$$

Die Tangenten der Schraubenlinie sind also gegen die Achse gleich geneigt. Die Gleichung der Normalebene ist

$$y(\xi - x) - x(\eta - y) - k(\zeta - z) = 0,\quad \text{d. i.}$$

5. $$N \equiv y\xi - x\eta - k(\zeta - z) = 0.$$

Die Coordinaten von N sind daher

$$u = -\frac{y}{kz},\quad v = \frac{x}{kz},\quad w = \frac{1}{z}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{u}{w} = -\frac{y}{k},\quad \frac{v}{w} = \frac{x}{k},\quad \frac{u}{v} = -\frac{y}{x}.$$

Daher erhält man für die von den Normalebenen umhüllte abwickelbare Fläche die Gleichungen

6. $$\frac{u^2 + v^2}{w^2} = \frac{a^2}{k^2},\quad kw\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{u}{v} + 1 = 0.$$

Die letzte Gleichung entsteht, wenn man in $w = 1 : z$ die Coordinate z durch $k\,\mathrm{Arc\,tang}(y : x)$, und hierin $y : x$ durch $-u : v$ ersetzt.

Im vorliegenden Falle erhalten wir über die auf dieser Fläche gelegenen Geraden am einfachsten dadurch Aufschluss, dass wir die Gleichungen zweier benachbarten Normalebenen der Schraubenlinie bilden.

Die durch den Punkt $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ gehende Normalebene hat die Gleichung

$$N_1 \equiv (y + dy)\xi - (x + dx)\eta - k(\zeta - z - dz) = 0.$$

Durch die gesuchte Gerade NN_1 geht auch die Ebene

$$M \equiv N_1 - N \equiv dy\cdot\xi - dx\cdot\eta + k\,dz = 0.$$

Setzt man die obigen Werthe von y' und z' ein, so erhält man die Gleichung dieser Ebene

$$M \equiv x\xi + y\eta + k^2 = 0.$$

M ist daher normal zu OP', und schneidet von der Verlängerung von OP' die constante Strecke $OQ' = k^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 : a$ ab.

Zieht man durch P die Gerade PQ parallel und gleich $P'Q'$, so enthält N die Gerade PQ; folglich enthält die Gerade NN_1 den Punkt Q. Bewegt sich P entlang der Schraubenlinie, so beschreibt Q eine Schraubenlinie von derselben Ganghöhe; bezeichnet χ_1 den Winkel der Tangente dieser Schraubenlinie mit OZ, so ist

$$\cos\chi_1 = k : \sqrt{k^2 + \frac{k^2}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{k^2 + a^2}}.$$

Hieraus folgt, dass $\cos\chi_1 = \sin\chi$, dass also die Tangente der von Q beschriebenen Schraubenlinie mit NN_1 zusammenfällt. Wir haben somit den Satz: Die Cuspidalkante der von den Normalebenen einer Schraubenlinie umhüllten abwickelbaren Fläche ist eine coaxiale Schraubenlinie von derselben Ganghöhe.

Wenn eine Gerade normal zu einer andern Geraden sich so bewegt, dass sie diese Gerade und eine Schraubenlinie schneidet, welche die letztere Gerade zur Achse hat, so nennt man die von der bewegten Geraden beschriebene Fläche eine axiale normale Schraubenregelfläche. In Bezug auf das soeben benutzte Coordinatensystem ist die Gleichung dieser Fläche

7. $$z = k\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x},$$

so dass die beiden Gleichungen der Schraubenlinie 1. und 2. dieselbe als Durchschnitt dieser Schraubenfläche und eines Rotationscylinders erscheinen lassen. Aus 7. folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -k\frac{y}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = k\cdot\frac{x}{x^2 + y^2};$$

mithin ist die Gleichung der Tangentenebene

$$ky(\xi - x) - kx(\eta - y) + (x^2 + y^2)(\zeta - z) = 0,\quad \text{oder}$$

8. $$T \equiv ky\xi - kx\eta + (x^2 + y^2)(\zeta - z) = 0.$$

Diese Ebene enthält die Gerade, deren Gleichungen sind

$$\zeta = z,\quad y\xi - x\eta = 0,$$

d. i. die durch den Berührungspunkt P gehende erzeugende Gerade der Schraubenfläche. Der Abschnitt von T auf der X-Achse ergiebt sich aus 8. für $\eta = \zeta = 0$ zu

$$\xi = \frac{x^2 + y^2}{ky}z.$$

Ist ρ der Abstand des Berührungspunktes von der Z-Achse, und φ der Winkel (ρ, x), so ist $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = k\varphi$, und es folgt daher

$$\xi = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\rho.$$

Bewegt sich P entlang einer erzeugenden Geraden, so bleibt φ ungeändert. Da man jede erzeugende Gerade zur X-Achse wählen kann, so ergiebt sich der

Satz: Die erzeugenden Geraden der axialen normalen Schraubenregelfläche werden von den den Punkten einer Erzeugenden zugehörigen Tangentenebenen in Punktreihen geschnitten, die der Reihe der Berührungspunkte ähnlich sind; das Verhältniss entsprechender Strecken ist von der Ganghöhe unabhängig.

Wenn eine Gerade G sich um eine Achse so bewegt, dass ihr Winkel α mit dieser Achse und ihr kürzester Abstand b von ihr unverändert bleiben, und die gemeinsame Normale der Achse und der Geraden G eine normale axiale Schraubenfläche erzeugt, so beschreibt die Gerade G eine Schraubenregelfläche allgemeinster Art.

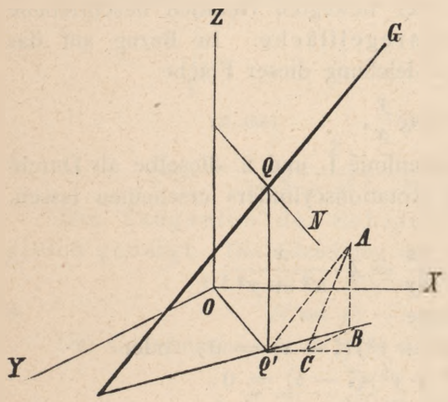
Ist $b = 0$ und $\alpha = 90°$, so beschreibt G eine normale axiale Schraube; ist $b = 0$ und $\alpha \gtrless 90°$, so bezeichnet man die erzeugte Fläche als schräge axiale Schraube; zur Unterscheidung hiervon hat man die Schraubenregelflächen, für welche b von Null verschieden ist, als geschränkte Schrauben bezeichnet.

Verfügt man über das Coordinatensystem in Bezug auf die von b erzeugte Schraubenfläche so wie vorhin, wendet dieselben Bezeichnungen an, und betrachtet die Gerade G in der Lage, in welcher b und OX den Winkel φ einschliessen, so hat der Grundriss von G die Gleichung

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - b = 0, \quad \text{oder}$$

9. $$y = -\cot\varphi \cdot x + \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Es sei Q' der Grundriss von Q; man ziehe durch Q' Parallelen zu G und OX, mache $Q'A = 1$ und bestimme die Projectionen B und C von A auf die XY-Ebene, bez. die Parallele zu OX; dann ist



(M. 487.)

$$Q'B = \sin\alpha,$$
$$Q'C = Q'B\sin\varphi = \sin\alpha\sin\varphi.$$

Nun ist aber $Q'C = \cos(G, x)$; daher hat man

$$\cos(G, x) = \sin\alpha\sin\varphi.$$

Die Coordinaten von Q sind $x_0 = b\cos\varphi$ und $z_0 = k\varphi$; daher ist die Gleichung der Projection von G auf die XZ-Ebene

$$\frac{z - k\varphi}{\cos\alpha} = \frac{x - b\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi},$$

woraus sich ergiebt

$$z = \frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}x - b\cot\alpha\cot\varphi + k\varphi.$$

Im Vergleich mit den Bezeichnungen in No. 4 ist also jetzt

$$G = -\cot\varphi, \quad H = \frac{b}{\sin\varphi}, \quad g = \frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}, \quad h = -b\cot\alpha\cot\varphi + k\varphi,$$

$$G' = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \quad H' = -\frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad g' = -\frac{\cot\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad h' = \frac{b\cot\alpha}{\sin^2\varphi} + k.$$

Folglich ist die Gleichung der Tangentenebene im Punkte x, y, z

10. $$T \equiv \left(\frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}x + k\cot\varphi\right)(\xi - x) - \left(\frac{\cot\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}x - \frac{b\cot\alpha}{\sin^2\varphi} - k\right)(\eta - y)$$
$$- \left(\frac{1}{\sin^2\varphi}x - \frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)(\zeta - z) = 0.$$

Um die Construction der Tangentenebene in einem Punkte P der Geraden

G zu erledigen, genügt es, die Spur derselben auf der durch Q gehenden Normalebene zur Achse anzugeben; und es reicht aus, dabei eine die Gleichung 10. vereinfachende besondere Lage von G vorauszusetzen.

Wir wählen dazu die Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ist $QP = r$, so ist dann

$$x = r\sin\alpha, \quad y = b, \quad z = k\frac{\pi}{2} + r\cos\alpha.$$

Die Gleichung von T wird unter diesen Voraussetzungen

$$r\cos\alpha(\xi - r\sin\alpha) + (b\cot\alpha + k)(\eta - b) - r\sin\alpha\left(\zeta - k\frac{\pi}{2} - r\cos\alpha\right) = 0.$$

Die Gleichung der Spur dieser Ebene auf der durch Q gehenden Horizontalebene erhält man durch die Substitution $\zeta = k\frac{\pi}{2}$; es entsteht

11. $$r\cos\alpha\,\xi + (b\cot\alpha + k)(\eta - b) = 0.$$

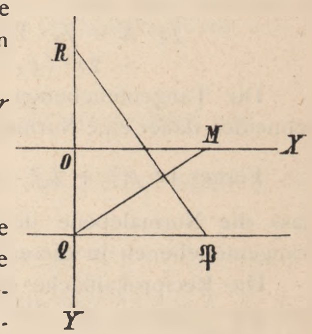
Diese Gerade schneidet von der X-Achse die Strecke ab

$$m = \frac{b(b\cot\alpha + k)}{r\cos\alpha} = \frac{b(b + k\tan\alpha)}{r\sin\alpha} = \frac{b(b + k\tan\alpha)}{x}.$$

Ist $Q\mathfrak{P} = x$, und macht man $OR = k\tan\alpha$, $QM \perp R\mathfrak{P}$, so ist

$$OQ : OM = Q\mathfrak{P} : QR,$$

mithin ist $OM = m$, und daher QM die gesuchte Spur der Tangentenebene auf der durch Q gehenden Horizontalebene.



(M. 488.)

Die Gleichung 11. liefert nur dann ein von r unabhängiges Resultat, wenn

$$b\cot\alpha + k = 0, \quad \tan\alpha = -\frac{b}{k},$$

d. i. wenn die Gerade G die von Q beschriebene Schraubenlinie berührt. Da in diesem Falle die Tangentenebene die Fläche entlang der ganzen Geraden G tangirt, so folgt, dass alsdann die Schraubenfläche abwickelbar ist.

10. Zu den Entwicklungen dieses Abschnittes fügen wir noch folgende Beispiele.

A. Die Gleichung der Fusspunktfläche einer Fläche f, d. i. des Ortes der Fusspunkte der Lothe, die von einem gegebenen Punkte A (Pol) auf die Tangentenebenen von f gefällt werden, wird erhalten, indem man die Gleichung der Fläche f in Ebenencoordinaten für A als Nullpunkt bildet, und in derselben u, v, w durch die Quotienten ersetzt

$$\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Die Fusspunktfläche von $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ für den Nullpunkt als Pol ist

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = 0.$$

Die Fusspunktfläche einer Regelfläche wird durch Bewegung eines veränderlichen Kreises beschrieben.

B. Eine Rotationsfläche entsteht durch Rotation einer Linie um eine Achse. Alle ebenen Schnitte einer Rotationsfläche normal zur Achse sind Kreise (Parallelkreise), welche die Spuren der Achse auf der Schnittebene zu

Centren haben; die ebenen Schnitte, welche die Achse enthalten, sind congruent und heissen **Meridiane**; die Fläche kann durch Rotation eines Meridians erzeugt werden. Wird die Rotationsachse zur Z-Achse gewählt und hat ein Meridian in Bezug auf die Z-Achse und eine durch den Nullpunkt gehende X-Achse die Gleichung $f(z, \mathfrak{x}) = 0$, so ist die Gleichung der Rotationsfläche

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0 .$$

Die Normale einer Rotationsfläche schneidet die Achse; die Normalen sowie die Tangentenebenen der Punkte desselben Parallelkreises gehen je durch denselben Punkt der Achse.

C. Eine Fläche, deren Radienvectoren reciprok den auf derselben Geraden liegenden Radien einer gegebenen Fläche f sind, heisst die **Reciprokalfläche** der Fläche f (in Bezug auf den Nullpunkt als Pol). Aus der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ folgt die Gleichung der Reciprokalfläche zu

$$f\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\right) = 0,$$

wobei P und Π auf demselben Radius liegen.

Bildet man

$$f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi} = f_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + f_y \frac{\partial y}{\partial \xi} + f_z \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \text{u. s. w.}$$

so erkennt man, dass

$$f_\xi \cdot X + f_\eta \cdot Y + f_\zeta \cdot Z = r^2 (f_x \cdot X + f_y \cdot Y + f_z \cdot Z)$$
$$- 2r^2 (f_x \cdot x + f_y \cdot y + f_z \cdot z)(\xi X + \eta Y + \zeta Z).$$

Die Tangentenebenen zweier Reciprokalflächen in entsprechenden Punkten schneiden daher eine Normalebene des Radius dieser Punkte in parallelen Geraden.

Ferner ist $f_\xi{}^2 + f_\eta{}^2 + f_\zeta{}^2 = \frac{1}{\rho^4}(f_x{}^2 + f_y{}^2 + f_z{}^2)$. Hieraus findet man, dass die Normalebene des Radius zweier zusammengehöriger Punkte mit den Tangentenebenen in diesen Punkten entgegengesetzt gleiche Winkel einschliesst.

Die Reciprokalfläche der Fusspunktfläche eines Ellipsoids E — beide Male für das Centrum als Pol — ist ein coaxiales Ellipsoid, dessen Achsen den gleichgerichteten Achsen von E reciprok sind.

§ 7. Höhere Differentialquotienten.

1. Mit Rücksicht auf weitere Differentiationen wird der Differentialquotient einer Function y einer Variabeln als der **erste Differentialquotient** von y bezeichnet.

Unter dem zweiten Differentialquotienten von y versteht man den Differentialquotienten des ersten Differentialquotienten; unter dem dritten Differentialquotienten versteht man den Differentialquotienten des zweiten Differentialquotienten u. s. w., allgemein unter dem $n$ten Differentialquotienten den Differentialquotienten des $(n-1)$ten Differentialquotienten. Aus dieser Definition folgt sofort, dass der $n$te Differentialquotient des $m$ten Differentialquotienten von y gleich ist dem $(n+m)$ten Differentialquotienten von y. Den 2ten, 3ten, 4ten, . . . $n$ten Differentialquotienten von y bezeichnet man mit y'', y''', y'''', . . . $y^{(n)}$; man hat daher

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx}, \ldots y^n = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

$$(y^{(n)})^{(m)} = y^{(n+m)}.$$

$$dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dy'' = y'''dx \ldots\ldots$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung

$$dy = y'dx$$

differenzirt und dabei dx als constanten Faktor ansieht, so erhält man

$$d(dy) = dy' \cdot dx;$$

in Folge der Gleichung $dy' = y''dx$ entsteht hieraus

$$d(dy) = y''dx^2.$$

Statt des unbequemen Zeichens $d(dy)$ setzt man das kürzere d^2y,*) wobei ausdrücklich zu bemerken ist, dass dieses Zeichen die Voraussetzung enthält, dass bei der zweiten Differentiation der von der ersten herrührende Faktor dx als constant betrachtet werden soll. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

Diese Darstellungsweise lässt sich auf beliebig hohe Differentialquotienten ausdehnen. Versteht man unter d^ny den Ausdruck, den man erhält, wenn man y differenzirt, das Resultat wieder differenzirt und diese Differentiationen so oft wiederholt, bis man im Ganzen n ausgeführt hat, und bei allen diesen Differentiationen dx als constanten Faktor behandelt, so ist

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Denn nimmt man an, diese Formel gelte für einen bestimmten Werth von n, so hat man zunächst nach der Voraussetzung

$$d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

durch Differentiation ergiebt sich hieraus, wenn dabei dx als constant gilt

$$d(d^ny) = dy^{(n)} \cdot dx^n.$$

Wenn man hierin $dy^{(n)} = y^{(n+1)}dx$ substituirt, und $d(d^ny)$ durch $d^{n+1}y$ ersetzt, so ergiebt sich

$$d^{n+1}y = y^{(n+1)}dx^{n+1}, \quad \text{also} \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = y^{(n+1)}.$$

Da nun die Formel für $n = 2$ erwiesen ist, so gilt sie auch für $n = 3, 4, 5$ . . überhaupt für jeden Werth von n.

Diese Bezeichnung höherer Differentialquotienten einer Veränderlichen wird am häufigsten angewendet.

2. **Höhere Differentialquotienten einer Potenz.** Durch successive Differentiation erhält man leicht

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2(x^m)}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3(x^m)}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$\frac{d^k(x^m)}{dx^k} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so kommt man endlich auf

$$\frac{d^m(x^m)}{dx^m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Da der $m$te Differentialquotient von x unabhängig ist, so folgt, dass der $(m+1)$te, sowie alle höheren verschwinden.

3. **Höhere Differentialquotienten des Logarithmus.**

Aus $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$ folgt $\frac{d^nlx}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}$, also hat man durch Anwendung des in No. 2 Gefundenen

*) Die hochgestellte 2 hinter dem Zeichen d ist hier ein Wiederholungszeichen; Verwechselung mit einem Potenzexponenten ist nicht zu befürchten.

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,x^{-n}.$$

4. Höhere Differentialquotienten der Exponentialgrösse.

Da $\frac{de^x}{dx} = e^x$, so folgt

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

Die Exponentialgrösse e^x hat also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Differentialquotienten der Function gleich ist.

5. Höhere Differentialquotienten von $sin x$ und $cos x$. Man hat

$$\frac{d\,sin\,x}{dx} = cos\,x, \qquad \frac{d\,cos\,x}{dx} = -sin\,x, \quad \text{und daher}$$

$$\frac{d^2 sin\,x}{dx^2} = -sin\,x, \qquad \frac{d^2 cos\,x}{dx^2} = -cos\,x,$$

$$\frac{d^3 sin\,x}{dx^3} = -cos\,x, \qquad \frac{d^3 cos\,x}{dx^3} = sin\,x,$$

$$\frac{d^4 sin\,x}{dx^4} = sin\,x. \qquad \frac{d^4 cos\,x}{dx^4} = cos\,x.$$

Somit ist man beim vierten Differentialquotienten wieder zur ursprünglichen Function zurückgekehrt. Man erkennt hieraus folgende Regel: Um den $n$ten Differentialquotienten von $sin x$ und $cos x$ zu erhalten, dividire man n durch 4; je nachdem der Divisionsrest ρ die Werthe hat

$$\rho = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0,$$

ist

$$\frac{d^n sin\,x}{dx^n} = cos\,x, \quad -sin\,x, \quad -cos\,x, \quad sin\,x,$$

$$\frac{d^n cos\,x}{dx^n} = -sin\,x, \quad -cos\,x, \quad sin\,x, \quad cos\,x.$$

Man kann diese Regel in die Formeln zusammenfassen

$$\frac{d^n sin\,x}{dx^n} = sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x\right), \qquad \frac{d^n cos\,x}{dx^n} = cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x\right).$$

6. Höhere Differentialquotienten von $tang\,x$.

Man hat zunächst

$$\frac{d\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tang^2 x.$$

Daher ist weiter

$$\frac{d^2 tang\,x}{dx^2} = 2\,tang\,x\,(1 + tang^2 x) = 2\,tang\,x + 2\,tang^3 x,$$

$$\frac{d^3 tang\,x}{dx^3} = (2 + 2\cdot 3\,tang^2 x)(1 + tang^2 x) = 2 + 8\,tang^2 x + 6\,tang^4 x,$$

$$\frac{d^4 tang\,x}{dx^5} = (8\cdot 2\,tang\,x + 6\cdot 4\,tang^3 x)(1 + tang^2 x)$$
$$= 16\,tang\,x + 40\,tang^3 x + 24\,tang^5 x,$$

$$\frac{d^5 tang\,x}{dx^5} = (16 + 40\cdot 3\,tang^2 x + 24\cdot 5\,tang^4 x)(1 + tang^2 x)$$
$$= 16 + 136\,tang^2 x + 240\,tang^4 x + 120\,tang^6 x.$$

Auf diesem Wege kann man beliebig weit vorwärts gehen; freilich erhält man keinen Aufschluss über das Bildungsgesetz der Zahlenfaktoren, und findet einen höheren Differentialquotienten der Tangente nur, nachdem man alle niederen nach einander berechnet hat.

In Bezug auf die höheren Differentialquotienten der cyklometrischen Functionen verweisen wir auf spätere Entwicklungen.

7. Wir wollen nun zeigen, wie man den $n$ten Differentialquotienten eines Produktes uv zweier Functionen von x aus den Differentialquotienten von u und v berechnet. Durch wiederholte Differentiation hat man zunächst

$$\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2 uv}{dx^2} = u\frac{d^2 v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2}v,$$

$$\frac{d^3 uv}{dx^3} = u\frac{d^3 v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2 v}{dx^2} + 3\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^3 u}{dx^3}\cdot v,$$

$$\frac{d^4 uv}{dx^4} = u\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^3 v}{dx^3} + 6\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^2 v}{dx^2} + 4\frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{d^4 u}{dx^4}\cdot v.$$

Diese Entwicklungen entsprechen der allgemeinen Formel

$$1.\quad \frac{d^n uv}{dx^n} = u\frac{d^n v}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \binom{n}{3}\frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \cdots,$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

Um die unbeschränkte Gültigkeit derselben nachzuweisen, nehmen wir an, sie gelte für einen bestimmten Werth von n und entwickeln daraus den nächst höheren Differentialquotienten; wir erhalten

$$\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}} = \left(u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \frac{du}{dx}\frac{d^n v}{dx^n}\right) + \binom{n}{1}\left(\frac{du}{dx}\frac{d^n v}{dx^n} + \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}\right)$$
$$+ \binom{n}{2}\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}\right) + \cdots\cdots$$
$$= u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \left[1 + \binom{n}{1}\right]\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^n v}{dx^n} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}$$
$$+ \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right]\frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \left[\binom{n}{3} + \binom{n}{4}\right]\frac{d^4 u}{dx^4}\cdot\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \cdots$$

Da nun bekanntlich

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

so hat man

$$\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}} = u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \binom{n+1}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^n v}{dx^n} + \binom{n+1}{2}\frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots$$

Gilt also die Formel 1. für einen bestimmten Werth von n, so gilt sie auch für den nächst höheren; da sie bereits für $n = 2, 3, 4$ erwiesen ist, so folgt, dass sie für jeden Werth von n gültig ist.

8. Wir wenden dies an, um den $n$ten Differentialquotienten von $arc\,tang\,x$, $arc\,sin\,x$ und $(arc\,sin\,x)^2$ für den besonderen Werth $x = 0$ zu erhalten.

A. Aus der Gleichung

$$\frac{d\,arc\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

folgt

$$(1 + x^2)\frac{d\,arc\,tang\,x}{dx} - 1 = 0.$$

Bildet man den $(n-1)$ten Differentialquotienten der linken Seite, so erhält man

$$(1+x^2)\frac{d^n arc\,tang\,x}{dx^n} + 2(n-1)x\cdot\frac{d^{n-1}arc\,tang\,x}{dx^{n-1}} + (n-1)(n-2)\frac{d^{n-2}arc\,tang\,x}{dx^{n-2}} = 0.$$

Daher hat man die Gleichung

$$\frac{d^n \operatorname{arc\,tang} x}{dx^n} = -\frac{n-1}{1+x^2}\left[2x\frac{d^{n-1}\operatorname{arc\,tang} x}{dx^{n-1}} + (n-2)\frac{d^{n-2}\operatorname{arc\,tang} x}{dx^{n-2}}\right].$$

Wenn man den Werth, den ein Differentialquotient für $x = 0$ hat, durch

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc\,tang} x}{dx^n}\right)_0$$

bezeichnet, so findet man

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc\,tang} x}{dx^n}\right)_0 = -(n-1)(n-2)\left(\frac{d^{n-2}\operatorname{arc\,tang} x}{dx^{n-2}}\right)_0.$$

Da nun

$$\left(\frac{d \operatorname{arc\,tang} x}{dx}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 \operatorname{arc\,tang} x}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $\operatorname{arc\,tang} x$ für ein gerades n und für $x = 0$ verschwindet, während für ein ungerades n

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc\,tang} x}{dx^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1).$$

B. Aus der Formel

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

folgt zunächst

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d \arcsin x}{dx} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich durch erneute Differentiation

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d \arcsin x}{dx} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2 \arcsin x}{dx^2} = 0,$$

und mithin

$$(1-x^2)\frac{d^2 \arcsin x}{dx^2} - x\frac{d \arcsin x}{dx} = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung $(n-2)$mal, so erhält man

$$(1-x^2)\frac{d^n \arcsin x}{dx^n} - 2(n-2)x\frac{d^{n-1}\arcsin x}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\frac{d^{n-2}\arcsin x}{dx^{n-2}}$$
$$- x\frac{d^{n-1}\arcsin x}{dx^{n-1}} - (n-2)\frac{d^{n-2}\arcsin x}{dx^{n-2}} = 0,$$

oder zusammengerechnet

$$(1-x^2)\frac{d^n \arcsin x}{dx^n} - (2n-3)x\frac{d^{n-1}\arcsin x}{dx^{n-1}} - (n-2)^2\frac{d^{n-2}\arcsin x}{dx^{n-2}} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, wie man den $n$ten Differentialquotienten von $\arcsin x$ aus den beiden nächst niederen ableitet. Für $x = 0$ hat man insbesondere

$$\left(\frac{d^n \arcsin x}{dx^n}\right)_0 = (n-2)^2\,\frac{d^{n-2}\arcsin x}{dx^{n-2}}.$$

Da nun bekanntlich

$$\left(\frac{d \arcsin x}{dx}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 \arcsin x}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $\arcsin x$ für $x = 0$ und für ein gerades n verschwindet, während man für ein ungerades n hat

$$\left(\frac{d^n \arcsin x}{dx^n}\right)_0 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \ldots (n-2)^2.$$

C. Setzt man $u = (\arcsin x)^2$, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = 2u,$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{folglich}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} = 2.$$

Wird hiervon der $(n-2)$te Differentialquotient gebildet, so erhält man

$$(1-x^2)\frac{d^nu}{dx^n} - 2(n-2)x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} - x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - (n-2)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} = 0.$$

Hieraus folgt zur Berechnung von $d^nu : dx^n$ aus den vorhergehenden Differentialquotienten

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{1}{1-x^2}\left[(2n-3)x\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + (n-2)^2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\right].$$

Insbesondere erhält man

$$\left(\frac{d^n(\arcsin x)^2}{dx^n}\right)_0 = (n-2)^2\left(\frac{d^{n-2}(\arcsin x)^2}{dx^{n-2}}\right)_0.$$

Da nun, wie aus den ersten Formeln leicht sich ergiebt

$$\left(\frac{d(\arcsin x)^2}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2(\arcsin x)^2}{dx^2}\right)_0 = 2,$$

so folgt, dass der $n$te Differentialquotient von $(\arcsin x)^2$ für $x = 0$ und für jedes ungerade n verschwindet, während für jedes gerade n, das grösser als 2 ist, die Formel gilt

$$\left(\frac{d^n(\arcsin x)^2}{dx^n}\right)_0 = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \ldots (n-2)^2.$$

9. Höhere Differentialquotienten einer Function von einer Function.

Ist $y = F(u)$ und $u = \varphi(x)$, so erhält man durch wiederholte Differentiation zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{du}u',$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{du}u'' + \frac{d^2F}{du^2} \cdot u'^2,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dF}{du}u''' + 3\frac{d^2F}{du^2}u'u'' + \frac{d^3F}{du^3}u'^3,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dF}{du}u'''' + \frac{d^2F}{du^2}(4u'u''' + 3u''^2) + 6\frac{d^3F}{du^3}u'^2u'' + \frac{d^4F}{du^4}u'^4.$$

Hiernach übersieht man, dass allgemein

1. $$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dF}{du} \cdot X_1 + \frac{d^2F}{du^2}X_2 + \frac{d^3F}{du^3}X_3 + \ldots + \frac{d^nF}{du^n}X_n,$$

worin die X_k Functionen von x sind, die nicht von der besonderen Art der Function F abhängen. Man kann daher diese X_k ermitteln, indem man in Formel 1. die Function F specialisirt. Setzt man $F(u) = u^n$, so erhält man

$$\frac{d(u^n)}{dx^n} = nu^{n-1}X_1 + n(n-1)u^{n-2}X_2 + n(n-1)(n-2)u^{n-3}X_3 + \ldots,$$

wofür wir setzen wollen

2. $$\frac{d(u^n)}{dx^n} = \binom{n}{1}u^{n-1}U_1 + \binom{n}{2}u^{n-2}U_2 + \binom{n}{3}u^{n-3}U_3 + \ldots + U_n,$$

so dass nun U_1, U_2, U_3 . . zu bestimmen sind. Um die links angedeutete Differentiation auszuführen, bemerken wir zunächst, dass, wenn z und t von einander unabhängig sind, und $z + t = w$ gesetzt wird, die Gleichung gilt

$$\frac{d^n\psi(w)}{d^nw} = \frac{d^n\psi(z+t)}{dt^n}.$$

Setzt man für w einen besonderen Werth W, so ist es gleichgültig, ob man erst $\psi(w)$ nach w $n$mal differenzirt und dann w durch W ersetzt, oder ob man $\psi(W)$ in Bezug auf W differenzirt. Wählt man insbesondere $W = z$, also $t = 0$, so erhält man

$$3. \qquad \frac{d^n \psi(z)}{dz^n} = \left[\frac{d^n \psi(z+t)}{dt^n}\right]_0,$$

wobei rechts durch die angehängte Null ausgedrückt werden soll, dass man nach geschehener Differentiation $t = 0$ zu setzen hat. Insbesondere ist also

$$4. \qquad \frac{d^n(u^n)}{dx^n} = \left[\frac{d^n[\varphi(x+t)]^n}{dt^n}\right]_0.$$

Rechts benutzen wir die Identität

$$\varphi(x+t) = u + \varphi(x+t) - \varphi(x) = u + \Phi,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Phi = \varphi(x+t) - \varphi(x).$$

Hiernach ergiebt sich

$$[\varphi(x+t)]^n = u^n + \binom{n}{1} u^{n-1}\Phi + \binom{n}{2} u^{n-2}\Phi^2 + \ldots + \Phi^n,$$

und daher durch Differentiation nach t

$$\frac{d^n[\varphi(x+t)]^n}{dt^n} = \binom{n}{1} u^{n-1} \frac{d^n\Phi}{dt^n} + \binom{n}{2} u^{n-2} \frac{d^n\Phi^2}{dt^n} + \ldots + \frac{d^n\Phi^n}{dt^n}.$$

Daher ist in Rücksicht auf 3.

$$5. \qquad \frac{d^n u^n}{dx^n} = \binom{n}{1} u^{n-1} \left(\frac{d^n\Phi}{dt^n}\right)_0 + \binom{n}{2} u^{n-2} \left(\frac{d^n\Phi^2}{dt^n}\right)_0 + \binom{n}{3} u^{n-3} \left(\frac{d^n\Phi^3}{dt^n}\right)_0 + \ldots$$

Vergleicht man dies mit 2. und setzt für Φ den Werth zurück, so erhält man für die gesuchte Function U_k den Werth

$$6. \qquad U_k = \left[\frac{d^n[\varphi(x+t) - \varphi(x)]^k}{dt^n}\right]_0.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Satze, und beachtet, dass nach 3.

$$\left(\frac{d^n \varphi(x+t)^r}{dt^n}\right)_0 = \frac{d^n \varphi(x)^r}{dx^n},$$

so erhält man

$$7. \qquad U_k = \frac{d^n u^k}{dx^n} - \binom{k}{1} u \cdot \frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \binom{k}{2} u^2 \frac{d^n u^{k-2}}{dx^n} - \ldots \pm \binom{k}{k-1} u^{k-1} \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Insbesondere erhält man aus 6. oder 7.

$$U_1 = \frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_2 = \frac{d^n u^2}{dx^n} - 2u\frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_3 = \frac{d^n u^3}{dx^n} - 3u\frac{d^n u^2}{dx^n} + 3u^2 \frac{d^n u}{dx^n},$$

$$U_4 = \frac{d^n u^4}{dx^n} - 4u \frac{d_n u^3}{dx^n} + 6u^2 \frac{d^n u^2}{dx^n} - 4u^3 \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Die ursprünglich gestellte Aufgabe ist hiernach auf die einfachere zurückgeführt: Die $n$ten Differentialquotienten der Potenzen von u von der ersten bis zur $n$ten zu bestimmen; mit Hülfe dieser Werthe gewinnt man die Functionen U_k*) und hat schliesslich (1)

$$8. \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = U_1 \frac{dF(u)}{du} + \frac{U_2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2F(u)}{du^2} + \frac{U_3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3F(u)}{du^3} + \ldots + \frac{U_n}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{d^nF(u)}{du^n}.$$

Betreffs der Anwendungen dieser Formel begnügen wir uns hier mit einem Beispiele.

Für $u = x^2$ hat man

$$\varphi(x+t) - \varphi(x) = t(2x+t),$$

und daher

*) Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten, Leipzig 1845. Schlömilch, Compendium der höhern Analysis. 3. Aufl. Braunschweig. Bd. 2, pag. 1.

$$U_k = \left[\frac{d^n t^k (2x+t)^k}{dx^n}\right]_0.$$

Wendet man rechts die Regel für den Differentialquotient eines Produkts an (No. 7), so verschwinden durch die Substitution $t = 0$ die ersten k Glieder, weil sie eine Potenz von t zum Faktor haben, und es bleibt nur das $(k+1)$te Glied. Man erhält

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots k} U_k = \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}(2x+t)^k}{dx^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{n-k} (n-k)!\,(2x)^{2k-n}.$$

Auch dieses verschwindet, sobald $k < \frac{n}{2}$. Der Zahlenfaktor ergiebt

$$\binom{n}{k}\binom{k}{n-k}(n-k)! = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (2k-n)}.$$

Folglich ist der gesuchte Differentialquotient, wenn man die Reihenfolge der Glieder in 8. umkehrt

$$\frac{d^n F(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \frac{d^n F(u)}{du^n} + \frac{n(n-1)}{1} \cdot (2x)^{n-2} \frac{d^{n-1}F(u)}{du^{n-1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} (2x)^{n-4} \frac{d^{n-2}F(u)}{du^{n-2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} (2x)^{n-6} \frac{d^{n-3}F(u)}{du^{n-2}} + \ldots.$$

Setzt man insbesondere $F(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$, so hat man

$$\frac{d^m F(u)}{du^m} = d^m\left(\frac{1}{1+u}\right) : du^m = d^m(1+u)^{-1} : d(1+u)^m = (-1)^m m!\,(1+u)^{-m-1}.$$

Beachtet man ferner, dass

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d\,arc\,tang\,x}{dx},$$

so folgt schliesslich

$$\frac{d^{n+1} arc\,tang\,x}{dx^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{1+x^2} \left\{\frac{(2x)^n}{(1+x^2)^n} - \binom{n-1}{1} \frac{(2x)^{n-2}}{(1+x^2)^{n-1}} + \binom{n-2}{2} \frac{(2x)^{n-4}}{(1+x^2)^{n-2}}\right.$$
$$\left. - \binom{n-3}{3} \frac{(2x)^{n-6}}{(1+x^2)^{n-3}} + \binom{n-4}{4} \frac{(2x)^{n-8}}{(1+x^2)^{n-4}} - \ldots\right\}.$$

10. Die Entwicklungen des vorigen Abschnitts lassen sich noch unter einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

In Gleichung 8. ist in einer Function F die unabhängige Veränderliche u durch eine neue Unabhängige x gemäss der Gleichung $u = \varphi(x)$ ersetzt, und die Gleichung lehrt, die Differentialquotienten von $y = F[\varphi(x)]$ in Bezug auf die neue Unabhängige x aus den Differentialquotienten von $F(u)$ in Bezug auf u und aus den Differentialquotienten von $u = \varphi(x)$ in Bezug auf x zu finden. Stellt man die Gleichungen 8. für $n = 1, 2, 3 \ldots n$ auf, so erhält man n Gleichungen, welche die Grössen

$$\frac{dF(u)}{du}, \quad \frac{d^2F(u)}{du^2}, \quad \frac{d^3F(u)}{du^3}, \quad \frac{d^4F(u)}{du^4}, \quad \ldots \quad \frac{d^nF(u)}{du^n}$$

linear enthalten. Aus diesen Gleichungen kann man diese Grössen berechnen, und erhält sie dann ausgedrückt durch die Differentialquotienten von F in Bezug auf die neue Unabhängige x und durch die Differentialquotienten von $\varphi(x)$.

Die Auflösungen des genannten Systems sind somit die zur **Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen** nöthigen Formeln.

Wir müssen es uns versagen, diese Formeln in aller Allgemeinheit zu entwickeln und begnügen uns, die ersten vier Differentialquotienten anzugeben*).

*) Wegen der vollständigen Formeln vergl. Schlömilch, Compendium, Bd. 2, pag. 16.

Man erhält durch successive Auflösung der ersten Formeln des vorigen Abschnitts, wenn man $F[\varphi(x)]$ mit y bezeichnet

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{y'}{u'},$$

$$\frac{d^2F(u)}{du^2} = \frac{u'y'' - u''y'}{u'^3},$$

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} = \frac{u'^2y''' + 3u'u''y'' - (u'u''' - 3u''^2)y'}{u'^5},$$

$$\frac{d^4F(u)}{du^4} = \frac{1}{u'^7}[u'^3y'''' - 6u'^2u''y''' - (4u'^2u''' + 21u''^2u')y'' - (u'^2u'''' - 10u'u''u''' + 15u''^3)y'].$$

---

11. Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Ist z eine Function mehrerer Variabeln $x, y \dots .$

$$z = f(x, y \dots .),$$

und bildet man den partialen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

und hiervon den partialen Differentialquotienten nach einer andern Variabeln y,

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) : \partial y,$$

so wird das Resultat mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

bezeichnet, so dass man die definirende Formel hat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\,^{*)}.$$

Allgemeiner definirt man

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma\dots} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial t^\gamma \dots} = \dots \frac{\partial^\gamma}{dt^\gamma} \cdot \frac{\partial^\beta}{dy^\beta} \cdot \frac{\partial^\alpha z}{\partial x^\alpha}.$$

Für diese höheren partialen Differentialquotienten gilt der Satz: Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Differentiationen vorgenommen werden. Wir beweisen dies zunächst für zwei partiale Differentiationen. Man hat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta x}, \quad \text{und daher}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lim \left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y + \Delta y, \dots)}{\Delta x} - \frac{f(x + \Delta x, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{\Delta x}\right] : \Delta y,$$

wobei sich das Zeichen *lim* in der letzten Formel auf das Verschwinden von Δy und Δx bezieht. Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y + \Delta y, \dots) - f(x + \Delta x, y \dots) + f(x, y, \dots)}{\Delta x \Delta y}.$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x + \Delta x, y \dots) - f(x, y + \Delta y, \dots) + f(x, y, \dots)}{\Delta y \Delta x}.$$

---

*) Um typographisch unbequeme Formen zu vermeiden, schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x} U \text{ für } \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U \text{ für } \frac{d^2 U}{\partial x\, dy} \text{ u. s. w.}$$

Aus der Identität dieser Ausdrücke folgt

1. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Ist z eine Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, so hat man

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^i}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1} \partial x_{i+2}} \frac{\partial^{n-i-2} z}{\partial x_{i+3} \dots \partial x_n}$$

und daher nach 3.

$$= \frac{\partial^i}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i+2} \partial x_{i+1}} \frac{\partial^{n-i-2} z}{\partial x_{i+3} \dots \partial x_n}$$

$$= \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_i \partial x_{i+2} \partial x_{i+1} \partial x_{i+3} \dots \partial x_n}.$$

Man kann daher bei n Differentiationen irgend zwei auf einander folgende vertauschen. Da nun durch wiederholte Vertauschung benachbarter Elemente aus einer Reihe von Elementen jede Permutation derselben hervorgebracht werden kann, so folgt die allgemeine Geltung des behaupteten Satzes.

12. Ist y eine Function dreier Grössen u, v, w, die ihrerseits wieder Functionen einer Variabeln x sind,

$$y = f(u, v, w),$$

$$u = \varphi_1(x), \quad v = \varphi_2(x), \quad w = \varphi_3(x),$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v' + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot w',$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial u} u'' + \frac{\partial f}{\partial v} v'' + \frac{\partial f}{\partial w} w'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} w'\right) u'$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} w'\right) v' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} u' + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} w'\right) w'$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u} u'' + \frac{\partial f}{\partial v} v'' + \frac{\partial f}{\partial w} w''$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot u'v' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} u'w' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} v'w' + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} w'^2.$$

Indem man auf jedes Glied dieses Ausdruckes die Regel für die Differentiation eines Produktes anwendet und die Glieder des Resultates geeignet ordnet und zusammenrechnet, gewinnt man weiter den dritten und höhere Differentialquotienten; man wird auch die Formel leicht auf Fälle ausdehnen, wo y als Function von mehr als drei Grössen erscheint, die Functionen derselben Unabhängigen x sind.

13. Ist z eine Function zweier unabhängigen Veränderlichen x und y, so ist das totale Differential von z

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Dies ist der verschwindend kleine Zuwachs, den z erhält, wenn x und y um die verschwindend kleinen Beträge dx und dy wachsen; dx und dy sind unabhängig von einander, sowie unabhängig von x und y. Somit ist dz eine Function von x und y und zwar sind dieselben nur in $\partial z : \partial x$ und in $\partial z : \partial y$ enthalten.

Das totale Differential von dz bezeichnet man als das zweite totale Differential $d^2 z$; das totale Differential von $d^2 z$ als das dritte totale Differential $d^3 z$ u. s. w., und setzt dabei voraus, dass bei allen diesen Differentiationen dx und dy unverändert dieselben bleiben. Man hat hiernach

$$d^2z = \frac{\partial dz}{\partial x}dx + \frac{\partial dz}{\partial y}dy,$$

1. $$d^3z = \frac{\partial d^2z}{\partial x}dx + \frac{\partial d^2z}{\partial y}dy,$$

$$d^4z = \frac{\partial d^3z}{\partial x}dx + \frac{\partial d^3z}{\partial y}dy, \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man der Reihe nach rechts die Werthe für dz, d^2z, d^3z . . ein, so erhält man zunächst

$$d^2z = dx\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Führt man die angedeuteten Differentiationen der Klammerausdrücke aus, so erhält man formal ganz dasselbe, als wenn man die Klammern mit den davorstehenden Faktoren multiplicirt hätte, wenn man nur dabei dx, dy, ∂x, ∂y, wie sich von selbst versteht, als einfache Faktoren behandelt. Daher ist d^2z formal darzustellen durch

2. $$d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Man schreibt in einer sofort verständlichen Symbolik

$$dx\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + dy\frac{\partial U}{\partial y} = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)U.$$

Wendet man dies an, so erhält d^2z die einfache symbolische Darstellung

3. $$d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z.$$

Hier hat man die zweite Potenz des Klammerinhalts nach den gewöhnlichen Regeln auszurechnen und dann im Zähler jedes Gliedes hinter ∂^2 das Zeichen z zu stellen, so dass man also erhält

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Verwendet man den Werth 3. zur Bildung von

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)d^2z,$$

so erhält man

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dx\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z.$$

Das Resultat der neu hinzutretenden Differentiation, die durch den vorderen Klammerausdruck symbolisch dargestellt ist, ist formal identisch mit einer Multiplication durch diesen Klammerinhalt, und man erhält daher

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z.$$

So fortschliessend, erlangt man die allgemeine Formel

4. $$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

Für das höhere totale Differential einer Function von mehreren unabhängigen Variabeln

$$z = f(x_1, x_2, x_3 \,.\,.\, x_r)$$

erhält man in gleicher Weise ohne Schwierigkeit

5. $$d^nz = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \,.\,.\, + dx_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n z.$$

14. Höhere Differentialquotienten einer unentwickelten Function.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, dass der Zusammenhang einer Function y mit der unabhängigen Variabeln x durch die Gleichung gegeben ist

1. $$f(x, y) = 0.$$

Den ersten Differentialquotienten von y gewinnt man aus der Gleichung

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Denken wir uns aus den Gleichungen 1. und 2. y eliminirt, so erhalten wir y' als Function von x allein; führen wir diesen Werth in 2. ein, so wird 2. identisch erfüllt. Differenzirt man 2. unter der Voraussetzung, dass y' durch x allein ausgedrückt ist, so entsteht die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot y'^2\right) = 0,$$

oder besser

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'' = 0.$$

Setzt man hier den Werth $y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ ein, so erhält man

4. $$y'' = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3.$$

Indem man noch rechts y durch x ausdrückt, erhält man y'' als Function von x allein.

Für den dritten Differentialquotienten von y erhält man durch Differentiation von 3. die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\cdot y'\right) + \left(2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y' + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot y''\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'y'' + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial y}y''' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'y''\right) = 0,$$

oder kürzer

5. $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\cdot y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3$$
$$+ 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'' + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'y'' + \frac{\partial f}{\partial y}y''' = 0.$$

So fortfahrend, erlangt man n Gleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von f mit den n Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$$

verknüpfen, aus denen man dieselben durch successive Elimination gewinnt.

§ 8. Krümmung ebener Curven.

1. Wenn zwei Curven, die in Bezug auf rechtwinkelige Coordinaten die Gleichungen haben $y = f(x)$ und $y = F(x)$, einen gemeinsamen Punkt P enthalten, und wenn in diesem Punkte auch die Differentialquotienten

$$f', \; f'', \; f''', \ldots f^{(n)}$$

der Reihe nach den Differentialquotienten gleich sind

$$F', \; F'', \; F''', \ldots F^{(n)},$$

so sagt man: Die beiden Curven haben in diesem Punkte P eine Berührung $n$ter Ordnung. Aus dieser Definition folgt sofort: Wenn zwei Curven C_1 und C_2 mit einer Curve C_3 in demselben Punkte P eine Berührung $n$ter

Ordnung haben, so haben C_1 und C_2 in P unter sich eine Berührung von $n$ter oder höherer Ordnung.

Wir zeigen zunächst, dass die Eigenschaft zweier Curven, in einem Punkte eine Berührung $n$ter Ordnung zu haben, vom Coordinatensysteme nicht abhängt.

Geht man vom ursprünglichen Systeme x, y zu neuen irgend wie definirten Coordinaten u, v über, und sind die neuen mit den alten durch die Gleichungen verbunden

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \Phi(x, y),$$

so erhält man durch Differentiation

$$dv = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'\right) dx, \quad du = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right) dx,$$

und hieraus durch Division

$$v' = \frac{dv}{du} = \Phi_1(x, y, y').$$

Weiter erhält man

$$dv' = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'} \cdot y''\right) dx;$$

Dividirt man durch du, so entsteht ein Resultat von der Form

$$v'' = \Phi_2(x, y, y', y'').$$

So weiter schliessend, erkennt man, dass

$$\frac{d^n v}{du^n} = \Phi_n(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}),$$

dass also die ersten n Differentialquotienten von v in Bezug auf u Functionen von x, y und den ersten n Differentialquotienten von y in Bezug auf x sind; in Bezug auf $y', y'' \ldots$ sind diese Functionen algebraisch rational. Wenn daher für einen gemeinsamen Punkt zweier Curven die ersten n Differentialquotienten $y, y', y'', y''' \ldots y^{(n)}$ dieselben Werthe haben, so haben auch für diesen Punkt die Differentialquotienten $v', v'', v''' \ldots v^{(n)}$ dieselben Werthe.

2. Eine Gerade, die den Punkt x, y einer Curve $y = f(x)$ enthält, hat eine Gleichung von der Form

$$\eta - y = m(\xi - x).$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = m.$$

Für die Curve ist im Punkte x, y

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

die Gerade hat mit der Curve in P eine Berührung erster Ordnung, wenn $m = f'(x)$; die Gleichung der Geraden, welche in P mit der Curve eine Berührung erster Ordnung hat, ist daher

$$\eta - y - f'(x)(\xi - x) = 0.$$

Da dies die Gleichung der Curventangente im Punkte P ist, so folgt: Die Tangente einer Curve hat mit der Curve eine Berührung erster Ordnung.

Der erste Differentialquotient y' einer Geraden ist für alle Punkte constant; mithin verschwinden der zweite und alle höheren Differentialquotienten. Wir sehen daher: Wenn für einen Punkt P_1 einer Curve der zweite Differentialquotient y'' verschwindet, so hat die Curve mit der Tangente in P eine Berührung zweiter Ordnung. Die Curvenpunkte, für welche y'' verschwindet, y''' aber nicht verschwindet, heissen Wendepunkte (oder Inflexionspunkte), die

Tangenten in diesen Punkten heissen Wendetangenten. Verschwindet ausser dem zweiten noch der dritte Differentialquotient, so heisst der Punkt ein stationärer Punkt, die Curve und die Tangente in diesem Punkte haben eine Berührung dritter Ordnung. Für die Sinuscurve ist

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x = -y.$$

Daher sieht man, dass die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenachse Wendepunkte sind.

Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse für den Mittelpunkt der Ellipse als Pol ist bekanntlich (§ 5, No. 12)

1. $$a^2 x^2 + b^2 y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

2. $$a^2 x + b^2 y y' - 2(x^2 + y^2)(x + yy') = 0,$$

3. $$a^2 + b^2 y'^2 + b^2 y y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y'^2 + yy'') - 4(x + yy')^2 = 0.$$

Aus 2. ergiebt sich

4. $$y' = -\frac{(a^2 - 2r^2)x}{(b^2 - 2r^2)y}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Aus 3. ergiebt sich, dass y'' unter der Bedingung verschwindet

5. $$4(x + yy')^2 + 2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2 y'^2) = 0.$$

Aus 4. erhält man

$$x + yy' = \frac{x(b^2 - a^2)}{b^2 - 2r^2},$$

$$2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2 y'^2) = 2r^2 - a^2 + (2r^2 - b^2)y'^2$$
$$= \frac{(2r^2 - a^2)}{(2r^2 - b^2)y^2}[(2r^2 - b^2)y^2 + (2r^2 - a^2)x^2] = \frac{2r^2 - a^2}{(2r^2 - b^2)y^2} \cdot r^4.$$

Die Gleichung 5. liefert daher nach Beseitigung der Nenner

6. $$4x^2y^2(a^2 - b^2)^2 + (2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)r^4 = 0.$$

Führt man die zweite Multiplication aus und beachtet, dass

$$4r^4 - 2r^2a^2 - 2r^2b^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2) - 2r^2a^2 - 2r^2b^2 = 2(a^2 - b^2)(x^2 - y^2),$$

so erhält man aus 6.

$$2(a^2 - b^2)[2x^2y^2(a^2 - b^2) + r^4(x^2 - y^2)] + a^2b^2r^4 = 0.$$

Ersetzt man in der Klammer r^4 durch $a^2x^2 + b^2y^2$, und führt die Multiplicationen aus, so erkennt man, dass der Klammerinhalt $r^2(a^2x^2 - b^2y^2)$ ergiebt; daher findet man schliesslich für die Wendepunkte

7. $$a^2x^2 - b^2y^2 = -\frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)} \cdot r^2.$$

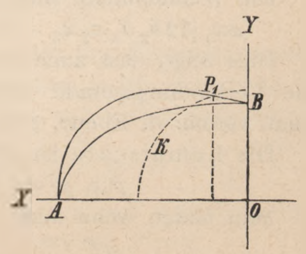
Aus 1. und 7. erhält man

8. $$x^2 = \frac{1}{2a^2}\left(r^2 - \frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)}\right)r^2, \quad y^2 = \frac{1}{2b^2}\left(r^2 + \frac{a^2b^2}{2(a^2 - b^2)}\right)r^2.$$

Durch Addition dieser beiden Werthe ergiebt sich

$$r^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2 + b^2)}, \quad x^2 = \frac{3a^2b^4(a^2 - 2b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)},$$

$$y^2 = \frac{3a^4b^2(2a^2 - b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)}.$$



(M. 489.)

Reale Wendepunkte existiren also nur, wenn $b^2 < \frac{1}{2}a^2$. In Figur 489 ist K der Kreis mit dem Halbmesser $ab\sqrt{3} : \sqrt{2(a^2 + b^2)}$; die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, in welchen er die Fusspunktcurve durchschneidet, sind die Wendepunkte.

3. Die Wendepunkte der Curve $f(x, y) = 0$ sind die Schnittpunkte mit der Curve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Die Wendepunkte einer Curve können aus der Gleichung in homogenen Coordinaten durch die Bemerkung gewonnen werden, dass im Wendepunkte benachbarte Normalen parallel sind und benachbarte Tangenten zusammenfallen.

Aendert man x_1, x_2, x_3 um unendlich wenig, so geht die Tangente

$$T = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0, \quad \text{wobei } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

über in

$$\begin{aligned} T_1 = T &+ (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2 + f_{13}dx_3)\xi_1 \\ &+ (f_{12}dx_1 + f_{22}dx_2 + f_{23}dx_3)\xi_2 \\ &+ (f_{13}dx_1 + f_{23}dx_2 + f_{33}dx_3)\xi_3 = 0. \end{aligned}$$

Beide sind identisch, wenn für $i = 1, 2, 3$ und ein noch unbestimmtes μ

$$f_{i1}dx_1 + f_{i2}dx_2 + f_{i3}dx_3 = \mu f_i.$$

Nimmt man hierzu noch

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0,$$

so erhält man für die Coordinaten der Wendepunkte die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man die ersten drei Colonnen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 addirt sie zu der mit $-(n-1)$ multiplicirten letzten und beachtet, dass nach dem EULER'schen Satze

$$f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + f_{i3}x_3 - (n-1)f_i = 0,$$

so geht die Bedingung über in

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade $3(n-2)$; hieraus folgt, dass ein eigentlicher Kegelschnitt keinen, eine cubische Curve 9, eine biquadratische 24, eine Curve $n$ten Grades $3n(n-2)$ reale oder imaginäre Wendepunkte hat.

4. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken A_2, A_3 des Coordinatendreiecks zu Wendepunkten und die Seiten A_2A_3 und A_3A_1 zu Wendetangenten hat, ist von der Form

$$ax_1^3 + x_2x_3(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0.$$

Der Schnittpunkt B von $x_1 = 0$ mit $b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ ist der dritte Schnittpunkt der Curve mit der X_1-Achse.

Die Wendepunkte sind die Schnittpunkte der Curve mit

$$ax_1[12b_2b_3x_2x_3 - b_1x_1^2 - 3(b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3)^2] = 0.$$

Dies zeigt, dass auch B ein Wendepunkt ist, dass also bei einer Curve III. O. jede Verbindungsgerade zweier Wendepunkte noch durch einen dritten geht (Anal. Geom. d. Ebene, § 15, No. 5).

Die Lemniscate hat die Gleichung

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Man findet, wenn man $x^2 + y^2 = r^2$ setzt,

$$\frac{\partial f}{x} = 4x(r^2 - a^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(r^2 + a^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(r^2 - a^2 + 2x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(r^2 + a^2 + 2y^2).$$

Für Wendepunkte hat man daher

$$(r^4 - a^4)[r^4 - a^2(x^2 - y^2)] + 8a^4x^2y^2 = 0.$$

In Rücksicht auf die Gleichung der Lemniscate erhält man hieraus zunächst

$$[2(x^2 - y^2) - a^2](x^2 - y^2) + 8x^2y^2 = 0,$$

und schliesslich

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 0.$$

Der Nullpunkt ist der einzige reale Punkt dieser Curve.

5. Der Krümmungskreis. Unter dem Krümmungskreise einer Curve $y = f(x)$ in einem Punkte P derselben versteht man den Kreis, der durch diesen Punkt der Curve geht, und in diesem Punkte mit der Curve eine Berührung zweiter Ordnung hat. Hierdurch ist dieser Kreis eindeutig bestimmt, denn er hat drei verschiedene Bedingungen zu erfüllen. Das Centrum des Krümmungskreises nennt man den Krümmungsmittelpunkt der Curve, den Radius desselben den Krümmungshalbmesser; der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers wird als die Krümmung der Curve (im Punkte P) bezeichnet.

Da die Curve und ihr Krümmungskreis in P denselben Werth des ersten Differentialquotienten haben, so folgt, dass sie in P eine gemeinsame Tangente haben; hieraus erkennt man: Der Krümmungsmittelpunkt einer Curve für einen gegebenen Punkt derselben liegt auf der diesem Punkte zugehörigen Normalen der Curve. Sind ξ, η die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, und ist ρ der Krümmungshalbmesser, so ist die Gleichung des Krümmungskreises

1. $$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2.$$

Durch zweimalige Differentiation ergiebt sich

2. $$x - \xi + (y - \eta)y' = 0,$$

3. $$1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0.$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen x, y, y', y'' durch die Werthe, welche diese Grössen für die Curve $y = f(x)$ im Punkte P haben, so enthalten sie nur noch die Unbekannten ξ, η, ρ; man erhält für dieselben zunächst aus 3.

4. $$y - \eta = -(1 + y'^2) : y'',$$

und mit Hülfe dessen aus 2.

5. $$x - \xi = (1 + y'^2)y' : y''.$$

Durch Substitution von 4. und 5. in 1. folgt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Ferner ergeben sich aus 4. und 5. die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = x - \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Um zu entscheiden, auf welcher Seite der Tangente der Krümmungsmittelpunkt liegt, setzen wir die Coordinaten ξ und η desselben in die linke Seite der Tangentengleichung ein; wir erhalten, indem wir von 4. und 5. Gebrauch machen

$$T = y'(\xi - x) - (\eta - y) = -y'\frac{(1 + y'^2)y'}{y''} - \frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{(1 + y'^2)^2}{y''}.$$

Substituirt man dagegen in T die Coordinaten $\xi = x$ und $\eta = 0$ der Projection P' des Punktes P auf die Abscissenachse, so entsteht $T = y$.

Rechnet man die Normale in der Richtung nach der Abscissenachse positiv, und bezeichnet den Krümmungsmittelpunkt mit M, so hat folglich die Strecke PM das entgegengesetzte Vorzeichen wie das Produkt yy''. Für Curven, die nur positive Ordinaten haben, liegt somit M auf dem nach der Abscissenachse gerichteten Theile der Normalen oder nicht, je nachdem y'' negativ oder positiv ist.

Die Gleichung der Normale in P ist, wenn die laufenden Coordinaten mit ξ, η bezeichnet werden

6. $$N = \xi - x + y'(\eta - y) = 0.$$

Die Normale des Punktes P_1 mit den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ hat daher die Gleichung

7. $$N_1 = \xi - (x + \Delta x) + (y' + \Delta y')(\eta - y - \Delta y) = 0.$$

Der Schnittpunkt beider Normalen genügt 6. und 7., also auch der durch Subtraction sich ergebenden Gleichung

8. $$\Delta x + y'\Delta y + y\Delta y' + \Delta y'\Delta y - \eta\Delta y' = 0.$$

Dividirt man durch Δx und geht dann zur Grenze für ein verschwindendes Δx über, so erhält man eine Gleichung, welche mit 6. die Grenzlage bestimmt, der sich der Schnittpunkt der Normalen N und N_1 nähert, wenn P_1 unendlich nahe an P rückt. Man erhält

9. $$1 + y'^2 + yy'' - \eta y'' = 0.$$

Die Gleichungen 6. und 9. stimmen mit den Gleichungen 2. und 5. überein. Wir sehen daher: Der Krümmungsmittelpunkt in P ist die Grenze, welche sich der Schnittpunkte der Normalen in P und der Normalen in P_1 nähert, wenn P_1 unendlich nahe an P rückt; oder kürzer: Der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt unendlich nahe benachbarter Normalen. Hieraus ergiebt sich sofort: Die Evolute einer Curve ist der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Ferner ist ersichtlich: Der Krümmungshalbmesser eines Wendepunktes ist unendlich gross, die Krümmung im Wendepunkte ist Null.

Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich noch eine sehr bemerkenswerthe Formel, wenn man den Arcus des Winkels zwischen der Curventangente und der Abscissenachse einführt. Bekanntlich ist $\tau = arc\,tang y'$, folglich ist

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Da nun $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, wobei s den Curvenbogen bezeichnet, so erhält man für ρ

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Ist Δs ein endlicher Curvenbogen und $\Delta\tau$ der Arcus des Winkels, den die Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens einschliessen, so ist daher

$$\rho = lim\frac{\Delta s}{\Delta\tau};$$

der Krümmungsradius ist also der Grenzwerth, dem sich der Quotient aus einem Curvenbogen und aus dem Arcus des von den Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens eingeschlossenen Winkels nähert, wenn der Bogen verschwindend klein wird.

Bezeichnet σ den Winkel zwischen dem Radius vector des Punktes P und der Tangente in P (§ 5, No. 17), φ den Polarwinkel von P, so ist bekanntlich

$$\tau = \sigma + \varphi,$$

und daher

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma + d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} : \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} + 1\right).$$

Da nun $\sigma = arc\,tang(r : r')$, so folgt

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\,arc\,tang\frac{r}{r'} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 - r'^2},$$

mithin ist

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} + 1 = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Da ferner $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$, so folgt für Polarcoordinaten

10. $$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Es verdient schliesslich noch bemerkt zu werden, dass man aus 8. für ρ in rechtwinkeligen Coordinaten noch die constructiv verwerthbare Formel gewinnt

11. $$\rho = \frac{N^3}{y^3 y''},$$

wenn N die Normale in P bezeichnet.

6. Aus der Kegelschnittsgleichung $r = p : (1 + \varepsilon\cos\varphi)$ folgt (§ 5, No. 18)

$$r' = \frac{\varepsilon r^2 \sin\varphi}{p},$$

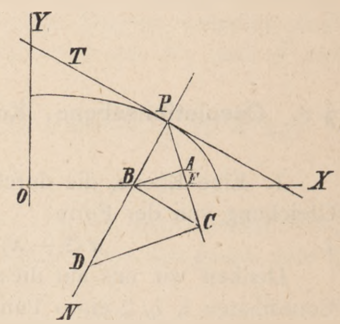
$$r'' = \frac{\varepsilon}{p}(2rr'\sin\varphi + r^2\cos\varphi) = \frac{\varepsilon r}{p}\left(\frac{2\varepsilon\sin^2\varphi}{p} + \frac{p\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\right),$$

Daher ist

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = r^2\left(1 - \frac{\varepsilon\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\right) = \frac{r^3}{p}.$$

Für den Krümmungshalbmesser findet man somit

$$\rho = \left(\frac{ds}{r\,d\varphi}\right)^3 \cdot p.$$



(M. 490.)

Da nun allgemein aus $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$ und $tang\,\sigma = r : r'$ folgt

$$\frac{ds}{r\,d\varphi} = \frac{1}{\sin\sigma},$$

so hat man schliesslich

$$\rho = \frac{p}{\sin^3\sigma}.$$

Aus dem Dreiecke FPB folgt

$$PB = r\sin\varphi : \sin(\varphi - 90^\circ + \sigma)$$
$$= r\sin\varphi : (\sin\varphi\sin\sigma - \cos\varphi\cos\sigma).$$

Da nun

$$\cos\sigma : \sin\sigma : 1 = r' : r : \sqrt{r'^2 + r^2} = \varepsilon r\sin\varphi : p : \sqrt{\varepsilon^2 r^2 \sin^2\varphi + p^2},$$

so ergiebt sich die Normale

$$PB = \frac{r\sqrt{\varepsilon^2 r^2\sin^2\varphi + p^2}}{p - \varepsilon r\cos\varphi} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 \sin^2\varphi + p^2} = \frac{p}{\sin\sigma}.$$

Macht man daher $PA = p$ und $AB \perp FP$, so ist PB die Normale; macht man ferner $BC \perp PN$ und $CD \perp FP$, so ist D der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt.

Für die Cycloide (§ 5, No. 6) ist

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot\frac{t}{2},$$

$$y'' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}t}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{1}{2}t}.$$

Das Bogendifferential ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \tfrac{1}{2} t\, dt, \quad \text{also} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Daher folgt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = -4a \sin \tfrac{1}{2} t.$$

Für die Normale ergiebt sich

$$N = y \frac{ds}{dx} = 2a \sin \tfrac{1}{2} t,$$

folglich ist der Krümmungshalbmesser doppelt so lang wie die Normale. Da y'' immer negativ und y positiv ist, so liegt der Krümmungsmittelpunkt auf dem nach der Abscissenachse gerichteten Theile der Normalen.

7. Für die archimedische Spirale $r = a\varphi$ ist der Krümmungshalbmesser

$$\rho = (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} : (r^2 + 2a^2);$$

er ist leicht zu construiren.

Der Krümmungshalbmesser der logarithmischen Spirale

$$r = e^{a\varphi}$$

hat zum Radius das constante Verhältniss $\sqrt{1 + a^2}$; die Dreiecke, welche den Nullpunkt, einen Spiralenpunkt und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt zu Ecken haben, sind einander ähnlich; die Evolute kommt daher mit der Spirale durch Drehung um den Nullpunkt zur Deckung.

Für die Kettenlinie $y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ist der Krümmungshalbmesser gleich der Normalen.

Die Polargleichung der Lemniscate ist $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Hieraus folgt $r^4 + r^2 r'^2 = a^4$, $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3(r^2 + r'^2)$, und daher

$$\rho = \frac{a^2}{3r}.$$

§ 9. Osculationsebene, Krümmung, Torsion und osculirende Kugel an Raumcurven.

1. Eine Ebene, die durch einen Punkt P einer Raumcurve C geht, hat eine Gleichung von der Form

$$1. \quad a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0.$$

Denken wir uns auf dieser Ebene durch P eine Curve Γ gezogen und die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes dieser Curve als Functionen einer Variabeln t, so erfüllen diese Functionen die Gleichung 1.; ihre ersten und zweiten Differentialquotienten erfüllen daher die Gleichungen

$$2. \quad a \frac{d\xi}{dt} + b \frac{d\eta}{dt} + c \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

$$3. \quad a \frac{d^2\xi}{dt^2} + b \frac{d^2\eta}{dt^2} + c \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

Denkt man sich die Coordinaten der Punkte von C ebenfalls als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t, und verlangt, dass im Punkte P die ersten Differentialquotienten der Coordinaten für C und Γ dieselben Verhältnisse haben, so muss die Gleichung 2. erfüllt sein, wenn man die Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch die von x, y, z ersetzt. Dadurch erhält man

$$4. \quad a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0.$$

Hierin sind a, b, c unbestimmt. Da die Differentialquotienten von x, y, z

proportional der Cosinus der Winkel sind, welche die Curventangente in P mit den Coordinatenachsen bildet, so schliesst man aus 4.: Die Ebenen der Plancurven, welche durch einen Punkt P einer Raumcurve gehen, und in diesem Punkte mit der Raumcurve in Bezug auf die ersten Differentialquotienten der Coordinaten übereinstimmen, bilden das Ebenenbüschel, dessen Träger die Tangente der Raumcurve in P ist.

Unter allen diesen Ebenen kann man diejenige aussuchen, auf welcher Curven liegen, die mit der Raumcurve C auch in Bezug auf die Verhältnisse der zweiten Differentialquotienten der Coordinaten für P übereinstimmen. Dann muss auch die Gleichung 3. erfüllt werden, wenn man in derselben die zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ durch die von x, y, z ersetzt; man erhält somit für a, b, c die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) &= 0, \\ ax' + by' + cz' &= 0, \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Gleichung der gesuchten Ebene

$$5. \quad \Omega = \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Ebene wird als die Osculationsebene der Curve C im Punkte P bezeichnet.

2. Die Normalebene von C im Punkte P hat die Gleichung

$$1. \quad N = (\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0;$$

die Gleichung der Normalebene N_1 im Punkte $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ ist

$$2. \quad N_1 = (\xi - x - \Delta x)(x' + \Delta x') + (\eta - y - \Delta y)(y' + \Delta y') + (\zeta - z - \Delta z)(z' + \Delta z') = 0.$$

Die Punkte, welche auf der Schnittgeraden beider Ebenen enthalten sind, erfüllen daher die Gleichung, welche durch Subtraction aus N_1 und N und Division durch Δt folgt

$$3. \quad (\xi - x)\frac{\Delta x'}{\Delta t} + (\eta - y)\frac{\Delta y'}{\Delta t} + (\zeta - z)\frac{\Delta z'}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}(x' + \Delta x') - \frac{\Delta y}{\Delta t}(y' + \Delta y') - \frac{\Delta z}{\Delta t}(z' + \Delta z') = 0$$

Wir können nun die Grenzlage bestimmen, der sich die Schnittgerade NN_1 nähert, wenn der Bogen PP_1 verschwindet. Bei diesem Grenzübergange geht 3. in die Gleichung über

$$4. \quad R = (\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0;$$

die durch diese Gleichung dargestellte Ebene R schneidet die Ebene N in der gesuchten Geraden. Die Cosinus der Stellungswinkel der Ebenen N und R sind proportional zu x', y', z' bez. zu x'', y'', z''. Eine Ebene, die durch P geht, und zu der Geraden N, R normal ist, hat daher eine Gleichung

$$a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0,$$

deren Constante den Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0, \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Ebene ist hiernach

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Vergleicht man dies mit dem Ergebnisse des vorigen Abschnitts, so folgt:

Die Osculationsebene einer Raumcurve in einem Punkte P derselben ist normal zu der Geraden, in welcher die Normalebene der Curve in P von der nächstfolgenden Normalebene geschnitten wird.

3. Für die Schnittcurve der Cylinder

$$y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = c^2$$

ist, wenn man y als unabhängige Variable ansieht,

$$xx' = -y, \quad zz' = -y, \quad xx'' = -\frac{c^2}{x^2}, \quad zz'' = -\frac{a^2}{z^2},$$

und daher die Gleichung der Osculationsebene

$$-\frac{x^3}{c^2(a^2-c^2)} \cdot \xi + \frac{y^3}{a^2 c^2} \cdot \eta + \frac{z^3}{a^2(a^2-c^2)} \cdot \zeta - 1 = 0.$$

Man erhält sie graphisch, indem man $a^2 c^2 : y^3$ herstellt und bemerkt, dass ihre Spuren die Spuren der Curventangente enthalten.

Aus den Gleichungen eines sphärischen Kegelschnitts

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

folgt, wenn man z als Unabhängige betrachtet und

$$m = -\frac{a^2(b^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}, \quad n = \frac{b^2(a^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)} \text{ setzt:}$$

$$xx' = mz, \quad yy' = nz, \quad xx'' = m - x'^2, \quad yy'' = n - y'^2.$$

Multiplicirt man die Reihen in der Determinante Ω mit x, y, z und dann die zweite Zeile mit z, so erhält man nach einfachen Reductionen für die Osculationsebene

$$\begin{vmatrix} x\xi - a^2 r^2 : (a^2-b^2), & y\eta + b^2 r^2 : (a^2-b^2), & z\zeta \\ m & n & 1 \\ a^2 m : x^2 & -a^2 n : y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies giebt zunächst

$$b^4(a^2+c^2)x^3 \cdot \xi - a^4(b^2+c^2)y^3 \cdot \eta + \frac{a^2b^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2(a^2-b^2)}(b^2x^2 + a^2y^2)z \cdot \zeta$$
$$- \frac{a^2b^2r^2}{a^2-b^2}[b^2(a^2+c^2)x^2 + a^2(b^2+c^2)y^2] = 0,$$

und schliesslich

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^3 \cdot \xi - \frac{b^2+c^2}{b^4}y^3 \cdot \eta + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^4(a^2-b^2)}z^3 \cdot \zeta - \frac{2r^4}{a^2-b^2} = 0.$$

4. Alle Curven, die durch P gehen, und für P in Bezug auf x', y', z', x'', y'', z'' übereinstimmen, haben dieselbe Tangente in P, dieselbe Normalebene, dieselbe Schnittgerade benachbarter Normalebenen und dieselbe Osculationsebene. Die ebenen unter diesen Curven liegen auf der Osculationsebene und haben folglich die Projection M des Punktes P auf die Schnittlinie benachbarter Normalebenen zum gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkte. Daher bezeichnet man M als Krümmungsmittelpunkt dieser Raumcurven im Punkte P, PM als Krümmungshalbmesser, und den um M durch P geschlagenen Kreis als Krümmungskreis der Curve.

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunkts genügen den Gleichungen No. 2, 1 und 4, sowie der Gleichung der Osculationsebene, sie sind also die Lösungen des Systems

$$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$
$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = s'^2,$$
$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0,$$

wenn man X, Y, Z abkürzungsweise setzt für

$$X = y'z'' - z'y'', \quad Y = z'x'' - x'z'', \quad Z = x'y'' - y'x''.$$

Hieraus folgt

1.
$$\xi = x + \frac{Yz' - Zy'}{X^2+Y^2+Z^2} \cdot s'^2,$$
$$\eta = y + \frac{Zx' - Xz'}{X^2+Y^2+Z^2} \cdot s'^2,$$
$$\zeta = z + \frac{Xy' - Yx'}{X^2+Y^2+Z^2} \cdot s'^2.$$

Der Krümmungshalbmesser ρ ergiebt sich zu

$$\rho = \frac{\sqrt{(Yz'-Zy')^2 + (Zx'-Xz')^2 + (Xy'-Yx')^2}}{X^2+Y^2+Z^2} \cdot s'^2.$$

Der Radicand ist, wie man leicht erkennt, identisch mit

$$(X^2+Y^2+Z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (Xx' + Yy' + Zz')^2.$$

Zufolge der Werthe von X, Y, Z verschwindet der Subtrahend identisch; man erhält daher für den Krümmungshalbmesser einfacher

2. $$\rho = s'^3 : \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Ferner findet man leicht

$$X^2+Y^2+Z^2 = (x''^2 + y'' + z''^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2.$$

Da nun $x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{2}\frac{d(x'^2+y'^2+z'^2)}{dt} = s's''$,

so ist

3. $$\rho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}.$$

Für die Cosinus der Richtungswinkel φ, ψ, χ des Krümmungshalbmessers hat man

4. $cos\varphi = (Yz' - Zy') : M, \quad cos\psi = (Zx' - Xz') : M, \quad cos\chi = (Xy' - Yx') : M,$

wobei $$M = s'\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Nimmt man s zur unabhängigen Veränderlichen, so ist $s' = 1$, $s'' = 0$ und daher

5. $$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Ferner ist, wie man sofort erkennt

$$Yz' - Zy' = x''(s'^2 - x'^2) - x'(s's'' - x'x'') = s'(x''s' - x's''),$$
$$Zx' - Xz' = s'(y''s' - y's''), \quad Xy' - Yx' = s'(z''s' - z's''),$$

und daher

$$Yz' - Zy' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right), \quad Zx' - Xz' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right), \quad Xy' - Xy' = s'^3 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right).$$

Demnach kann man die Formeln 1. durch die folgenden ersetzen

6.
$$\xi - x = \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right),$$
$$\eta - y = \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right),$$
$$\zeta - z = \frac{\rho^2}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right).$$

Ist s die unabhängige Veränderliche, so vereinfachen sich diese Formeln zu

7. $$\xi - x = \rho^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \rho^2\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \rho^2\frac{d^2z}{ds^2},$$

$$cos\varphi = \rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad cos\psi = \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad cos\chi = \rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Bezeichnet man die Werthe, welche x', y', z' für den Punkt $x + \Delta x$, $y + \Delta y$,

$z+\Delta z$ annehmen (s als unabhängige Variable verwendet), mit $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$, so sind x', y', z' bez. $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ die Richtungscosinus der Curventangenten in P und P'; daher hat man

$$x'^2+y'^2+z'^2=1,$$
$$(x'+\Delta x')^2+(y'+\Delta y')^2+(z'+\Delta z')^2=1.$$

Hieraus folgt

8. $$-2(x'\Delta x'+y'\Delta y'+z'\Delta z')=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2.$$

Ist $\Delta\tau$ der Arcus des Winkels der Curventangente in P und P', so ist

$$\cos\Delta\tau = x'(x'+\Delta x')+y'(y'+\Delta y')+z'(z'+\Delta z'),$$
$$=1+x'\Delta x'+y'\Delta y'+z'\Delta z';$$

folglich ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\tau=\sqrt{2(1-\cos\Delta\tau)}=\sqrt{(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2}.$$

Ersetzt man dies durch

$$2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y'}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta z'}{\Delta s}\right)^2}$$

und geht zur Grenze für ein verschwindendes Δs über, so erhält man

9. $$\frac{d\tau}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks gewinnt man für den Krümmungshalbmesser

10. $$\rho=\frac{ds}{d\tau},$$

der Form und der geometrischen Bedeutung nach übereinstimmend mit dem Krümmungshalbmesser ebener Curven.

Bezeichnet man Δs einen Curvenbogen und $\Delta\tau$ den Arcus des Winkels der Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens, so wird der Quotient $\Delta\tau:\Delta s$ als die *mittlere Krümmung* des Bogens Δs bezeichnet; die Krümmung eines verschwindend kleinen Bogens ist das Reciprocum des Krümmungshalbmessers.

Die Normale der Curve, die in der Osculationsebene enthalten ist, auf welcher also der Krümmungsmittelpunkt liegt, wird als *Hauptnormale* bezeichnet. Sind α, β, γ bez. φ, ψ, χ die Richtungswinkel der Tangente bez. der Hauptnormale, so hat man auf Grund der Formeln 6.

11. $$\cos\varphi=\frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right),\quad \cos\psi=\frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{s'}\right),\quad \cos\chi=\frac{\rho}{s'}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{s'}\right).$$

Da nun

$$\cos\alpha=\frac{x'}{s'},\quad \cos\beta=\frac{y'}{s'},\quad \cos\gamma=\frac{z'}{s'},\quad \rho=\frac{ds}{d\tau},$$

so erhält man

12. $$\cos\varphi=\frac{d\cos\alpha}{d\tau},\quad \cos\psi=\frac{d\cos\beta}{d\tau},\quad \cos\chi=\frac{d\cos\gamma}{d\tau}.$$

5. Plancurven haben in allen Punkten dieselbe Osculationsebene, nämlich die Ebene der Curve.

Bezeichnet $\Delta\omega$ den Arcus des Winkels der Osculationsebenen einer unebenen Curve in den Enden des Bogens Δs, so kann man sagen, *dass die Curve um so stärker von einer ebenen Curve abweicht, je grösser das Verhältniss* $\Delta\omega:\Delta s$ *ist.* Man bezeichnet diesen Quotienten als die *mittlere Torsion* des Curvenbogens Δs. Der Grenzwerth

$$\lim\frac{\Delta\omega}{\Delta s}=\frac{d\omega}{ds}$$

heisst dem entsprechend die *Torsion* der Curve im Punkte P; die reciproke

Torsion heisst der *Torsionshalbmesser*; wird derselbe mit ρ_1 bezeichnet, so hat man

1. $$\rho_1=\frac{ds}{d\omega}.$$

Sind λ, μ, ν die Stellungswinkel der Osculationsebene Ω, so ist, wie sich aus der Gleichung von Ω sofort ergiebt,

2. $$\cos\lambda=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\mu=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\nu=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

oder, wenn s die unabhängige Variable ist,

3. $$\cos\lambda=\rho X,\quad \cos\mu=\rho Y,\quad \cos\nu=\rho Z.$$

Haben die entsprechenden Cosinus der Osculationsebene im Endpunkte des Bogens Δs die Werthe $\cos\lambda+\Delta\cos\lambda$, $\cos\mu+\Delta\cos\mu$, $\cos\nu+\Delta\cos\nu$, so hat man die Gleichungen

4. $$1=\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu,$$
5. $$1=(\cos\lambda+\Delta\cos\lambda)^2+(\cos\mu+\Delta\cos\mu)^2+(\cos\nu+\Delta\cos\nu)^2,$$
6. $$\cos\Delta\omega=\cos\lambda(\cos\lambda+\Delta\cos\lambda)+\cos\mu(\cos\mu+\Delta\cos\mu)+\cos\nu(\cos\nu+\Delta\cos\nu\Delta\nu).$$

Addirt man 4. und 5. und subtrahirt davon das Doppelte von 6., so erhält man

$$2(1-\cos\Delta\omega)=(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2,$$

mithin ist

$$2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega}{\Delta\omega}\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\lambda}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\cos\mu}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\cos\nu}{\Delta s}\right)^2}.$$

Der Uebergang zur Grenze liefert schliesslich

7. $$\frac{d\omega}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}.$$

Hieraus folgt der *Torsionshalbmesser*

8. $$\rho_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}}.$$

Aus 7. folgt

9. $$d\omega=\sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2}.$$

Es giebt daher eine Gerade, deren Winkel φ_1, ψ_1, χ_1 mit den Achsen den Gleichungen entspringen

10. $$d\cos\lambda=\cos\varphi_1\,d\omega,\quad d\cos\mu=\cos\psi_1\,d\omega,\quad d\cos\nu=\cos\chi_1\,d\omega.$$

Da nun aus

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

durch Differentiation hervorgeht

$$\cos\lambda\,d\cos\lambda+\cos\mu\,d\cos\mu+\cos\nu\,d\cos\nu=0,$$

so folgt in Rücksicht auf 10. für φ_1, ψ_1, χ_1 die Gleichung

11. $$\cos\lambda\cos\varphi_1+\cos\mu\cos\psi_1+\cos\nu\cos\chi_1=0.$$

Ferner ist bekanntlich

$$\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma=0;$$

daher ist auch

$$\cos\lambda\,d\cos\alpha+\cos\mu\,d\cos\beta+\cos\nu\,d\cos\gamma+\cos\alpha\,d\cos\lambda+\cos\beta\,d\cos\mu+\cos\gamma\,d\cos\nu=0.$$

Führt man für $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ die Werthe aus No. 4, 12 ein, sowie für $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$ die Werthe 10., so erhält man

$$(\cos\lambda\cos\varphi+\cos\mu\cos\psi+\cos\nu\cos\chi)d\tau+(\cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1+\cos\gamma\cos\chi_1)d\omega=0.$$

Der Inhalt der ersten Klammer verschwindet, da die Hauptnormale in der Osculationsebene liegt; daher folgt

12. $$\cos\alpha\cos\varphi_1 + \cos\beta\cos\psi_1 + \cos\gamma\cos\chi_1 = 0 .$$

Aus 11. und 12. folgt, dass die durch P unter den Winkeln φ_1, ψ_1, χ_1 gelegte Gerade in die Osculationsebene fällt und normal zur Tangente ist; folglich ist

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \psi_1 = \psi, \quad \chi_1 = \chi,$$

und wir haben somit die Formeln

13. $$d\cos\lambda = \cos\varphi\, d\omega, \quad d\cos\mu = \cos\psi\, d\omega, \quad d\cos\nu = \cos\chi\, d\omega .$$

Ferner folgt aus

$$\cos^2\alpha + \cos^2\lambda + \cos^2\varphi = 1$$

durch Differentiation

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\varphi\, d\cos\varphi = 0 .$$

In Rücksicht auf 12. und No. 4, 13 und durch Uebertragung auf ψ und χ folgt hieraus

14. $$\begin{aligned} d\cos\varphi &= -\cos\alpha\, d\tau - \cos\lambda\, d\omega , \\ d\cos\psi &= -\cos\beta\, d\tau - \cos\mu\, d\omega , \\ d\cos\chi &= -\cos\gamma\, d\tau - \cos\nu\, d\omega . \end{aligned}$$

6. Es giebt eine eindeutig bestimmte Kugel, auf der sich Curven ziehen lassen, die mit einer Raumcurve einen Punkt P, sowie in diesem Punkte die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten der Coordinaten, in Bezug auf dieselbe unabhängige Variable, gemein haben. Sind nämlich ξ, η, ζ die Coordinaten des Centrums und ist R der Radius dieser Kugel, so ist ihre Gleichung

1. $$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R^2 .$$

Die ersten Differentialquotienten der Coordinaten der Punkte dieser Kugel genügen daher der Gleichung

2. $$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0 .$$

Für die zweiten und dritten Differentialquotienten folgt hieraus weiter

3. $$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' - s'^2 = 0,$$

4. $$(\xi - x)x''' + (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' - 3s's'' = 0 .$$

Substituirt man nun hier für x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''' s', $s's''$ die für die gegebene Curve geltenden Werthe, so enthalten die Gleichungen 1., 2., 3., 4. nur noch die Unbekannten ξ, η, ζ, R und genügen zu deren Bestimmung. Bezeichnet man mit Δ_{ik} die zum $k$ten Gliede der $i$ten Zeile von

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

gehörige Subdeterminante zweiten Grades, so ergiebt die Auflösung von 2., 3. und 4.

5. $$\begin{aligned} \xi - x &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{21} + 3s''\Delta_{31}), \\ \eta - y &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{22} + 3s''\Delta_{32}), \\ \zeta - z &= \frac{s'}{\Delta}(s'\Delta_{23} + 3s''\Delta_{33}). \end{aligned}$$

Man erhält einfachere Formeln, wenn man s als unabhängige Variable einführt. Unter dieser Voraussetzung gehen die Gleichungen 2. und 3. über in (vergl. No. 4, 11)

6. $$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

7. $$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = \rho .$$

Statt der Gleichung 4. kann man nun die Gleichung verwenden, die aus 7. durch Differentiation nach s hervorgeht

8. $$(\xi - x)d\cos\varphi + (\eta - y)d\cos\psi + (\zeta - z)d\cos\chi - (\cos\varphi\, dx + \cos\psi\, dy + \cos\chi\, dz) = d\rho .$$

Da die Tangente zur Richtung φ, ψ, χ normal ist, so ist

$$\cos\varphi\, dx + \cos\psi\, dy + \cos\chi\, dz = 0 .$$

Setzt man ferner die Werthe aus No. 5, 14 ein, so erhält man in Rücksicht auf 6. die Gleichung

9. $$(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = -\frac{d\rho}{d\omega} .$$

Multiplicirt man 6., 7., 9. zuerst der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, dann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, hierauf mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ und addirt jedesmal, so erhält man

10. $$\begin{aligned} \xi - x &= \rho\cos\varphi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\lambda , \\ \eta - y &= \rho\cos\psi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\mu , \\ \zeta - z &= \rho\cos\chi - \frac{d\rho}{d\omega}\cdot\cos\nu . \end{aligned}$$

Hierin kann man für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, ρ, $d\omega$ die Werthe No. 5, 2 oder 3, No. 4, 4 oder 7, No. 4, 2 oder 5, No. 5, 9 setzen.

Quadrirt man diese Werthe und addirt, so erhält man für den Radius der Kugel

11. $$R^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 ;$$

Diese Kugel, deren Mittelpunkt und Halbmesser sich aus 10. und 11. bestimmen, heisst die osculirende Kugel der Curve im Punkte P.

Die Gleichungen 2. und 3. lehren, dass der Mittelpunkt der osculirenden Kugel auf der Schnittlinie benachbarter Normalebenen gelegen ist.

Der Abstand des Centrums der osculirenden Kugel von der Osculationsebene hat nach 12. den Betrag

$$\frac{d\rho}{d\omega} .$$

Hieraus erkennt man: Der Krümmungskreis einer Curve in einem Punkte derselben ist der Schnitt der osculirenden Kugel mit der Osculationsebene.

Für Curven von constantem Krümmungshalbmesser liegt das Centrum der osculirenden Kugel auf der Osculationsebene und der Krümmungskreis ist somit ein grösster Kreis der osculirenden Kugel

7. Als Beispiel betrachten wir die Schraubenlinie. Unter denselben Voraussetzungen wie in § 6, No. 9 sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$z = k\varphi, \quad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi .$$

Jedes Bogenelement ds ist gegen die Horizontalebene um den constanten Winkel geneigt, den die Tangente mit der Horizontalebene bildet; der Cosinus dieses Winkels ist $a : \sqrt{a^2 + k^2}$; daher ist der von der Horizontalebene bis zum Punkte P sich erstreckende Bogen s der Schraubenlinie gleich der Horizontalprojection von s, dividirt durch diesen Cosinus. Mithin haben wir

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a}\cdot a\varphi = \sqrt{a^2 + k^2}\cdot\varphi .$$

Setzen wir zur Abkürzung $n = 1 : \sqrt{a^2 + k^2}$, so ist daher

1. $$z = kns, \quad x = a\cos ns, \quad y = a\sin ns .$$

Hieraus folgen die Differentialquotienten

2. $$\frac{dx}{ds} = - an \sin ns\,, \quad \frac{dy}{ds} = an \cos ns\,, \quad \frac{dz}{ds} = kn\,,$$

3. $$\frac{d^2x}{ds^2} = - an^2 \cos ns\,, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = - an^2 \sin ns\,, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0\,.$$

Hieraus ergeben sich für X, Y, Z die Werthe

4. $$X = akn^3 \sin ns\,, \quad Y = - akn^3 \cos ns\,, \quad Z = a^2n^3\,.$$

Die Gleichung der Osculationsebene ist daher

$$\Omega \equiv \sin ns\,(\xi - x) - \cos ns\,(\eta - y) + \frac{a}{k}(\zeta - z) = 0\,.$$

Setzt man für x, y, z die Werthe 1., so erhält man

5. $$\Omega \equiv \sin ns \cdot \xi - \cos ns \cdot \eta + \frac{a}{k}(\zeta - kns) = 0\,.$$

Setzt man hier $\zeta = z$, so erhält man

$$\sin ns \cdot \xi - \cos ns \cdot \eta = 0\,,$$

d. i. die Gleichung des Grundrisses des durch P gehenden Cylinderhalbmessers. Dies ergiebt: Die Osculationsebene der Schraubenlinie in P enthält den durch P gehenden Halbmesser des Schraubencylinders, und ist daher gegen die Schraubenachse unter demselben Winkel geneigt, wie die Schraubentangente. Die Hauptnormale ist normal zur Achse.

Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich

6. $$\rho = \frac{1}{an^2} = \frac{a^2 + k^2}{a}\,.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also für alle Punkte der Schraubenlinie constant; die Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer Schraubenlinie von derselben Achse und Ganghöhe.

Die Stellungswinkel der Osculationsebene folgen aus

7. $$\cos\lambda = kn \sin ns\,, \quad \cos\mu = - kn \cos ns\,, \quad \cos\nu = an\,.$$

Hieraus folgt für den Torsionshalbmesser

8. $$\rho_1 = \frac{1}{kn^2} = \frac{a^2 + k^2}{k}\,.$$

8. In jedem Punkte P einer Raumcurve C lässt sich eine osculirende Schraubenlinie construiren, d. i. eine Schraubenlinie, welche durch P geht, und in P die Tangente, die Osculationsebene, sowie den Krümmungshalbmesser und den Torsionshalbmesser mit der Curve C gemein hat. Sind ρ und ρ_1 Krümmungs- und Torsionshalbmesser von C im Punkte P, so bestimmen sich die Constanten a und k der osculirenden Schraubenlinie aus

$$\frac{a^2 + k^2}{a} = \rho \quad \text{und} \quad \frac{a^2 + k^2}{k} = \rho_1\,;$$

man erhält

1. $$a = \frac{\rho\rho_1^2}{\rho^2 + \rho_1^2}\,, \quad k = \frac{\rho^2\rho_1}{\rho^2 + \rho_1^2}\,.$$

Die Schraubenachse trifft die Hauptnormale, schneidet von ihr eine Strecke $PA = a$ ab, und ihre Projection auf die Osculationsebene ist die durch A gehende Parallele zur Curventangente; der Winkel γ der Schraubenachse und der Osculationsebene bestimmt sich aus

2. $$\cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}\,.$$

Durch diese Angaben ist die osculirende Schraubenlinie vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 10. Krümmung von Flächen*).

1. Bei den vorhergehenden Untersuchungen haben wir eine Raumcurve nicht durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten charakterisirt, sondern wir haben mit wesentlichem Vortheile die Coordinaten eines Curvenpunktes als Functionen einer unabhängigen Variabeln t betrachtet.

In gleicher Weise ist es bei den folgenden Untersuchungen über Flächen vortheilhaft, eine Fläche nicht durch eine Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

zu charakterisiren, sondern x, y, z als Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u, v

1. $$x = F_1(u, v)\,, \quad y = F_2(u, v)\,, \quad z = F_3(u, v)$$

zu betrachten. Eliminirt man aus den Gleichungen 1. u und v, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, also die Gleichung der Fläche in der gewöhnlichen Form.

So wird z. B. ein Ellipsoid, dessen Achsen in die Coordinatenachsen fallen, durch die Gleichungen dargestellt

$$x = a\cos u \cos v\,, \quad y = b\cos u \sin v\,, \quad z = c\sin u\,;$$

denn aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{x}{a} = \cos u \cos v\,, \quad \frac{y}{b} = \cos u \sin v\,, \quad \frac{z}{c} = \sin u\,,$$

und daher, wenn man quadrirt und addirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Für die axiale normale Schraubenregelfläche hat man

$$x = v\cos u\,, \quad y = v\sin u\,, \quad z = ku\,.$$

2. Ertheilt man der Veränderlichen v einen besonderen Werth v_0, so stellen die Gleichungen

$$x = F_1(u, v_0)\,, \quad y = F_2(u, v_0)\,, \quad z = F_3(u, v_0)$$

eine Curve dar, die auf der Fläche liegt. Aendert man nun v_0, so ändert sich Lage und Gestalt dieser Curve, und durchläuft v_0 die ganze Zahlenreihe, so beschreibt die Curve die ganze Fläche. Ferner wird durch die Gleichungen

$$x = F_1(u_0, v)\,, \quad y = F_2(u_0, v)\,, \quad z = F_3(u_0, v)\,,$$

wo u_0 einen besonderen Werth bezeichnet, eine Raumcurve anderer Art dargestellt, die auch auf der Fläche liegt. Durchläuft u_0 die ganze Zahlenreihe, so wechselt diese Curve continuirlich Gestalt und Lage und beschreibt ebenfalls die ganze Fläche.

Somit wird die Fläche von zwei Schaaren von Curven bedeckt, und jeder Punkt der Fläche erscheint als Schnittpunkt einer Curve der einen Schaar mit einer Curve der andern. Wir bezeichnen u und v als die Parameter der Flächenpunkte, und die Curven auf der Fläche, welche die Punkte enthalten, für welche v bez. u constant ist, als Parameterlinien; letztere charakterisiren wir kurzweg durch die Bedingungen $v = v_0$, bez. $u = u_0$.

Wählt man x und y selbst zu unabhängigen Veränderlichen, setzt man also $x = u$, $y = v$, so ist durch die Bedingung $v = v_0$ eine Ebene normal zur Y-Achse dargestellt; die Parameterlinien $v = v_0$ sind also die Querschnitte der

*) Dieser Abschnitt ist im Anschlusse an HOPPE, Principien der Flächentheorie, Leipzig 1876, § 1 bis 9 u. ff. bearbeitet.

Fläche parallel zur XZ-Ebene; die Parameterlinien $u = u_0$ sind die Querschnitte der Fläche parallel der YZ Ebene. In der analytischen Geometrie des Raumes haben wir diese Curven benutzt, um uns eine Anschauung der zu einer gegebenen Gleichung gehörigen Fläche II. O. zu verschaffen.

3. Bewegt sich ein Punkt P um unendlich wenig entlang der Fläche in übrigens beliebiger Richtung, so erhalten u und v unendlich kleine Veränderungen du und dv von unbestimmtem Verhältnisse. Die zugehörigen Aenderuugen von x, y, z ergeben sich durch Differentiation zu

1. $$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Das vom Punkte P bei dieser Bewegung zurückgelegte Bogenelement ist
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Führt man hier die Werthe 1. ein, so erhält man

2. $$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

wobei e, f, g die Ausdrücke bezeichnen

3. $$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Diese Grössen e, f, g werden in der Flächentheorie als die Fundamentalgrössen I. Ordnung bezeichnet. Sie sind von der Lage des Punktes P abhängig, hängen aber nicht von dem Verhältnisse $\partial v : \partial u$, also nicht von der Richtung ab, welche das Curvenelement ds hat.

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente einer auf der Fläche durch P gehenden Curve in P mit den Achsen bildet, so ist
$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Setzt man hier die Werthe aus 1. und 2. ein, und bezeichnet das Verhältniss $dv : du$ mit k, so erhält man

4. $$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}\right) : N, \quad \beta = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + k\frac{\partial y}{\partial v}\right) : N, \quad \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + k\frac{\partial z}{\partial v}\right) : N,$$

wobei
$$N = \sqrt{e^2 + 2fk + gk^2}.$$

Für eine andere durch P auf der Fläche gezogene Curve haben $dv : du$ und α, β, γ andere Werthe k', α', β', γ'. Der Winkel ϑ, unter dem sich die Curven in P schneiden, bestimmt sich aus
$$\cos\vartheta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$
mit Hülfe der Werthe 1. und der entsprechenden Werthe für α', β', γ' zu

5. $$\cos\vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}}.$$

Die den Verhältnissen k und k' zugehörigen Curvenelemente sind daher normal zu einander, wenn

6. $$e + f(k + k') + gkk' = 0.$$

4. Ist Π ein Punkt der Tangente einer durch P gehenden Curve auf der Fläche, und $P\Pi = R$, so gelten die Gleichungen
$$\xi - x = R\frac{dx}{ds}, \quad \eta - y = R\frac{dy}{ds}, \quad \zeta - z = R\frac{dz}{ds}.$$

Führt man hier die Werthe für dx, dy, dz ein, und eliminirt dann du und dv, so erhält man

1. $$T = \begin{vmatrix} \xi - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \eta - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \zeta - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung dafür, dass Π einer Tangente der Fläche im Punkte P angehört, ist also die Gleichung der Tangentenebene.

Sind p, q, r die Cosinus der Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen, und t ein noch unbestimmter Faktor, so hat man aus 1.

2. $$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt, so ergiebt sich für die Grösse t die Gleichung

3. $$t^2 = eg - f^2,$$

wodurch nun p, q, r vollständig bestimmt sind. Da die Normale eines Flächenpunktes mit jeder in diesem Punkte berührenden Flächentangente rechte Winkel bildet, so ist für jede Verschiebung dx, dy, dz des Punktes P entlang der Fläche

4. $$pdx + qdy + rdz = 0;$$

führt man die Werthe für dx, dy, dz ein, so folgen in Rücksicht auf die Unabhängigkeit von du und dv aus 4. die beiden Gleichungen

5. $$p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u} + r\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

6. $$p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v} + r\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

5. Differenzirt man die vorigen Gleichungen nach u und v, so erhält man die vier Gleichungen

1. $$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + E = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + F = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + F = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + G = 0,$$

wobei durch E, F, G die Grössen bezeichnet werden

2. $$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$
$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$
$$G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Diese Grössen sind bei der Untersuchung der Krümmungen der durch einen Punkt der Fläche gehenden Curven der Fläche von Bedeutung und werden als die Fundamentalgrössen II. Ordnung bezeichnet.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 1. mit du^2, die zweite und dritte mit $dudv$, die dritte mit dv^2 und addirt, so erhält man

3. $$dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz + E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 = 0,$$
wobei wie immer dp, dq, dr die vollständigen Differentiale

$$dp = \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv, \quad \text{u. s. w.}$$

bezeichnen. Differenzirt man No. 4, 4 nach dem Winkel zweier Tangenten einer auf der Fläche liegenden Curve, so erhält man

4. $$\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds} + q\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds} + r\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{d\tau}\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{d\tau}\frac{dy}{ds} + \frac{dr}{d\tau}\frac{dz}{ds} = 0.$$

Dividirt man 3. durch $d\tau\,ds$, und subtrahirt dann 4., so ergiebt sich die Gleichung

5. $$p\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds} + q\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds} + r\frac{d}{d\tau}\frac{dr}{ds} = \frac{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2}{d\tau\,ds}.$$

Die Grössen $\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{ds}$, $\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{ds}$ sind (§ 9, No. 4, 12) die Cosinus der Winkel, welche die Hauptnormale von s in P mit den Achsen bildet; die linke Seite ist daher der Cosinus des Winkels zwischen dieser Hauptnormalen und der Flächennormalen. Bezeichnen wir denselben durch θ, und den Krümmungsradius der Curve s in P mit ρ', so folgt aus 5.

6. $$\frac{1}{\rho'}\cos\theta = \frac{d\tau}{ds}\cdot\cos\theta = \frac{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2}{e du^2 + 2f du\,dv + g dv^2}.$$

Die rechte Seite hängt nur von der Lage des Punktes P und von dem Verhältniss $dv : du$ ab, hat also unverändert denselben Werth für alle Curven s der Fläche, welche in P eine gemeinsame Tangente haben.

Eine auf der Fläche liegende ebene Curve, deren Ebene die Flächennormale in P enthält, wird als ein Normalschnitt der Fläche im Punkte P bezeichnet. Der Krümmungsradius ρ des Normalschnittes, der die zu dem Verhältnisse $du : dv$ gehörige Flächentangente berührt, ergiebt sich aus 6. für $\theta = 0$. Daher ist

$$\rho' = \rho\cos\theta.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Der Krümmungsradius einer Curve s der Fläche in P ist gleich dem Krümmungsradius des durch die Tangente von s in P geführten Normalschnitts multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene dieses Normalschnitts und der Hauptnormalen von s.

6. Durch Ausrechnung der linken und rechten Seite überzeugt man sich leicht von der Identität

1. $$\begin{aligned}&(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2)\\ &= 2[e + f(k+k') + gkk'][E + F(k+k') + Gkk'] + (eG - 2fF + gE)(k-k')^2.\end{aligned}$$

Sind e, f, g die Fundamentalgrössen I. O. und k, k' die Werthe von $dv : du$ für zwei in P sich rechtwinkelig schneidende Curven der Fläche, so ist

$$e + f(k + k') + gkk' = 0;$$

die Identität 1. liefert in diesem Falle

$$\begin{aligned}(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2)\\ = (eG - 2fF + gE)(k - k')^2.\end{aligned}$$

Hierin sind E, F, G noch ganz beliebige Grössen; ersetzt man E, F, G durch e, f, g, so erhält man

2. $$(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2) = t^2(k - k')^2.$$

Aus dieser Gleichung und der vorigen ergiebt sich

$$\frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2} + \frac{E + 2Fk' + Gk'^2}{e + 2fk' + gk'^2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Sind nun E, F, G die Fundamentalgrössen II. O., so sind die Quotienten der linken Seite die reciproken Krümmungsradien der beiden Normalschnitte in den auf einander senkrechten Richtungen k und k'; bezeichnet man diese Radien mit ρ und ρ', so ist daher

3. $$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Die rechte Seite hängt nur von der Lage des Punktes P ab, ist dagegen unabhängig von k oder k'. Dies ergiebt: Für jeden Punkt der Fläche ist die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinkelig schneidenden Normalschnitte constant.

7. Die Krümmung eines Normalschnitts

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}$$

ist nur dann von k unabhängig, wenn

1. $$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g};$$

der gemeinsame Werth dieser Quotienten giebt dann zugleich die Krümmung an. Durch Auflösung der beiden Gleichungen 1. werden einzelne Punkte der Fläche erhalten, die die Eigenschaft haben, dass alle Normalschnitte in diesen Punkten gleiche Krümmung besitzen. Diese Punkte heissen sphärische Punkte oder Nabelpunkte. In besonderen Fällen treten auch Nabellinien auf, deren Punkte sämmtlich Nabelpunkte sind.

8. Dreht sich die Normalebene in einem Punkte der Fläche, der nicht Nabelpunkt ist, um die Flächennormale, so ändert sich $1 : \rho$ und kehrt nach Vollendung der Drehung zum Ausgangswerthe zurück. Daher muss dabei $1 : \rho$ wenigstens einmal einen Maximalwerth und einmal einen Minimalwerth erlangt haben. Die Richtungen k, welche diesen eminenten Werthen entsprechen, werden erhalten, wenn man $1 : \rho$ nach der Variabeln k differenzirt und die Werthe von k bestimmt, für welche dieser Differentialquotient verschwindet. Man erhält

1. $$\begin{aligned}\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= \frac{1}{N}\begin{vmatrix} F + Gk & E + 2Fk + Gk^2 \\ f + gk & e + 2fk + gk^2 \end{vmatrix},\\ &= -\frac{1}{N}\left\{\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k^2\right\},\end{aligned}$$

wobei
$$N = \tfrac{1}{2}(e + 2fk + gk^2)^2.$$

Die gesuchten Werthe von k sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

2. $$\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k^2 = 0.$$

Da wir uns überzeugt haben, dass ein Maximalwerth und ein Minimalwerth der Krümmung existiren, so folgt, dass diese Gleichung stets zwei verschiedene reale Wurzeln hat. Die beiden Normalschnitte, die durch diese Gleichung bestimmt sind, heissen die Hauptnormalschnitte, ihre Krümmungen die Hauptkrümmungen, ihre Ebenen die Hauptnormalebenen, ihre Tangenten die Hauptkrümmungstangenten, und deren Richtungen die Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind k_1 und k_2 die Wurzeln von 2., so ist

3. $$m k_1 k_2 = \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix}, \quad m(k_1 + k_2) = \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix}, \quad \text{wobei } m = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

4. $$e + f(k_1 + k_2) + gk_1k_2 = 0;$$

dies ergiebt den Satz: Die Hauptkrümmungsrichtungen sind normal zu einander. Sind ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, so folgt (No. 6, 3)

5. $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

Ersetzt man in No. 6, 2 k und k' durch k_1 und k_2, so ergiebt sich

6. $$(e + 2fk_1 + gk_1^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2) = t^2(k_1 - k_2)^2.$$

Aus 3. folgt ferner für die Hauptkrümmungsrichtungen die Gleichung

7. $$E + F(k_1 + k_2) + Gk_1k_2 = 0.$$

Setzt man nun in No. 6, 1

$$k = k_1, \quad k' = k_2, \quad e = E, \quad f = F, \quad g = G,$$

und versteht unter E, F, G Hauptgrössen zweiter Ordnung eines Punktes P und unter k_1 und k_2 die für die Hauptkrümmungsrichtungen geltenden Werthe von $dv : du$, so sind 6. und 7. erfüllt und die Identität No. 6, 1 liefert

8. $$(E + 2Fk_1 + Gk_1^2)(E + 2Fk_2 + Gk_2^2) = (GE - F^2)(k_1 - k_2)^2.$$

Dividirt man 8. durch 6., so erhält man

9. $$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}.$$

Aus 5. und 9. erkennt man, dass die Hauptkrümmungen die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

10. $$t^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} - (G - 2fF + gE) \cdot \frac{1}{\rho} + EG - F^2 = 0.$$

Um zu entscheiden, welche Wurzel dieser Gleichung zu k_1, welche zu k_2 gehört, bilden wir die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2},$$

und erhalten

$$\Delta = \frac{F + 2Fk_1 + Gk^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2} - \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2}.$$

Hieraus folgt nach Beseitigung der Nenner in Rücksicht auf 6

$$\Delta(k_1 - k_2)^2 t^2 = \begin{vmatrix} E + 2Fk_1 + Gk_1^2 & E + 2Fk_2 + Gk_2^2 \\ e + 2fk_1 + gk_1^2 & e + 2fk_2 + gk_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (k_1 - k_2)\left\{-2\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix}(k_1 + k_2) - 2\begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} k_1k_2\right\}.$$

Führt man rechts für die Determinanten die Werthe 3. ein, so erkennt man, dass der Klammerinhalt

$$\begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix}(k_1 - k_2)^2$$

beträgt, und erhält hieraus für die gesuchte Differenz

11. $$\Delta = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix}\frac{k_1 - k_2}{t^2}.$$

Ist k_1 die kleinere der beiden Grössen k_1 und k_2, so ist daher ρ_1 der kleinere oder der grössere Hauptkrümmungshalbmesser, je nachdem

$$Fg - Gf \gtrless 0.$$

9. Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der Tangentenrichtung k und der Haupttangentenrichtung k_1, so ist $90° - \vartheta$ der Winkel zwischen den Richtungen k und k_2; die Formel No. 3, 5 liefert

$$\cos^2\vartheta = \frac{[e + f(k + k_1) + gkk_1]^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk_1 + gk_1^2)}, \quad \sin^2\vartheta = \frac{[e + f(k + k_2) + gkk_2)^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2)}.$$

Für die Krümmung $1 : \rho$ des die Richtung k enthaltenden Normalschnitts und für die Hauptkrümmungen folgt aus No. 4, 6

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2}.$$

In Folge der Gleichungen

$$e + f(k_1 + k_2) + gk_1k_2 = 0, \quad E + F(k_1 + k_2) + Gk_1k_2 = 0$$

hat man die Reductionen

$$\begin{aligned} e + f(k + k_1) + gkk_1 &= (f + gk_1)(k - k_2), \\ e + f(k + k_2) = gkk_2 &= (f + gk_2)(k - k_1), \\ e + 2fk_1 + gk_1^2 &= (f + gk_1)(k_1 - k_2), \\ e + 2fk_2 + gk_2^2 &= (f + gk_2)(k_2 - k_1), \\ E + 2Fk_1 + Gk_1^2 &= (F + Gk_1)(k_1 - k_2), \\ E + 2Fk_2 + Gk_2^2 &= (F + Gk_2)(k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Hiernach erhält man

$$\cos^2\vartheta = \frac{f + gk_1}{e + 2fk + gk^2} \cdot \frac{(k - k_2)^2}{k_1 - k_2}, \quad \sin^2\vartheta = \frac{f + gk_2}{e + 2fk + gk^2} \cdot \frac{(k - k_1)^2}{k_2 - k_1},$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{F + Gk_1}{f + gk_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{F + Gk_2}{f + gk_2};$$

daher ist

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2} = \frac{(F + Gk_1)(k - k_2)^2 - (F + Gk_2)(k - k_1)^2}{(e^2 + 2fk + gk^2)(k_1 - k_2)}$$

$$= \frac{2Fk + Gk^2 - F(k_1 + k_2) - Gk_1k_2}{(e + 2fk + gk^2)}.$$

Addirt man zum Zähler $E + F(k_1 + k_2) + Gk_1k_2 = 0$, so erhält man schliesslich

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2};$$

also ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2}.$$

Diese Formel lehrt die Krümmung eines Normalschnitts N aus den Hauptkrümmungen und aus den Winkeln zwischen N und den Hauptkrümmungsrichtungen finden.

10. Rechnet man das Bogenelement einer Raumcurve positiv, so hat der Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}$$

einen positiven oder negativen Werth, je nachdem $d\tau$ positiv oder negativ ist. Die Tangenten in den Endpunkten des Curvenelements ds bilden zwei spitze verschwindend kleine Winkel vom Arcus $d\tau$ und zwei stumpfe Winkel, in deren einem das Bogenelement ds enthalten ist. Da der Krümmungsmittelpunkt auf dem Schnitt der Normalebenen in den Enden von ds liegt, so folgt, dass derselbe mit ds auf derselben Seite der Tangente liegt. Die Tangenten aller Normalschnitte in einem Punkte einer Fläche sind in der Tangentenebene vereint. Haben nun die Hauptkrümmungen $1 : \rho_1$ und $1 : \rho_2$ entgegengesetzte Zeichen, so folgt, dass die Curvenelemente ds_1 und ds_2 der Hauptnormalschnitte und daher auch die Hauptkrümmungscentra auf entgegengesetzten Seiten der Tangentenebene liegen. Die Gleichung

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2} = 0,$$

deren Lösungen sind

1. $$tang\,\vartheta = \pm\sqrt{-\rho_2 : \rho_1},$$

bestimmt dann zwei Normalschnitte von der Krümmung Null, und für diese ist im Allgemeinen P ein Wendepunkt. In diesen beiden Normalschnitten tritt, wenn wir uns die Normalebene um die Normale in einer Richtung gedreht denken, der Uebergang von positiver zu negativer Krümmung ein; in den Tangenten dieser beiden Normalschnitte durchdringt die Fläche in der Umgebung von P die Tangentenebene.

Bei einem einschaligen Hyperboloide und bei einem hyperbolischen Paraboloide sind diese Normalschnitte, in welchen das Vorzeichen der Krümmung wechselt, die beiden Geraden der Fläche, welche durch den Flächenpunkt P gehen. Die Hauptkrümmungsrichtungen einer Regelfläche zweiten Grades halbiren daher in jedem Punkte der Fläche die Winkel der durch diesen Punkt gehenden Geraden der Fläche.

Haben dagegen beide Hauptkrümmungen dasselbe Zeichen, so haben gemäss der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2}$$

alle Normalschnitte Krümmungen desselben Zeichens; alle von P aus gehenden Curvenelemente liegen daher auf derselben Seite der Tangentenebene; in der Umgebung von P hat die Fläche ausser P keinen Punkt mit der Tangentenebene gemein, und liegt ganz auf einer Seite der Tangentenebene. Dieses Verhalten zeigen die nicht geradlinigen Flächen zweiten Grades in allen ihren Punkten.

11. Eine abwickelbare Fläche ist der Ort der Tangenten ihrer Rückkehrkante (Cuspidalcurve); man kann daher die Coordinaten der Punkte einer solchen Fläche darstellen, indem man von den Gleichungen ihrer Rückkehrkante ausgeht. Sind dieselben

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u),$$

so sind die Gleichungen der Tangente dieser Curve im Punkte P

$$\frac{\xi - f_1}{f_1'} = \frac{\eta - f_2}{f_2'} = \frac{\zeta - f_1}{f_3'}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen variabeln Werth dieser Quotienten mit v, so erhält man die Coordinaten ξ, η, ζ irgend eines Punktes einer Tangente, d. i. also irgend eines Punktes der von diesen Tangenten beschriebenen Fläche durch die zwei Variabeln u, v ausgedrückt

1. $$\xi = vf_1' + f_1, \quad \eta = vf_2' + f_2, \quad \zeta = vf_3' + f_3.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = vf_1'' + f_1', \quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = vf_2'' + f_2', \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u} = vf_3'' + f_3',$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = f_1', \quad \frac{\partial\eta}{\partial v} = f_2', \quad \frac{\partial\zeta}{\partial v} = f_3'.$$

Mithin ist

2. $$p : q : r = \begin{vmatrix} f_2'' & f_2' \\ f_3'' & f_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_3'' & f_3' \\ f_1'' & f_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1'' & f_1' \\ f_2'' & f_2' \end{vmatrix}.$$

Ferner hat man

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = vf_1''' + f_1'', \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} = vf_2''' + f_2'', \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} = vf_3''' + f_3'',$$

3. $$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} = f_1'', \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} = f_2'', \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} = f_3'',$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = 0.$$

Aus 2. und 3. folgt

4. $$EG - F^2 = 0,$$

während $eg - f^2$ von Null verschieden ist. Daher schliessen wir (No. 8, 9): In jedem Punkte einer abwickelbaren Fläche ist eine Hauptkrümmung gleich Null; die Gerade, längs welcher die abwickelbare Fläche von der Tangentenebene berührt wird, ist also ein Hauptnormalschnitt, und enthält die minimale Krümmung; der zu dieser Geraden senkrechte Normalschnitt enthält die maximale Krümmung. Die beiden Richtungen, in welchen im Allgemeinen ein Wechsel des Vorzeichens der Krümmung statt hat, fallen hier in eine, nämlich in die Berührungsgerade zusammen.

Wählt man x und y selbst zu unabhängigen Variabeln, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

und daher

$$p = -\frac{\partial z}{\partial x} : N, \quad q = -\frac{\partial z}{\partial y} : N, \quad r = 1 : N,$$

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

folglich

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{N}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{N}, \quad G = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{N}.$$

5. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0.$$

Wir werden später in der Integralrechnung nachweisen, dass jede Fläche abwickelbar ist, sobald sie in allen ihren Punkten der Gleichung 5. genügt.

12. Die Coordinaten der Punkte einer normalen axialen Schraubenfläche werden durch die Gleichungen dargestellt

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = mu.$$

Aus denselben folgen die Werthe

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = m,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -x, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -\sin u, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = \cos u, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind

$$e = v^2 + m^2, \quad f = 0, \quad g = 1,$$

Das Bogenelement folgt hieraus zu

$$ds = \sqrt{v^2 + m^2}\cdot du.$$

Ferner ist

$$t^2 = v^2 + m^2.$$

Die Grössen p, q, r folgen aus

$$pt = -m \sin u, \quad qt = m \cos u, \quad rt = -v.$$

Ferner folgt

$$E = 0, \quad F = \frac{m}{\sqrt{v^2 + m^2}}, \quad G = 0.$$

Die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungen ist daher

$$\frac{v^2 + m^2}{\rho^2} - \frac{m^2}{v^2 + m^2} = 0;$$

sie liefert für ρ_1 und ρ_2 die beiden Werthe

$$\pm \frac{v^2 + m^2}{m}.$$

Die Hauptkrümmungen sind also dem absoluten Betrage nach gleich der Torsion der durch den Punkt auf der Schraubenfläche construirbaren coaxialen Schraubenlinie.

Die Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen wird

$$-(v^2 + m^2) + k^2 = 0$$

und liefert

$$k = \pm \sqrt{v^2 + m^2}.$$

Der positive Werth von k gehört zum positiven Hauptkrümmungsradius.

Für den Winkel der auf der Fläche liegenden Geraden $z = mu$, welche einen Normalschnitt von der Krümmung Null enthält, und der Hauptkrümmungsrichtung k_1 erhält man aus No. 10, 1

$$\operatorname{tang} \vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Die Krümmungsrichtungen durchschneiden also die Geraden der Fläche unter dem constanten Winkel von 45°.

13. Die Coordinaten der Punkte der centralen Fläche zweiten Grades

1. $$f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

können durch die Parameter u, v ausgedrückt werden, die den Gleichungen genügen

$$\frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} + \frac{z^2}{c+u} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} - 1 = 0.$$

Die Parameterlinien sind die Schnitte von f mit confocalen Flächen. Die dem Punkte P zugehörigen Parameter sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+w} + \frac{y^2}{b+w} + \frac{z^2}{c+w} = 1.$$

In Rücksicht auf $f = 0$ findet man

$$x^2 + y^2 + z^2 = u + v + a + b + c,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (u + v + a + b + c)(a + b + c) + uv - ab - ac - bc.$$

Hieraus und aus 1. folgen die Coordinaten

$$x^2 = \frac{a(c-b)}{d}(u+a)(v+a),$$

$$y^2 = \frac{b(a-c)}{d}(u+b)(v+b), \quad \text{wobei } d = (b-c)(a-c)(b-a),$$

$$z^2 = \frac{c(b-a)}{d}(u+c)(v+c);$$

daher ist

$$2\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{u+a}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{u+b}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{z}{u+c},$$

$$2\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{x}{v+a}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{v+b}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v+c},$$

$$e = \frac{u(u-v)}{4U}, \quad f = 0, \quad g = \frac{v(v-u)}{4V},$$

wobei $U = (u+a)(u+b)(u+c)$, $V = (v+a)(v+b)(v+c)$.

Ferner findet sich

$$pt = \frac{dx^2yz(u-v)}{aUV}, \quad qt = \frac{dxy^2z(u-v)}{bUV}, \quad rt = \frac{dxyz^2(u-v)}{cUV}$$

$$t = dxyz\frac{u-v}{4UV}\sqrt{\frac{uv}{abc}},$$

$$p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad r = \frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

Weiter ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{x}{(u+a)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\frac{y}{(u+b)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\frac{z}{(u+c)^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{a(c-b)}{4d}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{b(a-c)}{4d}\cdot\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{c(b-a)}{4d}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{x}{(v+a)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -\frac{y}{(v+b)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\frac{z}{(v+c)^2},$$

$$E = \frac{v-u}{4U}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad F = 0, \quad G = \frac{u-v}{4V}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

Für die Hauptkrümmungsrichtungen ist $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, sie fallen daher mit den Tangenten der Parameterlinien zusammen; diese letzteren werden aus diesem Grunde als die Krümmungslinien von f bezeichnet. Die Hauptkrümmungen sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{abc}{uv}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{uv}}.$$

14. Für Rotationsflächen, deren Achse in die Z-Achse fällt, nehmen wir den Radius eines Parallelkreises und den Arcus des Winkels, den er mit der XZ-Ebene bildet, zu Parametern u und v; dann sind die Gleichungen

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u).$$

Daher erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \varphi';$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \varphi'';$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sin v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \cos v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial^1 x}{\partial v_2} = -u \cos v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -u \sin v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0;$$

$$e = 1 + \varphi'^2; \quad f = 0; \quad g = u^2; \quad t = u\sqrt{1 + \varphi'^2};$$

$$p = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\cos v; \quad q = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\sin v; \quad r = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}};$$

$$E = \frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}; \quad F = 0; \quad G = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot u.$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen fallen in den Meridian und den Parallelkreis; die Hauptkrümmungen sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\varphi'}{(1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{u}.$$

§ 11. Einhüllende Curven und Flächen.

1. Wenn die Gleichung einer ebenen Curve eine unbestimmte Grösse (Parameter) α enthält, so ändern sich im Allgemeinen Lage und Gestalt der Curve, wenn man dem Parameter α nach einander verschiedene Werthe ertheilt. Giebt man α einen kleinen Zuwachs $\Delta\alpha$, so geht die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ in die neue Curve $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$ über. Beide Curven haben reale oder complexe Schnittpunkte; wir fassen einen derselben P_1 ins Auge. Verschwindet $\Delta\alpha$, so nähert sich P_1 im Allgemeinen einer bestimmten Grenzlage P.

2. Ist die Curvengleichung auf α reducirt,

$$\varphi(x, y) = \alpha$$

und φ eine eindeutige Function von x und y, so haben zwei Curven, die zu verschiedenen Werthen von α gehören, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt. Denn die Gleichungen

$$\varphi(x, y) = \alpha,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha + \Delta\alpha,$$

sind für endliche Werthe von x und y nicht vereinbar.

3. Wenn φ eine mehrdeutige Function ist, so besteht die Curve $\varphi(x, y) = \alpha$ aus zwei oder mehreren Abschnitten, welche den verschiedenen Werthsystemen φ entsprechen. Die Curve z. B.

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha$$

ist eine Parabel mit dem Parameter α. Die beiden Abschnitte gehören den Gleichungen zu

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha, \quad x - \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha,$$

wobei die Wurzel in beiden Gleichungen positiv zu nehmen ist. Diese Abschnitte werden durch die Punkte getrennt, für welche $x^2 - y^2 = 0$; die Coordinaten dieser Punkte sind

$$x = \alpha, \quad y = \pm\alpha.$$

4. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ die verschiedenen Werthe der $n$deutigen Function φ, so besteht die Curve $\varphi = \alpha$ aus den Abschnitten

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \alpha, \ldots \varphi_n = \alpha.$$

Die Theile zweier Curven

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_i = \alpha + \Delta\alpha$$

haben keinen endlichen Schnittpunkt; ein Schnittpunkt der beiden Curven

$$\varphi = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha + \Delta\alpha$$

kann daher nur zwei Abschnitten φ_i und φ_k mit verschiedenem Index zugehören. Wir betrachten den Schnittpunkt der Abschnitte

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_k = \alpha + \Delta\alpha.$$

Nähert sich $\Delta\alpha$ der Grenze Null, so erhalten φ_i und φ_k denselben Werth α. Bezeichnen wir die Grenzpunkte zweier Abschnitte einer Curve als Verzweigungspunkte der Curve (womit keineswegs gesagt sein soll, dass in diesen Punkten verschiedene Curvenzweige in auffälliger Weise zusammenlaufen), so ergiebt sich hieraus: Die Grenzlagen für die Schnittpunkte der Curven $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \alpha + \Delta\alpha$ für ein verschwindendes $\Delta\alpha$ sind die Verzweigungspunkte der Curve $\varphi = \alpha$.

Die Bahn, welche die Verzweigungspunkte der Curve $\varphi = \alpha$ beschreiben, wenn α sich willkürlich ändert, nennen wir die Verzweigungscurve des Curvensystems $\varphi = \alpha$.

5. Ist φ eine $n$deutige Function, so geben wir der Gleichung der Curve die Gestalt

1. $$f(x, y, \alpha) \equiv (\varphi_1 - \alpha)(\varphi_2 - \alpha) \ldots (\varphi_n - \alpha) = 0,$$

worin sämmtliche Coefficienten der Potenzen von α eindeutige Functionen sind. Die Bedingung dafür, dass zwei von den φ_i zusammenfallen, ist

2. $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Denn man hat sofort

3. $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{f}{\varphi_1 - \alpha} - \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} - \frac{f}{\varphi_3 - \alpha} - \ldots - \frac{f}{\varphi_n - \alpha}.$$

Die Function f verschwindet, wenn man für α einen der Werthe $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ setzt. Für $\alpha = \varphi_i$ verschwinden alle Glieder der rechten Seite von 3., mit Ausnahme des Gliedes $f : (\varphi_i - \alpha)$, weil alle genannten den Faktor $(\varphi_i - \alpha)$ haben. Soll nun für irgend einen Werth von φ_i die rechte Seite von 3. verschwinden, so muss das Glied $f : (\varphi_i - \alpha)$ den Faktor $(\varphi_i - \alpha)$, also f den Faktor $(\varphi_i - \alpha)^2$ enthalten, w. z. b. w.

6. Ohne Rücksicht darauf, ob die Function $f(x, y, \alpha)$ algebraisch für α ist, oder nicht, ergiebt sich die Gleichung der Verzweigungscurve in folgender Weise; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, dass x, y und α in f nur in eindeutigen Verbindungen vorkommen.

Der Schnittpunkt der Curven

$$f(x, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

befriedigt auch die Gleichung

$$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Geht man hierin zur Grenze für ein verschwindendes $\Delta\alpha$ über, so erhält man: Ist $f(x, y, \alpha)$ eine eindeutige Function von x, y, und α, so wird die Gleichung der Verzweigungscurve des Curvensystems $f(x, y, \alpha) = 0$ durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen gewonnen

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

7. Die Richtung der Tangente in einem Punkte der Verzweigungscurve wird erhalten, indem man

1. $$f(x, y, \alpha) = 0$$

unter der Voraussetzung differenzirt, dass darin α eine durch die Gleichung

2. $$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

definirte Function von x und y ist. Hiernach ergiebt sich

3. $$y' = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right).$$

In Folge der Gleichung 2. reducirt sich dieser Werth auf

4. $$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

ausser in dem Falle, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind

5. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Der letztere Fall ist durchaus kein seltener Ausnahmefall. Wir werden später, bei Gelegenheit der Differentialgleichungen, leicht herzustellende Gruppen von Curven kennen lernen, bei welchen die Gleichungen 5. für alle Punkte der Verzweigungscurve erfüllt sind.

Die Gleichungen 5. sagen aus, dass die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ einen Doppelpunkt hat (Differentialr. § 15); die Verzweigungscurve erscheint daher als die Curve, welche die Doppelpunkte des Curvensystems $f(x, y, \alpha) = 0$ enthält.

Durch Differentiation der Curvengleichung No. 5, 1 nach x und y ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dots$$

Für einen Punkt der Verzweigungscurve verschwinden sämmtliche Quotienten $f:(\varphi_i - \alpha)$; wenn nun keiner der Differentialquotienten $\partial \varphi_i : \partial x$, $\partial \varphi_i : \partial y$ unendlich gross ist, so tritt der Fall ein

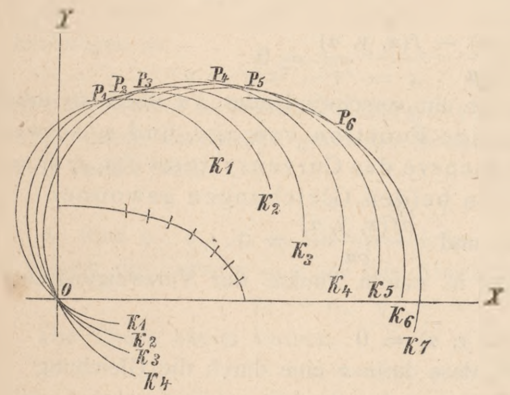
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wenn die Gleichungen 5. nicht bestehen, so fällt nach 4. die Tangente der Verzweigungscurve in einem Punkte P derselben mit der Tangente der durch P gehenden Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ zusammen, die Verzweigungscurve wird daher in jedem ihrer Punkte von einer Curve des Systems berührt. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Verzweigungscurve als die Einhüllende des Curvensystems

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

8. Beispiele. A. Ist

1. $$f = x^2 + y^2 - 2a\cos\alpha \cdot x - 2b\sin\alpha \cdot y = 0,$$



(M. 491.)

so besteht das Curvensystem aus Kreisen, die den Nullpunkt enthalten und deren Centra auf dem Perimeter einer Ellipse mit den Halbachsen a und b liegen. Man erhält

2. $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2a\sin\alpha \cdot x - 2b\cos\alpha \cdot y = 0.$$

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

3. $$\cos\alpha = \frac{(x^2 + y^2)\,ax}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}, \quad \sin\alpha = \frac{(x^2 + y^2)\,by}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}.$$

Quadrirt man, addirt, und beseitigt den Nenner, so folgt

$$4a^2x^2 + 4b^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktcurve der Ellipse mit den Halbachsen $2a$ und $2b$. Aus 1. folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - 2a\cos\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - 2b\sin\alpha;$$

wenn man die Werthe 3. einsetzt, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(b^2 - a^2)\,xy^2}{a^2x^2 + b^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(a^2 - b^2)\,x^2y}{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

Diese Werthe verschwinden nur für den isolirten Punkt der Fusspunktcurve

$$x = y = 0.$$

B. Für die Sinuscurven

4. $$f = y + m\alpha - \sin(x + n\alpha) = 0$$

hat man

5. $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = m - n\cos(x + n\alpha) = 0.$$

Hieraus folgt

$$x + n\alpha = Arc\cos\frac{m}{n},$$

und wenn man dies in f einsetzt

6. $$ny + m\left(Arc\cos\frac{m}{n} - x\right) = \sqrt{n^2 - m^2}.$$

Diese Gleichung stellt eine Schaar gleichweit von einander entfernter paralleler Geraden dar.

C. Die Gleichung

$$f = x^2 - 2\alpha y - \alpha^2 - b = 0$$

ergiebt für veränderliche α ein System von Parabeln, welche die Y-Achse zur Symmetrieachse haben. Reducirt man auf α, so ergiebt sich

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = \alpha.$$

Hieraus folgt die Gleichung der Einhüllenden

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

D. Die Gleichung der Einhüllenden des Systems von Geraden

$$f = 2x + 3\alpha y + \alpha^3 = 0$$

ist die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln dieser cubischen Gleichung; die Einhüllende ist daher die semicubische Parabel

$$x^2 + y^3 = 0.$$

E. Bei den Untersuchungen über Differentialgleichungen werden wir dem Curvensysteme begegnen

7. $$(\varphi_1 - \alpha)(\varphi_2 - \alpha) = 0,$$

wobei φ die zweiwerthige Function bezeichnet

$$\varphi = l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,Arc\,tang\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right).$$

Die Verzweigungscurve ist

$$x - y = 0.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x(2x - y + \sqrt{x^2 - xy})}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}}.$$

Diese beiden Differentialquotienten sind für die Punkte der Verzweigungscurve nicht unendlich gross; folglich hat die Curve 7. in ihrem Schnittpunkte mit der Verzweigungscurve einen Doppelpunkt, die Verzweigungscurve kann nicht als die Einhüllende des gegebenen Curvensystems bezeichnet werden.

F. Wenn in der Gleichung 7.

$$\varphi = f + \sqrt{\psi},$$

wobei f und ψ ganze rationale Functionen von x und y sein mögen, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{\psi}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2\sqrt{\psi}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Die Verzweigungscurve ist

$$\psi = 0.$$

Für die Punkte derselben sind $\partial\varphi : \partial x$ und $\partial\varphi : \partial y = 0$ unendlich gross. Die rationale Curvengleichung ist

$$(f - \alpha)^2 - \psi = 0;$$

aus dieser Gleichung folgt

$$2(f - \alpha)\,df - d\psi = 0.$$

Für die Punkte der Verzweigungscurve ist $f = \alpha$, daher bestimmt sich die Richtung einer Systemcurve in dem Punkte, den sie mit der Verzweigungscurve gemein hat, aus der Gleichung

$$d\psi = 0,$$

stimmt daher mit der Richtung überein, welche die Verzweigungscurve in demselben Punkte hat.

9. Wenn eine Curvengleichung

$$1. \qquad f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n) = 0$$

n unbestimmte Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ enthält, die durch $n - 1$ Gleichungen verbunden sind

$$2. \quad \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \quad \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \ldots \ldots \varphi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0,$$

so kann man aus den Gleichungen 2. alle Parameter durch einen derselben, z. B. α_1 ausdrücken; führt man diese Werthe in 1. ein, so enthält 1. nur noch den unbestimmten Parameter α_1, und man ist damit zu dem vorigen Falle zurückgekehrt. Statt dessen kann man auch folgendes Verfahren einschlagen: Man differenzirt 1. und 2. nach den Parametern, bildet also die Gleichungen

$$3. \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\,d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\,d\alpha_n = 0,\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2}\,d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_n}\,d\alpha_n = 0,\\
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2}\,d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_n}\,d\alpha_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_2}\,d\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_n}\,d\alpha_n = 0.
\end{aligned}$$

Aus den n Gleichungen 3. eliminirt man die Differentiale $d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3, \ldots$ und erhält

$$4. \quad \begin{vmatrix}
\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \alpha_n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Aus den $(n + 1)$ Gleichungen 1., 2., 4. hat man schliesslich die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu eliminiren; die Resultante ist die gesuchte Gleichung der Einhüllenden.

10. Wenn die Gleichung einer Fläche

$$1. \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0$$

einen unbestimmten Parameter α enthält, so genügt die Schnittcurve der Flächen

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + \delta) = 0$$

auch der Gleichung

$$2. \qquad \frac{f(x, y, z, \alpha + \delta) - f(x, y, z, \alpha)}{\delta} = 0.$$

Die Grenzlage Γ, welcher sich die Schnittcurve der beiden Flächen bei verschwindendem δ nähert, genügt daher der Gleichung 1. und der durch Grenzübergang aus 2. sich ergebenden Gleichung

$$3. \qquad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Die Fläche, welche die Curve Γ beschreibt, wenn α die Zahlenreihe durchläuft, wird als die einhüllende Fläche der den unendlich vielen Werthen von α entspringenden Flächen $f(x, y, z, \alpha) = 0$ bezeichnet.

Man kann 1. als Gleichung der Einhüllenden betrachten, wenn man hierin α als eine Function von x, y, z ansieht, die durch die Gleichung 3. definirt ist. Die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ ergeben sich daher aus

$$4. \quad \begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,
\end{aligned}$$

Für jeden Punkt einer Curve Γ ist $\partial f : \partial \alpha = 0$; daher reduciren sich die Gleichungen 4. auf die Gleichungen, aus welchen sich $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ für die eingehüllte Fläche $f(x, y, z, \alpha)$ bestimmt. Da nun durch die partialen Differentialquotienten von z die Stellungswinkel der Tangentenebene bestimmt werden, so folgt: Die Fläche, welche eine einfach unendliche (d. i. durch Veränderung eines Parameters erzeugte) Reihe von Flächen einhüllt, berührt jede Eingehüllte längs der Curve, die sie mit ihr gemein hat.

Jede Curve Γ wird als eine Charakteristik*) der einhüllenden Fläche bezeichnet; jedem Werthe des Parameters α entspricht eine Charakteristik $\Gamma(\alpha)$. Auf jeder der eingehüllten Flächen liegen zwei unendlich nahe Charakteristiken; nämlich die Durchschnitte dieser Fläche mit der in der Reihe der eingehüllten unmittelbar vorangehenden und der mit der nächstfolgenden; daher schneiden sich je zwei benachbarte Charakteristiken. Die Gleichungen der Charakteristik $\Gamma(\alpha)$ sind

$$5. \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad 6. \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0;$$

die der Charakteristik $\Gamma(\alpha + \delta)$ sind

$$7. \quad f(x, y, z, \alpha + \delta) = 0, \qquad 8. \quad \left(\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha+\delta} = 0,$$

wobei in der letzten Gleichung angedeutet sein soll, dass man nach der Differentiation α durch $\alpha + \delta$ zu ersetzen hat. Convergirt δ gegen den Grenzwerth Null, so kann man, da alsdann die Charakteristik 7., 8. auf der Eingehüllten 5. liegt, die Gleichung 7. durch

$$\lim \frac{f(x, y, z, \alpha + \delta) - f(x, y, z, \alpha)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

ersetzen; also wird dieselbe mit 6. identisch.

Statt des Systemes 7. und 8. hat man nun das System 6. und 8.; hierin kann man 8. ersetzen durch

$$\lim \frac{f'(\alpha + \delta) - f'(\alpha)}{\delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0,$$

wobei f' abkürzend für den Differentialquotienten von f nach dem Parameter gesetzt worden ist.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte auf einander folgender Charakteristiken hat man daher die Gleichungen

*) MONGE, Application de l'analyse à la géom., 5. éd. par Lionville, Paris 1850, pag. 29 u. f.

9. $$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Die Raumcurve, welche diese Durchschnittspunkte enthält, ist eine Rückkehrkante der Einhüllenden. Sie ist der gemeinsame Durchschnitt der Einhüllenden mit den Flächen, die sich durch Elimination von α aus $f = 0$ und $\partial^2 f : \partial\alpha^2 = 0$, bez. aus $\partial f : \partial\alpha = 0$ und $\partial^2 f : \partial\alpha^2 = 0$ ergeben.

11. A. Als Beispiel wählen wir zunächst die Fläche, welche alle Kugeln einhüllt, deren Centra auf einer zur X- und Y-Achse symmetrischen Ellipse liegen und die durch das Centrum der Ellipse gehen. Die Gleichungen dieser Kugeln haben die Form

1. $$f \equiv x^2 + y^2 - 2xa\cos\alpha - 2yb\sin\alpha + z^2 = 0,$$

wobei α der unbestimmte Parameter ist. Aus 1. erhält man

2. $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv xa\sin\alpha - yb\cos\alpha = 0,$$

3. $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \equiv xa\cos\alpha + yb\sin\alpha = 0.$$

Aus 1. und 2. folgt durch Elimination von α die Gleichung der Eingehüllten zu

4. $$4a^2x^2 + 4b^2y^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktfläche des Ellipsoids mit den Halbachsen $2a$, $2b$, $c = 0$. Sie hat im Nullpunkte einen ausgezeichneten Punkt. Betrachtet man in 1. und 2. den Parameter α als gegeben, so sind 1. und 2. die Gleichungen der Charakteristik $\Gamma(\alpha)$. Da nun unter dieser Voraussetzung die Gleichung 2. eine Ebene darstellt, die durch die Z-Achse geht, so folgt, dass die Charakteristiken Kreise sind normal zur Ebene der Ellipse; zugleich ist ersichtlich, dass die Ebene einer Charakteristik normal zu dem Ellipsendiameter ist, der zu dem durch das Centrum der betreffenden Kugel gehenden conjugirt ist. Die Elimination von α aus 2. und 3. ergiebt

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0;$$

diese Gleichung wird nur vom Nullpunkte erfüllt; die Rückkehrkante der Einhüllenden schrumpft daher in diesem Falle zu einem Punkte zusammen; die Einhüllende zeigt in dieser Hinsicht ein ähnliches Verhalten wie unter den Abwickelbaren der Kegel, dessen Rückkehrkante ebenfalls nur aus einem Punkte, der Kegelspitze, besteht.

B. Suchen wir ferner die Fläche auf, welche alle Flächen II. O. umhüllt, deren Gleichungen von der Form sind

5. $$K \equiv K_1 + 2\alpha K_2 + \alpha^2 K_3 = 0,$$

wobei K_1, K_2, K_3 Functionen zweiten Grades bezeichnen. Man hat

6. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial K}{\partial \alpha} \equiv K_2 + \alpha K_3,$$

7. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} \equiv K_3.$$

Eliminirt man α aus $K = 0$ und $\partial K : \partial\alpha = 0$, so erhält man

8. $$K_1K_3 - K_2^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher von der vierten Ordnung und enthält die Schnittcurven der Fläche II. O. $K_2 = 0$ mit $K_1 = 0$ und $K_3 = 0$; aus 7. folgt, dass die letztere Curve die Rückkehrkante der Einhüllenden ist.

C. Enthält die Gleichung einer eingehüllten Fläche den Parameter α nur linear, ist sie also von der Form

$$\varphi \equiv \varphi_1 + \alpha\varphi_2 = 0,$$

so degenerirt die Einhüllende zu der Curve, welche φ mit $\varphi_2 = 0$ gemein hat, d. i. zu der Schnittcurve von $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$; die Gesammtheit der Flächen φ bildet dann ein Flächenbüschel, dessen Träger die Schnittcurve der Flächen φ_1 und φ_2 ist.

12. Enthält die Gleichung einer Fläche $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ zwei willkürliche Parameter α und β, so kann man nach der Grenzlage fragen, welcher die Schnittpunkte der Flächen

1. $f(\alpha, \beta) = 0$, 2. $f(\alpha + \delta, \beta) = 0$, 3. $f(\alpha, \beta + \varepsilon) = 0$

sich nähern, wenn δ und ε verschwinden. Diese Punkte sind offenbar die Schnittpunkte der Grenzlagen, welchen die Schnittcurven von 1. und 2. und von 1. und 3. sich nähern, wenn δ und ε verschwinden, werden daher aus den Gleichungen bestimmt

4. $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, 5. $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, 6. $\dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0$.

Wenn α und β zugleich um die verschwindenden Beträge $d\alpha$ und $d\beta$ sich ändern, so ändert sich die Function f um

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}d\beta,$$

die Gleichung 1. geht daher über in

7. $$f + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}d\beta = 0.$$

Die Schnittpunkte von 4., 5. und 6. erfüllen auch die Gleichung 6., und wir schliessen daher: Durch die Schnittpunkte der Flächen 4., 5., 6. gehen alle Flächen, welche aus f durch verschwindend kleine Aenderungen der Parameter α und β hervorgehen. Aendern sich α und β stetig, so beschreiben die Schnittpunkte von 4., 5. und 6. eine Fläche, die als die Einhüllende des Systems der Flächen $f(x, y, z, \alpha, \beta)$ bezeichnet wird. Während das System $f(x, y, z, \alpha) = 0$, dessen Einhüllende in No. 4 bestimmt wurde, nur eine einfach unendliche Reihe von Flächen enthält, besteht das System $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ aus einer zweifach unendlichen Anzahl von Flächen.

Die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ für einen Punkt der Einhüllenden werden aus 1. durch Differentiation gewonnen, wenn man darin α und β als Functionen von x, y, z ansieht, die durch 5. und 6. definirt werden. Man hat daher zur Bestimmung dieser Differentialquotienten die beiden Gleichungen

8. $$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}d\beta = 0,$$

9. $$\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}d\beta = 0,$$

Die Differentiale $d\alpha$ und $d\beta$ sind durch Differentiation aus 5. und 6. zu entnehmen, und zwar für 8. unter Voraussetzung eines constanten y, für 9. unter Voraussetzung eines constanten x.

Aus den Gleichungen 5. und 6. folgt, dass die mit $d\alpha$ und $d\beta$ multiplicirten Glieder verschwinden, und daher die gesuchten partialen Differentialquotienten für einen Punkt der Einhüllenden dieselben Werthe haben, wie für die diesen Punkt erzeugende Fläche $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. Hieraus folgt sofort: Jede Eingehüllte wird von der Einhüllenden in dem Punkte berührt, den sie erzeugt.

13. A. Wir betrachten zunächst die Einhüllende aller Kugeln, deren Centra auf einem Ellipsoide gelegen sind, und die durch das Centrum des Ellipsoids gehen.

Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoids, so sind die Coordinaten jedes Ellipsoidpunktes in der Form darstellbar

$$a\cos\alpha\cos\beta, \quad b\cos\alpha\sin\beta, \quad c\sin\alpha,$$

wobei α und β willkürlich sind. Die Gleichung einer Eingehüllten ist daher

1. $f = x^2 + y^2 + z^2 - 2a\cos\alpha\cos\beta\cdot x - 2b\cos\alpha\sin\beta\cdot y - 2c\sin\alpha\cdot z = 0.$

Hieraus findet man

2. $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\alpha} = a\sin\alpha\cos\beta\cdot x + b\sin\alpha\sin\beta\cdot y - c\cos\alpha\cdot z,$$

3. $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\beta} = a\cos\alpha\sin\beta\cdot x - b\cos\alpha\cos\beta\cdot y.$$

Zur Elimination von α und β aus den Gleichungen 1. $\partial f : \partial\alpha = 0$ und $\partial f : \partial\beta = 0$ berechnen wir zunächst aus den beiden letzten

4. $$\cos\beta = \frac{ax}{a^2x^2 + b^2y^2}\cdot cz\cot\alpha, \quad \sin\beta = \frac{by}{a^2x^2 + b^2y^2}\cdot cz\cot\alpha.$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht

5. $$\cot^2\alpha = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{c^2z^2}.$$

Substituirt man 4. in 1., so erhält man

6. $$\sin\alpha = \frac{2cz}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aus 5. und 6. erhält man die Gleichung der Einhüllenden

$$4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher die Fusspunktfläche eines Ellipsoids, dessen Achsen doppelt so gross sind, wie die Achsen des gegebenen Ellipsoids.

B. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 Functionen zweiten Grades, so wird die Einhüllende der Flächen

$$K = K_1 + \alpha K_2 + \alpha\beta K_3 + \beta K_4 = 0$$

durch Elimination von α und β aus $K = 0$ und aus

$$\frac{\partial K}{\partial\alpha} = K_2 + \beta K_3 = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial\beta} = \alpha K_3 + K_4 = 0$$

erhalten; ihre Gleichung ergiebt sich zu

$$K_1K_3 - K_2K_4 = 0,$$

und ist daher eine Fläche vierten Grades, die durch die Schnittcurven der Flächen K_1 und K_3 mit den Flächen K_2 und K_4 geht.

§ 12. Bestimmung einiger Grenzwerthe.

$$\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 0^\infty, \quad \infty^0\right).$$

1. Wenn für einen Werth $x = \xi$ die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ verschwinden, so verstehen wir unter $f(\xi):\varphi(\xi)$ den Grenzwerth, dem der Quotient $f(\xi+\delta):\varphi(\xi+\delta)$ sich nähert, wenn δ gegen die Grenze Null convergirt, haben daher für das Symbol $f(\xi):\varphi(\xi)$ die definirende Gleichung

1. $$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim\frac{f(\xi+\delta)}{\varphi(\xi+\delta)}.$$

Aus der Identität

$$\frac{f(\xi+\delta)}{\varphi(\xi+\delta)} = \frac{f(\xi+\delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi+\delta) - \varphi(\xi)}{\delta}$$

schliessen wir

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim\frac{f(\xi+\delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi+\delta) - \varphi(\xi)}{\delta}.$$

Der Uebergang zur Grenze liefert

2. $$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Wenn also für einen Werth von x die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gleichzeitig verschwinden, so ist für diesen Werth der Quotient $f(x):\varphi(x)$ gleich dem Quotienten der derivirten Functionen $f'(x):\varphi'(x)$.

Wenn der Quotient $f'(x):\varphi'(x)$ sich nach Beseitigung gleicher Faktoren im Zähler und Nenner in den irreductiblen Quotienten $g(x):h(x)$ verwandelt, und $g(x)$ und $h(x)$ für $x = \xi$ verschwinden, so ist

$$\frac{g(\xi)}{h(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)},$$

mithin

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}, \quad \text{u. s. w.}$$

A. Setzt man $f(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $\varphi(x) = e^{cx} - e^{dx}$, so verschwinden f und φ für $x = 0$. Da nun

$$f'(x) = ae^{ax} - be^{bx}, \quad \varphi'(x) = ce^{cx} - de^{dx},$$

so ist

$$f'(0) = a - b, \quad \varphi'(0) = c - d,$$

und man hat daher

$$\frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{a-b}{c-d}.$$

B. Die Functionen $f(x) = x - \sin x$, $\varphi(x) = x - \operatorname{tang} x$ verschwinden ebenfalls für $x = 0$; man hat

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1},$$

daher ist

$$\frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = \frac{1}{2},$$

2. Der Grenzwerth, welchem sich der Quotient $f(x):\varphi(x)$ für einen Werth $x = \xi$ nähert, für welchen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich unendlich gross werden, kann nach der vorigen Regel bestimmt werden, wenn man benutzt

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} : \frac{1}{f(x)},$$

denn die Functionen $1:\varphi(x)$ und $1:f(x)$ verschwinden für $x = \xi$. Daher hat man

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)^2} : \frac{f'(\xi)}{f(\xi)^2} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)} : \left(\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)^2;$$

hieraus schliesst man

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

erhält also dieselbe Regel zur Bestimmung des Grenzwerthes wie im vorigen Falle.

Die Functionen $l\sin x$ und lx werden unendlich für $x = 0$; daher ist

$$\left(\frac{l\sin x}{lx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dl\sin x}{dx} : \frac{dlx}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{\cos x}{\sin x} : \frac{1}{x}\right)_{x=0} = \left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)_{x=0} = 1.$$

3. Wenn die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = \xi$ unendlich gross werden, so kann der Grenzwerth der Differenz

$$f(x) - \varphi(x)$$

für $x = \xi$ ebenfalls durch Anwendung der Regel 1. gefunden werden. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{f(x)} = g(x), \quad \frac{1}{\varphi(x)} = \psi(x),$$

so hat man

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) - g(x)}{g(x)\,\psi(x)}.$$

Für $x = \xi$ verschwinden $g(x)$ und $\psi(x)$, also auch Dividend und Divisor des zuletzt gewonnenen Quotienten. Daher hat man

$$f(\xi) - \varphi(\xi) = \frac{\psi'(\xi) - g'(\xi)}{g(\xi)\,\psi'(\xi) + \psi(x)\cdot g'(x)}.$$

Durch dieses Verfahren erhält man z. B. den Grenzwerth von

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

für $x = 0$; man hat $g(x) = x$, $\psi(x) = e^x - 1$; daher ist der gesuchte Grenzwerth gleich dem Grenzwerthe des Quotienten

$$\frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches verschwinden für $x = 0$; mithin hat man beide nochmals zu differenziren und erhält

$$\frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{x + 2}.$$

Der gesuchte Grenzwerth ist daher $\frac{1}{2}$.

4. Durch Anwendung der Regel in No. 1 lassen sich noch einige weitere Grenzwerthe bestimmen.

Wenn $f(x)$ für $x = \xi$ verschwindet, und $\varphi(x)$ für denselben Werth der Variabeln unendlich gross wird, so ist für $x = \xi$

1. $$lim\, f(x)\cdot\varphi(x) = lim\, f(x) : \frac{1}{\varphi(x)},$$

2. $$lim\, \varphi(x)^{f(x)} = e^{lim\, f(x)\, l\varphi(x)} = e^{lim\, f(x) : [1 : l\varphi(x)]},$$

3. $$lim[1 + f(x)]^{\varphi(x)} = lim\, e^{\varphi(x)\, l[1+f(x)]} = lim\, e^{l[1+f(x)] : [1 : \varphi(x)]}.$$

Hierdurch sind diese Grenzwerthe auf den Grenzwerth des Quotienten zweier verschwindenden Functionen zurückgeführt.

§ 13. Die TAYLOR'sche Reihe.

1. Im Folgenden soll die Frage beantwortet werden, ob man im Stande ist, aus den Werthen, welche eine Function und ihre Differentialquotienten für einen bestimmten Werth $x = \xi$ der Variabeln haben, auf den Werth zu schliessen, den die Function für einen andern Werth der Variabeln $x = \xi + h$ annimmt, ob es also und bez. unter welchen Bedingungen es möglich ist, $f(\xi + h)$ aus

$$h,\ f(\xi),\ f'(\xi),\ f''(\xi),\ f'''(\xi),\ f''''(\xi)\ \ldots$$

zu berechnen. Um einen Anhalt zu gewinnen, beantworten wir diese Frage zunächst für den einfachsten Fall, für eine algebraische ganze Function $n$ten Grades, und untersuchen dann, wie weit sich das Resultat auf andere Functionen übertragen lässt. Ist $f(x)$ eine ganze Function, so ist $f(\xi + h)$ eine ganze Function von h, so dass wir setzen können

$$f(\xi + h) = \varphi(h),$$

wo φ eine ganze Function bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{d(\xi + h)^n}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{dh^n}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n \varphi(h)}{dh^n}\right)_{h=0} = \varphi^n(0).$$

Es genügt also, zu untersuchen, ob man

$$\varphi(h) \text{ aus } h,\ \varphi(0),\ \varphi'(0),\ \varphi''(0),\ \varphi'''(0)\ \ldots$$

berechnen kann; man kann dann diese Grössen der Reihe nach durch

$$f(\xi + h),\ h,\ f(\xi),\ f'(\xi),\ f''(\xi),\ f'''(\xi)\ \ldots$$

ersetzen. — Ist nun

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \sum_0^n a_k x^k,$$

so haben wir

$$\varphi'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = \sum_1^n k a_k x^{k-1},$$

$$\varphi''(x) = 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots = \sum_1^n k(k-1)\cdot a_k x^{k-2},$$

$$\varphi'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4 x + \ldots = \sum_3^n k(k-1)(k-2)\, a_k x^{k-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus finden wir

$$\varphi(0) = a_0,\quad \varphi'(0) = 1\cdot a_1,\quad \varphi''(0) = 1\cdot 2\cdot a_2,\quad \varphi'''(0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3,$$
$$\varphi^n(0) = 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)\,n\cdot a_n,\quad \varphi^{n+1}(0) = \varphi^{(n+2)}(0) = \ldots = 0.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

1. $$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(0) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(0) + \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi''''(0) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\,..\,n}\varphi^n(0).$$

Hieraus folgt weiter

2. $$f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\xi) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(\xi) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\,\ldots\, n}f^n(\xi).$$

2. Um die Existenz einer entsprechenden Formel für andere Functionen nachzuweisen, schalten wir zunächst folgende Bemerkung ein.

Wenn die Function $F(x)$ für $x = \xi$ und $x = \xi + h$ verschwindet und innerhalb dieser Grenzen nicht unstetig ist, so kann $F(x)$ von $x = \xi$ bis $x = \xi + h$ nicht beständig wachsen oder abnehmen, sondern muss wenigstens einmal von Wachsthum zu Abnahme oder von Abnahme zu Wachsthum übergehen; es giebt daher unter der ausgesprochenen Voraussetzung einen zwischen ξ und $\xi + h$ gelegenen Werth der Variabeln x, für welchen $F'(x)$ verschwindet. Bezeichnet man durch ϑ einen positiven echten, nicht näher bestimmten Bruch, so ist also

$$F'(\xi + \vartheta h) = 0.$$

3. Unter $f(x)$ irgend eine Function, vorläufig noch ohne jede Einschränkung, verstehend, setzen wir

1. $$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{1\cdot 2}f''(\xi) + \frac{(x-\xi)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(\xi) + \ldots + \frac{(x-\xi)^n}{1\cdot 2\,..\,n}\cdot f^n(\xi) + R,$$

worin x und ξ als willkürliche Variable zu betrachten sind, und suchen den Rest R als Function von ξ und $h = x - \xi$ so zu bestimmen, dass diese Gleichung erfüllt wird. Aus Analogie mit dem Baue der übrigen Glieder setzen wir zunächst

$$R = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{1\cdot 2\,..\,n(n+1)}\cdot P.$$

Die Function der Variabeln z

2. $$f(x) - f(z) - (x - z)f'(z) - \frac{(x-z)^2}{1\cdot 2}f''(z) - \ldots - \frac{(x-z)^n}{1\cdot 2\,..\,n}f^n(z) - \frac{(x-z)^{n+1}}{1\cdot 2\,..\,(n+1)}\cdot P$$

verschwindet für $z = x$ und $z = \xi$; folglich verschwindet der erste Differentialquotient derselben für einen zwischen x und ξ liegenden Werth der Variabeln, den wir mit

3. $$\xi + \vartheta(x - \xi), \quad 0 < \vartheta < 1$$

bezeichnen können. Unter der Voraussetzung, dass alle Differentialquotienten von f bis zum $n$ten einschliesslich für jeden zwischen x und ξ liegenden Werth der Variabeln stetig und endlich sind, erhält man als Differentialquotient von 2.

$$-\frac{(x-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{n+1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} P.$$

Da nun dieser Ausdruck für den obigen Werth von z verschwindet, so hat man

4. $$P = f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)].$$

Ersetzt man hier und in 1. $x - \xi$ durch h, so erhält man schliesslich

5. $$f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\xi) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(\xi) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(\xi) + \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n+1} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Ersetzt man ξ durch 0 und h durch x, so folgt

6. $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} f^{n+1}(\vartheta x).$$

Hieraus erkennen wir, dass wir, um die Reihe No. 1, 2 auf andere als auf ganze Functionen $n$ten Grades auszudehnen, ein Restglied hinzufügen müssen. Dieses Glied ist noch nicht völlig bestimmt, da es den unbestimmten Bruch ϑ enthält; wir sehen aber, dass es ein Produkt aus einem bekannten Faktor und aus dem Faktor $f^{n+1}(\xi + \vartheta h)$ ist, dessen numerischer Werth jedenfalls zwischen dem grössten und kleinsten Werthe liegt, den $f^{n+1}(x)$ annimmt, wenn die Variable von ξ auf $\xi + h$ wächst; und dies genügt für die wichtigen Anwendungen, die wir von dieser Formel machen werden.

Ehe wir hierzu übergehen, wollen wir noch eine andere Form für das Restglied mittheilen. Setzt man in 1.

$$R = \frac{(x-\xi)^{p+1}}{p+1} P,$$

und schliesst dann in derselben Weise weiter, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$-\frac{(x-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{n+1}(z) + (x-z)^p P$$

für einen zwischen x und ξ liegenden Werth von z verschwindet. Wird dieser Werth wieder mit $\xi + \vartheta(x - \xi)$ bezeichnet, so ist

$$x - z = x - \xi - \vartheta(x - \xi) = (x - \xi)(1 - \vartheta),$$

und man erhält somit

$$P = \frac{(x-\xi)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)],$$

folglich $$R = \frac{(x-\xi)^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(p+1)} f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)].$$

Setzt man $x - \xi = h$, so folgt

7. $$R = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(p+1)} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Nimmt man $p = n$, so kommt man auf die obige Form des Restes zurück; für $p = 0$ erhält man

8. $$R = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

3. Die Formel No. 2, 6 kann ohne Schwierigkeit auf Functionen von mehreren Variabeln ausgedehnt werden. Setzt man in

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(0) + R.$$

statt $f(t)$ die Function

$$f(t) = \varphi(x + th,\ y + tk,\ z + tl),$$

worin th, tk, tl willkürliche Aenderungen der Variabeln x, y, z bezeichnen, so ist

$$f(0) = \varphi(x, y, z).$$

Ferner ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial(x+th)} \cdot \frac{d(x+th)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial(y+tk)} \cdot \frac{d(y+tk)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial(z+tl)} \cdot \frac{d(z+th)}{dl}.$$

Beachtet man nun, dass

$$\frac{d(x+th)}{dt} = h, \quad \frac{d(y+tk)}{dt} = k, \quad \frac{d(z+tl)}{dt} = l,$$

und $$\frac{\partial\varphi}{\partial(x+th)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y+tk)} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial(z+tl)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so folgt

$$\frac{df}{dt} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(x + ht,\ y + kt,\ z + lt).$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{d^r f}{dt^r} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^r \varphi(x + ht,\ y + kt,\ z + lt).$$

Für $t = 0$ ergiebt sich insbesondere

$$f^r(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^r \varphi(x, y, z).$$

Setzt man der einfacheren Bezeichnung wegen für th, tk, tl der Reihe nach h, k, l, so erhält man hieraus

$$\varphi(x + h,\ y + k,\ z + l) = \varphi(x, y, z) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \varphi + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \varphi$$
$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(p+1)}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1} \varphi(x + \vartheta h,\ y + \vartheta k,\ z + \vartheta l).$$

Die Voraussetzung für die Geltung dieser Gleichung ist, dass sämmtliche Differentialquotienten bis zu denen $n$ter Ordnung inclusive endlich und stetig sind innerhalb des Gebiets x, y, z und $x + h$, $y + k$, $z + l$.

In gleicher Weise kann man

$$\varphi(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ x_3 + h_3, \ldots x_r + h_r)$$

als Reihe darstellen.

4. Auf Grund der Formeln in No. 2 und No. 3 entwickeln wir hier noch zwei Sätze, die wir im nächsten Abschnitte verwenden werden.

Wenn für einen bestimmten Werth der Variabeln einer Function $f(x)$ die Differentialquotienten, deren Ordnung unter r ist, verschwinden, und der $r$te nicht verschwindet, so kann man Δx immer so klein wählen, dass die Differenz $f(x + \Delta x) - f(x)$ dasselbe Zeichen hat, wie das Produkt $f^r(x)\Delta x^r$.

Nach der Voraussetzung ist

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1\cdot 2\ldots r} f^r(x)\cdot \Delta x^r + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(r+1)} f^{r+1}(x)\cdot \Delta x^{r+1} + \ldots$$

und daher

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r} f^r(x)\Delta x^r[1 + A\cdot\Delta x].$$

Hierin bezeichnet A einen Faktor, der nicht unendlich gross ist; daher kann man Δx immer so wählen, dass $A\cdot\Delta x$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, dass der Faktor $1 + A\cdot \Delta x$ also positiv ist.

Dem soeben bewiesenen Satze steht für Functionen mit mehreren Variabeln der folgende zur Seite: Wenn die partialen Differentialquotienten einer Function, deren Ordnung kleiner als r ist, für ein gegebenes Werthsystem der Variabeln $x, y, z, \ldots$ sämmtlich verschwinden und die der $r$ten Ordnung nicht sämmtlich verschwinden, so kann man die Grössen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ etc. immer so klein wählen, dass die Differenz

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

dasselbe Vorzeichen hat, wie die Grösse

$$\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^r f.$$

Denn man hat unter der angegebenen Voraussetzung

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots) = f(x, y, z) + \frac{1}{1\cdot 2\ldots r}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^r f + \ldots$$

und daher

$$f(x+\Delta x,\ldots) - f(x,\ldots) = \frac{1}{1\cdot 2\ldots r}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right)^r f\cdot\left(1+\frac{M}{N}\right).$$

Hierin ist M in Bezug auf $\Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots$ von der $(r+1)$ten Ordnung, N von der $r$ten Ordnung; der Quotient $M:N$ kann daher durch Verkleinerung von $\Delta x, \ldots$ kleiner als jede gegebene Zahl gemacht werden, insbesondere also so klein, dass $(1+M:N)$ positiv ist.

5. Wenn man in der Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n}f^n(x) + R$$

die Zahl n über alle Grenzen wachsen lassen kann, ohne dass die Bedingungen ihrer Gültigkeit verletzt werden, so hat man

$$f(x+h) = lim\left[f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot2\ldots n}f^n(x)\right] + lim R.$$

Hat nun bei unendlich wachsendem n der Rest R die Null zur Grenze, so ist

$$f(x+h) = lim\left[f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}f'''(x)+\ldots\right].$$

Man denkt sich durch die Punkte am Schlusse eine unbegrenzte Fortsetzung der Reihe angedeutet, und kann daher das Zeichen *lim* weglassen, so dass man hat

1. $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot2}f''(x)+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}f'''(x)+\frac{h^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f''''(x)+\ldots$

und unter denselben Voraussetzungen

2. $f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1\cdot2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}f'''(0)+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f''''(0)+\ldots$

Der Fehler, den man begeht, wenn man diese Reihen bei dem $n$ten Gliede abbricht, wird durch Abschätzung des Restgliedes R beurtheilt; nach der Voraussetzung ist er um so kleiner, je grösser n ist und kann durch Vergrösserung der Gliederzahl n kleiner als jede noch so kleine Zahl gemacht werden.

Die Reihe 1. führt nach ihrem Erfinder den Namen TAYLOR'sche Reihe. Die zweite wurde als Specialfall der TAYLOR'schen Reihe zuerst von MACLAURIN mitgetheilt und ist nach ihm benannt worden.

6. Wir wenden uns nun dazu, die Functionen

$$(1+x)^\mu,\quad l(1+x),\quad e^x,\quad sin x,\quad cos x,$$

mit Hülfe des MACLAURIN'schen Satzes als unendliche Potenzreihen darzustellen.

Entwicklung von $(1+x)^\mu$ (Binomische Reihe). In den Elementen der Algebra wird für einen ganzen positiven Exponenten μ die Potenz $(1+x)^\mu$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt; wir werden nun zeigen, dass innerhalb bestimmter Grenzen dieselbe Entwicklung auch für negative und gebrochene Exponenten gilt. Der $k$te Differentialquotient von $(1+x)^\mu$ ist

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}.$$

Der letzte Faktor hat für ein hinlänglich grosses k einen negativen Exponenten und wird daher unendlich gross, wenn $x = -1$; daher ist die MACLAURIN'sche Reihe im vorliegenden Falle nicht anwendbar für Werthe von x, die gleich oder kleiner als -1 sind; ob sie für alle andern Werthe von x anwendbar ist, hängt von der Untersuchung des Restes R ab. Wir wenden die Form des Restes No. 2, 8 an und haben

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)(1+\vartheta x)^{\mu-n-1}.$$

Hierfür können wir setzen

$$R = \mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\cdot\left[\left(\frac{\mu}{1}-1\right)\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left(\frac{\mu}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{\mu}{n}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Der erste und der zweite Faktor werden für wachsende n nicht verschwindend klein; es muss daher der letzte Faktor verschwinden; wenn die Bedingungen dafür festgestellt sind, so haben wir dann weiter zu sehen, ob unter diesen, oder unter noch mehr beschränkenden Bedingungen, der Grenzwerth des Produkts des zweiten und letzten Faktors Null ist.

Der letzte Faktor ist eine Potenz mit unendlich wachsendem Exponenten; dieselbe verschwindet nur, wenn der Dignand ein echter Bruch ist. Aus der Identität

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{x+1}{\vartheta x+1} - 1$$

erkennt man, dass man wegen der Unbestimmtheit des positiven echten Bruches ϑ nur dann sicher weiss, dass der Dignand echt gebrochen ist, wenn x ein positiver oder negativer echter Bruch ist; denn im ersteren Falle ist $(x+1):(\vartheta+1) < x+1$; und wird im letzteren der absolute Werth von x mit ξ bezeichnet, so ist

$$\frac{x+1}{\vartheta x+1} = \frac{1-\xi}{1-\vartheta\xi},$$

mithin positiv und < 1, und daher der Dignand ein negativer echter Bruch. Bezeichnet man den absoluten Werth des Dignanden mit t, so kann man den zweiten und dritten Faktor des Restes folgendermaassen anordnen:

$$\left(\frac{\mu}{1}-1\right)t\cdot\left(\frac{\mu}{2}-1\right)t\cdot\left(\frac{\mu}{3}-1\right)t\ldots\left(\frac{\mu}{n}-1\right)t;$$

wächst n um eine Einheit, so tritt zu diesem Produkte der Faktor

$$\left(\frac{\mu}{n+1}-1\right)t;$$

der Grenzwerth dieses Faktors ist $-t$, also ein echter Bruch. Da nun das obige Produkt für ein unendlich grosses n von einer gewissen Stelle an eine unbegrenzte Menge von abnehmenden echten Brüchen zu Faktoren hat, so folgt, dass der Grenzwerth des Produktes selbst Null ist.

Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $(1+x)^\mu$ anwendbar für alle positiven oder negativen echt gebrochenen Werthe von x. Da nun

$$f(0) = 1\,, \quad f^n(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)\,,$$

so hat man die Entwicklung

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots$$

mit dem Spielraume: $-1 < x < +1$.

Man kann nachweisen, dass die Reihe auch noch für $x = +1$ gilt, wenn μ grösser ist als -1, und für $x = -1$, wenn μ positiv ist*).

Insbesondere hat man

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^4}{8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^5}{10} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots.$$

Um $(a+b)^\mu$ zu entwickeln, wo wir $a^2 > b^2$ annehmen, setze man

$$(a+b)^\mu = a^\mu\left(1 + \frac{b}{a}\right)^\mu.$$

Daher hat man

$$(a+b)^\mu = a^\mu\left\{1 + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

7. Entwicklung von $l(1+x)$.

Der $k$te Differentialquotient von $l(1+x)$ ist

$$(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)(1+x)^{-k};$$

die Differentialquotienten bleiben daher endlich und stetig, so lange x grösser ist als -1. Der Rest ist für $p = 0$

$$R = (-1)^n\cdot(1-\vartheta)^n\cdot x^{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} = (-1)^n\cdot\frac{x}{1+\vartheta x}\cdot\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Aus der vorigen No. wissen wir, dass der Rest verschwindet, wenn der absolute Werth von x kleiner als 1 ist. Für $x = 1$ ist

$$R = (-1)^n\frac{1}{1+\vartheta}\cdot\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}\right)^n$$

und daher ebenfalls $lim R = 0$. Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $l(1+x)$ für alle Werthe von x anwendbar, die der Begrenzung genügen

$$-1 < x \leqq +1.$$

Da nun

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)\,,$$

so ergiebt sich die Entwicklung

1. $$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \ldots\,,$$
$$-1 < x \leqq +1.$$

Setzt man $-x$ statt x, so erhält man

$$l(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 - \ldots\,,$$
$$-1 \leqq x < +1.$$

Durch Subtraction folgt hieraus

2. $$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots)\,,$$
$$-1 < x < +1.$$

*) SCHLÖMILCH, Compendium der höhern Analysis, 5. Aufl. Braunschweig 1881, Bd. 1, pag. 211.

Setzt man hier

$$\frac{1+x}{1-x} = z\,, \quad \text{also} \quad x = \frac{z-1}{z+1}\,,$$

so erhält man

3. $$lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

diese Reihe gilt für jedes positive z; zur praktischen Berechnung des natürlichen Logarithmus einer Zahl ist sie aber nur für solche Werthe von z verwendbar, für welche $(z-1):(z+1)$ hinlänglich von 1 verschieden ist.

Zur praktischen Berechnung der Logarithmen von Primzahlen kann man sich der Reihe 3. für die Werthe $z = 2$ und $z = 3$ bedienen; für grössere Zahlen macht man mit Vortheil von der Identität Gebrauch

$$l(a+b) = la + l\frac{1 + \dfrac{b}{2a+b}}{1 - \dfrac{b}{2a+b}}$$

und erhält hieraus mit Hülfe der Reihe 2.

$$l(a+b) = la + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^7 + \ldots\right].$$

Ist $a = 3$, so liefert die Reihe für $b = 2$ und 4 ziemlich rasch genaue Resultate; für eine Genauigkeit bis auf $\pm 0{,}000005$ würden sechs Glieder genügen, wenn $b = 4$ genommen wird, für $b = 2$ bereits fünf Glieder. Hat man $l7$ gefunden, so kann man $a = 7$ setzen, und 4. auf die Fälle $b = 4$, 6 und 10 anwenden, u. s. f. Aus den Logarithmen der Primzahlen ergeben sich durch Additionen die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen. Hat man auf diesem Wege eine bis zu einer bestimmten Genauigkeit gehende vollständige Tafel der natürlichen Logarithmen berechnet, so kann man die Logarithmen zu einer beliebigen andern Basis a nach der bekannten Formel finden

$${}^a\!log\,z = lz : la\,.$$

Die Zahl $1 : la$ bezeichnet man als den Modulus der Logarithmen zur Basis a; für $a = 10$ erhält man mit Hülfe der obigen Reihen

$$\frac{1}{l10} = 0{,}434\,294\,481\,9\,.$$

8. Entwicklung von e^x.

Alle Differentialquotienten von e^x sind gleich e^x und für alle endlichen Werthe von x stetig und endlich. Der Rest ergiebt sich (No. 2, 6) zu

$$R = \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n+1}\,e^{\vartheta x}\,.$$

Der zweite Faktor ist eine endliche Zahl, sobald x nicht unendlich ist. Der erste Faktor enthält unter derselben Voraussetzung und wenn n hinlänglich gross ist $n+1$ Faktoren

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n+1}\,,$$

die von einer bestimmten Stelle an echt gebrochen sind, und bei unendlich wachsendem n sich der Grenze Null nähern; daher ist

$$lim R = 0\,.$$

Da nun

$$f^k(0) = 1\,,$$

so hat man die für jeden endlichen Werth von x gültige Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots.$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man die zur Berechnung von e dienende Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Für $x = -1$ erhält man

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Die Gleichung

$$a^x = e^{x\,la}$$

führt zu einer Reihe für a^x, unter der Voraussetzung, dass a positiv ist; man erhält

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1\cdot 2} + \frac{(x\,la)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(x\,la)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

9. Entwicklung von $cos\,x$ und $sin\,x$. Die Differentialquotienten

$$\frac{d^k cos\,x}{dx^k} = cos(\tfrac{1}{2}k\pi + x), \quad \frac{d^k sin\,x}{dx^k} = sin(\tfrac{1}{2}k\pi + x)$$

sind für alle realen Werthe von x endlich und stetig. Die Reste sind für beide Functionen

$$\frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\cdot cos[\tfrac{1}{2}(n+1)\pi + \vartheta x], \text{ bez. } \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\cdot sin[\tfrac{1}{2}(n+1)\pi + \vartheta x],$$

und haben für jedes endliche x den Grenzwerth Null. Wir erhalten somit die für jeden endlichen Werth von x gültigen Entwicklungen

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \ldots$$

$$sin\,x = x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots.$$

Um mit Hülfe dieser Reihen eine Tafel der goniometrischen Functionen zu berechnen, genügt es, die Reihen für den Spielraum $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}\pi$ (entsprechend dem Spielraum des Winkels von 0° bis 45°) anzuwenden. Da

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3\,628\,800,$$

so genügen selbst für den über $\frac{1}{4}\pi$ hinausliegenden Werth $x = 1$ die ersten 6 bez. 5 Glieder beider Reihen für eine Genauigkeit von fünf Decimalstellen.

Wir verlassen hiermit die Anwendungen der TAYLOR'schen und der MACLAURIN-schen Reihe und bemerken, dass wir allgemeine Untersuchungen über unendliche Reihen im letzten Abschnitte mittheilen werden.

§ 14. Maxima und Minima.

1. In § 5, No. 1 haben wir bereits erkannt, dass eine Function einer Variabeln einen eminenten Werth, d. i. ein Maximum oder Minimum für denjenigen Werth der Variabeln erreicht, für welchen der erste Differentialquotient verschwindet; wir fanden, dass ein Maximum oder Minimum eintritt, je nachdem der erste Differentialquotient vom Positiven ins Negative übergeht oder umgekehrt; für den Fall, dass der erste Differentialquotient in der Nähe des betreffenden Werths der Variabeln sein Vorzeichen nicht ändert, ist damals keine Entscheidung getroffen worden. Wir geben im gegenwärtigen Abschnitte vollständigere Untersuchungen über die eminenten Werthe einer Function von einer und von mehreren Variabeln und knüpfen dieselben an die Untersuchungen des vorigen Abschnitts an.

Wenn für einen Werth x der Variabeln der erste Differentialquotient der Function $y = f(x)$ verschwindet, der zweite aber nicht, so hat für einen hinlänglich kleinen Werth von δx die Differenz $f(x + \delta x) - f(x)$ dasselbe Vorzeichen, wie das Produkt $f''(x)\delta x^2$, mithin dasselbe Vorzeichen wie $f''(x)$. Ist nun $f''(x)$ negativ, so ist $f(x + \delta x) - f(x) < 0$ sowohl für positive wie für negative Werthe von δx, mithin ist $f(x)$ grösser als jeder benachbarte Werth der Function, ist also ein Maximum; ist hingegen $f''(x)$ positiv, so ist $f(x + \delta x) - f(x) > 0$, und daher $f(x)$ kleiner als jeder benachbarte Werth, $f(x)$ also ein Minimum. Wir erhalten somit zunächst: Wenn der erste Differentialquotient einer Function für einen bestimmten Werth der Variabeln verschwindet, der zweite aber nicht verschwindet, so hat die Function für diesen Werth der Variabeln einen eminenten Werth, und zwar ein Maximum, wenn der zweite Differentialquotient negativ ist, ein Minimum, wenn er positiv ist.

Wenn für eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ der zweite Differentialquotient verschwindet, der dritte aber nicht, so hat die Differenz $f(x + \delta x) - f(x)$ für eine hinlänglich kleine Aenderung δx dasselbe Vorzeichen wie $f'''(x)\,\delta x^3$, und wechselt daher ihr Zeichen zugleich mit δx; in diesem Falle ist $f(x)$ kein eminenter Werth.

Verschwinden für eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ zugleich auch $f''(x)$ und $f'''(x)$, so hat $f(x + \delta x) - f(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $f''''(x)\,\delta x^4$, und stimmt daher unabhängig von den Vorzeichen von δx dem Vorzeichen nach mit $f''''(x)$ überein. Daher ist für diesen Werth der Variabeln $f(x)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f''''(x)$ negativ oder positiv ist.

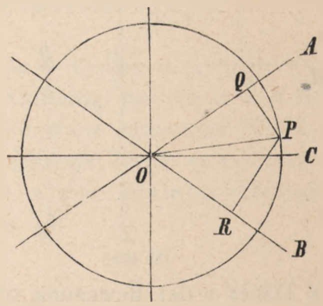
So weiter schliessend, gelangen wir zu dem Satze: Um die Werthe der Variabeln zu erhalten, zu welchen eminente Werthe der Function $f(x)$ gehören, bestimme man die Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) = 0.$$

Diejenigen unter diesen Wurzeln sind Lösungen der Aufgabe, für welche der seiner Ordnung nach niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist; und zwar liefern diese Werthe der Variabeln ein Maximum oder Minimum, je nachdem der niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient für den betreffenden Werth der Variabeln negativ oder positiv ist.

2. Wir geben zunächst hierzu einige Anwendungen.

Durch den Mittelpunkt O eines Kreises sind zwei Gerade OA und OB gezogen, die den Winkel 2α einschliessen; für welche Punkte der Peripherie erreicht die Summe der Quadrate der Abstände von OA und OB einen eminenten Werth?



(M. 492.)

Ist OC die Halbirende der Winkel AOB, ist ferner $COP = \varphi$, und $PQ \perp OA$, $PR \perp OB$, so ist $PQ = OP\cdot sin(\alpha - \varphi)$, $PR = OP\cdot sin(\alpha + \varphi)$.

Ist $OP = a$, so handelt es sich darum, die eminenten Werthe der Function des Winkels φ zu bestimmen

$$y = a^2 sin^2(\alpha - \varphi) + a^2 sin^2(\alpha + \varphi).$$

Die Differentiation ergiebt

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2a^2[- sin(\alpha - \varphi)\,cos(\alpha - \varphi) + sin(\alpha + \varphi)\,cos(\alpha + \varphi)],$$

$$= a^2[sin\,2(\alpha + \varphi) - sin\,2(\alpha - \varphi)] = 2a^2 cos\,2\alpha\, sin\,2\varphi;$$

hieraus findet man weiter

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = 4a^2 \cos 2\alpha \cos 2\varphi\,.$$

Zwischen den Grenzen 0 und 2π des Winkels φ verschwindet y', wenn

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varphi_3 = \pi, \quad \varphi_4 = \tfrac{3}{2}\pi.$$

Für diese Werthe von φ nimmt y'' die Werthe an

$$4a^2\cos 2\alpha, \quad -4a^2\cos^2\alpha, \quad 4a^2\cos 2\alpha, \quad -4a^2\cos 2\alpha.$$

Ist $2\alpha < \frac{1}{2}\pi$, so gehören daher zu φ_1 und φ_3 Minimalwerthe, zu φ_2 und φ_4 Maximalwerthe, und es ist

$$y_{min} = 2a^2\sin^2\alpha\,, \quad y_{max} = 2a^2\cos^2\alpha\,.$$

3. Auf einer Ellipse einen Punkt P so zu bestimmen, dass sein Abstand von einem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth hat.

Sind ξ, η die Coordinaten des gegebenen Punktes, bezogen auf die Symmetrieachsen der Ellipse, und a, b die Halbachsen der letzteren, so ist

$$PA^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2.$$

Um Irrationalitäten zu vermeiden, kann man die eminenten Werthe von PA^2 aufsuchen, und hat daher zu differenziren

1. $$y = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2.$$

Man erhält zur Bestimmung von φ die Gleichung

2. $$y' = -2a\sin\varphi(a\cos\varphi - \xi) + 2b\cos\varphi(b\sin\varphi - \eta) = 0\,.$$

Die Gleichung der Geraden PA ist

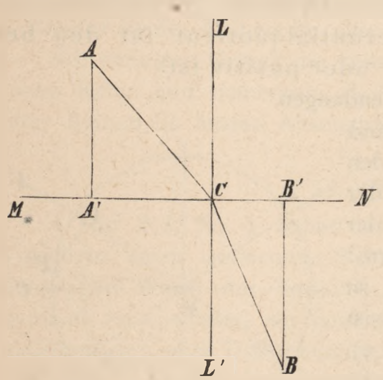
3. $$(b\sin\varphi - \eta)(X - \xi) - (a\cos\varphi - \xi)(Y - \eta) = 0\,;$$

die Gleichung der Ellipsentangente in P ist

4. $$b\cos\varphi\,(X - \xi) + a\sin\varphi\,(Y - \eta) = 0\,.$$

Für die gesuchten Punkte besteht die Gleichung 2.; aus 2., 3., 4. schliesst man: Die Ellipsenpunkte, deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth haben, sind die Fusspunkte der durch A gehenden Normalen der Ellipse.

4. Eine Ebene ist durch eine Gerade MN getheilt; ein Punkt P bewegt sich auf der einen Halbebene mit der constanten Geschwindigkeit g, auf der andern mit der constanten Geschwindigkeit h; welchen Weg muss der bewegte Punkt einschlagen, um in kürzester Zeit von einem gegebenen Punkte A der ersten Halbebene zu einem gegebenen Punkte B der andern zu gelangen?



(M. 493.)

Tritt P im Punkte C über die Grenze der beiden Halbebenen, so ist klar, dass P sich geradlinig von A bis C und von C bis B bewegen muss. Ist $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, so sind die Zeiten, in welchen P die Strecken AC und CB durchläuft, $AC : g = \sqrt{a^2 + x^2} : g$, bez. $CB : g = \sqrt{b^2 + (c-x)^2} : h$, und daher die Dauer y der Bewegung von A bis B

1. $$y = \frac{1}{g}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{h}\sqrt{b^2 + (c-x)^2}\,.$$

Hieraus ergiebt sich

2. $$y' = \frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}\,,$$

3. $$y'' = \frac{a^2}{g\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{h\sqrt{[b^2 + (c-x)^2]^3}}\,.$$

Aus 2. folgt

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} : \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \frac{g}{h}\,.$$

Da nun, wenn $CL \perp MN$

$$\sin LCA = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,, \quad \sin L_1CB = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}\,,$$

so erhalten wir als Bedingung für den Eintritt eines eminenten Werthes

4. $$\frac{\sin LCA}{\sin L_1CB} = \frac{g}{h}\,.$$

Liegt C in A', so ist $\sin LCA = 0$; liegt C in B', so ist $\sin L_1CB = 0$; hieraus folgt, dass 4. für einen zwischen A' und B' liegenden Punkt erfüllt wird. Beschreibt C von A' oder von B' ausgehend die Verlängerungen der Strecke $A'B'$, so wachsen beide Wege AC und CB, also kann ein Minimum für diese Lagen nicht eintreten. Bezeichnen wir mit ε den gemeinsamen Werth der Quotienten

$$\frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}\,,$$

und bemerken, dass ε für jeden auf der Strecke $A'B'$ liegenden Punkt positiv ist, so ist

$$y'' = \varepsilon^3\left(\frac{a^2g^2}{x^3} + \frac{b^2h^2}{(c-x)^3}\right),$$

und daher positiv; folglich entspricht der durch die Gleichung 4. bestimmte Punkt C der Strecke $A'B'$ einem Minimum, was auch aus der Natur der Aufgabe vorauszusehen war.

5. Um die eminenten Werthe der ganzen rationalen Function

1. $$y = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \ldots + a_rx^{m+r}$$

zu finden, bilden wir

2. $$y' = ma_0x^{m-1} + (m+1)a_1x^m + \ldots\,,$$

3. $$y'' = (m-1)ma_0x^{m-2} + m(m+1)a_1x^{m-1} + \ldots.$$

Ist $m > 1$, so hat die Gleichung $y' = 0$ $(m-1)$ Wurzeln $x = 0$, während die anderen r Wurzeln von Null verschieden sind. Ist $m = 2$, so liefert die Wurzel $x = 0$

$$y'' = 2a_0\,,$$

gehört also zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem $a_0 \lessgtr 0$. Ist $m > 2$, so hat man zu bilden

$$y^{(m)} = 1\cdot 2\cdot 3\ldots m\cdot a_0 + 2\cdot 3\ldots m(m+1)a_1x + \ldots\,,$$

denn dies ist der Differentialquotient niedrigster Ordnung, der für $x = 0$ nicht verschwindet; ist nun m gerade, so hat y für $x = 0$ einen eminenten Werth, ist hingegen m ungerade, so findet für $x = 0$ kein eminenter Werth von y statt.

6. Die eminenten Werthe der Radien eines Diametralschnitts eines dreiachsigen Ellipsoids zu bestimmen.

Die Gleichung des Ellipsoids sei

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Der Radius vector r, der mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschliesst, ergiebt sich aus

2. $$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\,.$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Normale des den Radius r enthaltenden Diametralschnitts mit den Achsen bildet, so gelten die Gleichungen

3. $$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0,$$
4. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Diese Gleichungen bestimmen β und γ als Function von α, so dass r als Function von α allein erscheint. Die eminenten Werthe von r treten mit den eminenten Werthen von $1 : r^2$ zugleich ein; wir bestimmen den Eintritt der letzteren, und erhalten durch Differentiation der Gleichung 2.

5. $$\frac{\cos\alpha\, d\cos\alpha}{a^2} + \frac{\cos\beta\, d\cos\beta}{b^2} + \frac{\cos\gamma\, d\cos\gamma}{c^2} = 0;$$

ferner ergiebt die Differentiation von 3. und 4.

6. $$\cos\varphi\, d\cos\alpha + \cos\psi\, d\cos\beta + \cos\chi\, d\cos\gamma = 0,$$
7. $$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$

Der Verein der Gleichungen 5., 6., 7. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

8. $$\begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{a^2} & \frac{\cos\beta}{b^2} & \frac{\cos\gamma}{c^2} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\varphi & \cos\psi & \cos\chi \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden derselben ist gleichbedeutend mit dem Verein der drei Gleichungen

9. $$\begin{aligned} &\frac{\cos\alpha}{a^2} + \lambda\cos\alpha + \mu\cos\varphi = 0, \\ &\frac{\cos\beta}{b^2} + \lambda\cos\beta + \nu\cos\psi = 0, \\ &\frac{\cos\gamma}{c^2} + \lambda\cos\gamma + \nu\cos\chi = 0, \end{aligned}$$

wobei λ und μ sich aus zweien derselben bestimmen. Addirt man die Gleichungen 9., nachdem man sie der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt hat, so erhält man in Rücksicht auf 2., 3., 4.

10. $$\frac{1}{r^2} + \lambda = 0.$$

Setzt man dies in 9. ein, so entsteht

11. $$\begin{aligned} &\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\varphi = 0, \\ &\cos\beta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\psi = 0, \\ &\cos\gamma\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \mu\cos\chi = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man in Rücksicht auf 3.

12. $$\frac{\cos^2\varphi}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2\psi}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2\chi}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch für $1 : r^2$ und lehrt die eminenten Werthe dieser Grösse kennen. Setzt man eine Wurzel dieser Gleichung in 11. ein, so kann man aus 11. die Cosinus der unbekannten Winkel α, β, γ bis auf den gemeinsamen Faktor μ finden; dieser ergiebt sich schliesslich aus der Gleichung 4.

7. Wir haben noch nachzutragen, dass — in seltenern Fällen — ein eminenter Werth einer Function $y = f(x)$ auch für einen Werth x der Variabeln eintreten kann, für welchen der niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist. Ereignet es sich nämlich, dass für diesen Werth der

Variabeln der genannte Differentialquotient discontinuirlich wird, und dabei von einem positiven zu einem negativen Werthe überspringt, oder umgekehrt, so ist offenbar die Differenz

$$f(x + \delta x) - f(x)$$

im ersten Falle positiv, im letzten negativ für jeden hinlänglich kleinen positiven oder negativen Werth von δx; also ist $f(x)$ im ersten Falle ein Maximum, im letzten ein Minimum.

Als Beispiel betrachten wir die durch die Gleichung

1. $$y^3 + x^2 y - 2rx^2 = 0$$

definirte Function.*)

Reducirt man zunächst auf x, so erhält man

2. $$x = \pm\sqrt{\frac{y^3}{2r - y}},$$

und hieraus $$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \sqrt{\frac{y^3}{2r-y}}\left(\frac{3}{2y} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r-y}\right) \\ &= \sqrt{\frac{y^3}{2r-y}}\cdot\frac{3r-y}{y(2r-y)} = \sqrt{\frac{y(3r-y)^2}{(2r-y)^3}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

3. $$y' = \pm\sqrt{\frac{(2r-y)^3}{y(3r-y)^2}}.$$

Dieser Werth wird Null für $y = 2r$; dies ist das Maximum von y; hierzu gehört $x = \infty$. Für $y = 0$, wozu $x = 0$ gehört, wird y' unendlich gross. Aus 2. ergiebt sich, dass mit y zugleich der absolute Werth von x wächst. Daher gehören in 2. und 3. die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen. Mithin ist y' für einen unendlich kleinen negativen Werth von x negativ, für einen unendlich kleinen positiven Werth von x positiv unendlich. Folglich ist $y = 0$ das Minimum von y.

---

9. Eminente Werthe einer Function mehrerer Variabeln. Eine Function $f(x, y \ldots)$ mehrerer Variabeln erreicht für ein bestimmtes Werthsystem $x, y \ldots$ der Variabeln einen eminenten Werth, wenn zu jeder hinlänglich kleinen Aenderung δx, $\delta y \ldots$ der Variabeln eine Aenderung der Function von unveränderlichem Vorzeichen gehört.

Wenn die partialen Differentialquotienten von f bis mit denen $2m$ter Ordnung sämmtlich verschwinden, so kann man δx, $\delta y \ldots$ immer so klein wählen, dass das Vorzeichen der zugehörigen Aenderung der Function f mit dem Vorzeichen von

$$\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^{2m+1} f$$

übereinstimmt. Diese Grösse ist in Bezug auf δx, $\delta y \ldots$ ungerader Ordnung und wechselt daher ihr Zeichen, wenn δx, $\delta y \ldots$ das Zeichen wechseln. Hieraus folgt: Eine Function mehrerer Variabeln kann für ein Werthsystem derselben nur dann einen eminenten Werth haben, wenn für dasselbe sämmtliche partialen Differentialquotienten der ersten Ordnung, aber nicht sämmtliche der zweiten, oder sämmtliche der ersten, zweiten und dritten Ordnung, aber nicht sämmtliche der vierten u. s. f. verschwinden.

*) Construirt man einen Kreis mit dem Halbmesser r, der die Abscissenachse im Nullpunkte berührt, und bestimmt auf dem Radius vector jedes Kreispunktes ξ, η den Punkt P, dessen Ordinate $2r - \eta$ ist, so beschreibt P die Curve 1.; dieselbe ist unter dem Namen der Cissoide des Diokles bekannt.

Die seltenen Ausnahmefälle, dass Werthsysteme der Variabeln vorhanden sind, für welche die sämmtlichen Differentialquotienten einer ungeraden Ordnung unstetig sind, und alle niederen verschwinden, lassen wir ausser Betracht, ebenso die Fälle, dass es Werthsysteme giebt, für welche sämmtliche partialen Differentialquotienten der ersten, zweiten und dritten Ordnung, oder auch noch höhere, verschwinden. Wir beschränken uns vielmehr darauf, die Werthsysteme der Variabeln aufzusuchen, für welche die partialen ersten Differentialquotienten der Function verschwinden, und entwickeln die Kriterien für den Eintritt eines Maximums oder Minimums unter der Voraussetzung, dass nicht sämmtliche Differentialquotienten zweiter Ordnung verschwinden.

10. Wenn für ein Werthsystem $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ der Variabeln der Function $f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n)$ die partialen Differentialquotienten erster Ordnung verschwinden

1. $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung aber nicht sämmtlich verschwinden, so stimmt für hinlänglich kleine Aenderungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ das Vorzeichen der Differenz

$$f(x_1 + \xi_1,\ x_2 + \xi_2, \ldots x_n + \xi_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

mit dem Vorzeichen der Grösse

2. $$2V = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f$$

überein; es kommt nun darauf an, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen V für jedes reale Verhältniss der $\xi_1 \ldots \xi_n$ positiv oder negativ ist.

Man kann setzen

3. $$2V = \sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_h, \quad \text{wenn } a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

und wenn man i und h alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt, bemerkt man, dass $a_{ih} = a_{hi}$, so ist ersichtlich, dass der Faktor 2 bei allen Gliedern, in welchen die beiden Faktoren ξ_i und ξ_h nicht denselben Index haben, in 3. zu Stande kommt.

Die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ können nicht alle gleich Null genommen werden. Nehmen wir zunächst $\xi_n \gtrless 0$, so kann man schreiben

$$V = \xi_n^2 W, \quad \text{wobei}$$

4. $$2W = \Sigma a_{ik} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_n} \cdot \frac{\xi_h}{\xi_n}.$$

Während V eine homogene quadratische Function von $\xi_1 \ldots \xi_n$ ist, ist W eine nicht homogene quadratische Function von

$$\frac{\xi_1}{\xi_n}, \frac{\xi_2}{\xi_n} \cdots \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}.$$

Das Vorzeichen von V stimmt mit dem von W überein. Soll nun für alle realen, der Null gleichen oder von Null verschiedenen Werthe der Quotienten $\xi_i : \xi_n$ die Function W positiv oder negativ sein, so muss W, da es eine stetige Function der Variabeln $\xi_i : \xi_n$ ist, im ersten Falle ein Minimum haben, das positiv ist, und im zweiten ein Maximum, das negativ ist. Das dem eminenten Werthe von W entsprechende Werthsystem der Variabeln $\xi_i : \xi_n$ wird aus den $(n-1)$ Gleichungen erhalten

5. $$\frac{\partial W}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta_2} = 0, \ldots \frac{\partial W}{\partial \eta_{n-1}} = 0,$$

wenn $$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_n}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 5. mit ξ_n, so gehen sie über in

6. $$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \xi_1} &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0,\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_2} &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0,\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_3} &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + \ldots + a_{3n}\xi_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial V}{\partial \xi_{n-1}} &= a_{n-1,1}\xi_1 + a_{n-1,2}\xi_2 + \ldots + a_{n-1,n}\xi_n = 0.
\end{aligned}$$

Wir fügen hierzu noch die Gleichung

7. $$a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \ldots + a_{n,n}\xi_n = \frac{\partial V}{\partial \xi_n}.$$

Der eminente Werth von V wird gefunden, indem man $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ durch die Gleichungen 6. als Multipla von ξ_n berechnet, und diese Lösungen von 6. in V substituirt. Dasselbe Resultat wird erreicht, wenn man auf irgend welchem Wege mit Hülfe der Gleichungen 6. V als Multiplum von ξ_n^2 darstellt.

Löst man die Gleichungen 6. und 7. bezüglich der Unbekannten ξ_n, so erhält man

8. $$\Delta_n \cdot \xi_n = \Delta_{n-1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi_n},$$

$$\text{wenn } \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Nun ist identisch

$$\xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_3} + \ldots + \xi_n \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 2V,$$

also, wenn die $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ den Gleichungen 6. genügen

9. $$\xi_n \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = 2V;$$

mit Hülfe dieses Werthes folgt aus 8. für den eminenten Werth von V

10. $$2V = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \xi_n^2.$$

Wenn also ξ_n von Null verschieden ist, so hat der durch die Gleichungen 6. bestimmte Werth von V dasselbe Zeichen, wie das Verhältniss $\Delta_n : \Delta_{n-1}$.

Ist dieser Quotient positiv, und soll $2V$ immer dasselbe Zeichen haben, so muss der Werth 10. ein Minimum sein, und wenn der Quotient negativ ist, ein Maximum; ob dies der Fall ist, ersieht man aus

$$2V_1 = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \ldots + \xi_{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta_{n-1}}\right)^2 W = \sum_1^{n-1} a_{ik}\xi_i\xi_k;$$

im ersteren Fall muss dieser Ausdruck beständig positiv, im letzteren beständig negativ sein. Die Entscheidung darüber, ob V immer dasselbe Zeichen hat, ist somit auf die gleiche Entscheidung betreffs V_1 zurückgeführt.

Man hat nun dieselbe Schlussweise wie bei V, und gelangt zunächst zu der Function

$$2V_2 = \sum_1^{n-2} a_{ik}\xi_i\xi_h,$$

von da durch Wiederholung der Schlussweise zu

$$2V_3 = \sum_1^{n-3} a_{ih}\xi_i\xi_h,$$

und so fort, bis man endlich mit

$$2V_{n-1} = a_{11}\xi_1^2$$

zum Abschluss gelangt.

Bezeichnet man die Determinanten, welche aus

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dadurch hervorgehen, dass man die letzten i Zeilen und Colonnen weglässt, mit Δ_{n-i}, so erhält man somit folgendes Kriterium für den Eintritt eines Maximums oder Minimums einer Function mehrerer Variabeln. Ein Maximum tritt ein, wenn die Quotienten

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \quad \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}, \dots \frac{\Delta_1}{1}$$

sämmtlich negativ sind; ein Minimum, wenn sie sämmtlich positiv sind; wenn nicht alle dasselbe Zeichen haben, so ist weder Maximum noch Minimum für das betreffende Werthsystem der Variabeln vorhanden; ist eine der Determinanten Δ_n, Δ_{n-1}, $\Delta_{n-2} \dots \Delta_1$ gleich Null, so kann die Frage nur durch Untersuchung eines der Ausdrücke entschieden werden

$$\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f, \quad r > 2.$$

11. Den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Quadrate der Abstände von gegebenen Ebenen ein Minimum ist. Die Gleichungen der Ebenen in Normalform seien

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \dots T_n = 0.$$

Dann hat man den eminenten Werth des Ausdrucks zu bestimmen

$$f = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + \dots + T_n^2.$$

Ist nun

$$T_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z - \delta_i,$$

so erhält man zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten x, y, z die Gleichungen

$$\text{1.} \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} &= \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_n T_n = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} &= \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \dots + \beta_n T_n = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} &= \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 + \dots + \gamma_n T_n = 0. \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen von drei bestimmten Ebenen; ihr Schnittpunkt ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt.

Ferner ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \dots + \alpha_n\gamma_n,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \dots + \beta_n\gamma_n,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2,$$

Daher ist $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ immer positiv. Für Δ_2 und Δ_3 erhält man

$$\tfrac{1}{4}\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n & \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2 \end{vmatrix},$$

$$\tfrac{1}{8}\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 & \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n & \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_n\gamma_n \\ \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n & \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2 & \beta_1\gamma_1 + \dots + \beta_n\gamma_n \\ \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_n\gamma_n & \beta_1\gamma_1 + \dots + \beta_n\gamma_n & \gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2 \end{vmatrix}.$$

Nach einem bekannten Determinanten-Satze*) ist Δ_2 bez. Δ_3 die Summe der Quadrate aller Determinanten, die man aus je zwei bez. je drei Colonnen der Zeilen bildet

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{matrix} \quad \text{bez.} \quad \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_n \end{matrix}$$

Es sind daher auch Δ_2 und Δ_3 positiv, und die Lösungen des Systems 1. machen folglich die Function f zu einem Minimum.

12. Den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Quadrate der Abstände von n gegebenen Punkten ein Minimum ist. Sind P_1, P_2, P_3, ... P_n die gegebenen Punkte, und hat P_i die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i, ist ferner $PP_i = r_i$, so ist

$$r_i^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2.$$

Die Function, deren Minimum gesucht wird, ist

$$f = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2.$$

Da man hat

$$\frac{\partial r_i^2}{\partial x} = 2(x - \xi_i), \quad \frac{\partial r_i^2}{\partial y} = 2(y - \eta_i), \quad \frac{\partial r_i^2}{\partial z} = 2(z - \zeta_i),$$

so werden die Coordinaten des gesuchten Punktes aus den Gleichungen bestimmt

$$x - \xi_1 + x - \xi_2 + \dots + x - \xi_n = 0,$$
$$y - \eta_1 + y - \eta_2 + \dots + y - \eta_n = 0,$$
$$z - \zeta_1 + z - \zeta_2 + \dots + z - \zeta_n = 0;$$

sie ergeben sich daher zu

$$\text{1.} \quad x = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n), \quad y = \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n), \quad z = \frac{1}{n}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \dots + \zeta_n).$$

Dieser Punkt ist der Schwerpunkt gleicher Massen, die in den Punkten P_1, P_2, .. P_n vereint sind. Ferner hat man

$$\frac{\partial^2 r_i^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r_i^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 r_i^2}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 r_i^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 r_i^2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 r_i^2}{\partial y \partial z} = 0,$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 = \tfrac{1}{4}\Delta_2 = \tfrac{1}{8}\Delta_3 = 1.$$

Der durch die Formeln 1. bestimmte Punkt macht daher in der That f zu einem Minimum.

*) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl. Leipzig 1875. § 6, No. 2.

13. Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der linearen Function

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_m x_m$$

so zu bestimmen, dass für n gegebene Werthsysteme der Variabeln

$$\begin{array}{llll} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{m1}, \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{m2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{1n} & \ldots & x_{mn}, \end{array}$$

die Summe der Quadrate der Unterschiede der Function und der gegebenen Zahlen $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein Minimum wird.

Die Function, welche in diesem Falle einen eminenten Werth annehmen soll, ist

$$f = \sum_1^n (\alpha_1 x_{1r} + \alpha_2 x_{2r} + \alpha_3 x_{3r} + \ldots + \alpha_m x_{mr} - u_r)^2 .$$

Wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varphi_r = \alpha_1 x_{1r} + \alpha_2 x_{2r} + \ldots + \alpha_m x_{mr} - u_r ,$$

so sind die Bedingungsgleichungen für den Eintritt eines eminenten Werthes

$$1. \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= x_{11}\varphi_1 + x_{12}\varphi_2 + x_{13}\varphi_3 + \ldots + x_{1n}\varphi_n = 0 , \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= x_{21}\varphi_1 + x_{22}\varphi_2 + x_{23}\varphi_3 + \ldots + x_{2n}\varphi_n = 0 , \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} &= x_{31}\varphi_1 + x_{32}\varphi_2 + x_{33}\varphi_3 + \ldots + x_{3n}\varphi_n = 0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} &= x_{m1}\varphi_1 + x_{m2}\varphi_2 + x_{m3}\varphi_3 + \ldots + x_{mn}\varphi_n = 0 . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear in Bezug auf die Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und genügen, dieselben eindeutig zu bestimmen. Da man ferner hat

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = x_{i1}x_{k1} + x_{i2}x_{k2} + \ldots + x_{in}x_{kn} ,$$

so findet man, dass $\frac{1}{2^r}\Delta_r$ die Summe der Quadrate der r gliedrigen Determinanten ist, die durch Combination von je r Colonnen aus den ersten r Zeilen der Elemententafel hervorgehen

$$\begin{array}{lllll} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \ldots & x_{mn} . \end{array}$$

Mithin sind alle Δ_r positiv; folglich liefern die angegebenen Lösungen ein Minimum.

---

14. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. Wenn ein System von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gesucht wird, für welches die Function $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ einen eminenten Werth erhält, während zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllt werden sollen

$$1. \quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 , \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 , \quad \ldots \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 ,$$

so kann man zunächst aus dem m Bedingungsgleichungen m von den Variabeln $x_1, \ldots x_n$ als Functionen der übrigen ausdrücken und diese Werthe in f substituiren; dann erhält man f als Function von $(m-n)$ unabhängigen Variabeln und kann dann wie im vorigen Falle weiter verfahren. Diese Methode bringt alle die Schwierigkeiten, die Eliminationsprobleme mit sich führen können, gleich zum Beginn in die Rechnung hinein und ist daher selten empfehlenswerth.

Ein zweiter Weg wäre der, die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $(m-n)$ Variable $y_1, y_2, \ldots y_{m-n}$ zu ersetzen, die so gewählt sind, dass die Werthe

$$x_1 = \psi_1(y_1, \ldots y_{m-n}) , \quad x_2 = \psi_2(y_1, \ldots y_{m-n}) , \quad \ldots\ldots x_n = \psi_n(y_1, \ldots y_{m-n})$$

die n Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Um z. B. der Bedingungsgleichung zu genügen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_1^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0 ,$$

könnte man setzen

$$x_1 = a_1 \cos y_1 \cos y_2 , \quad x_2 = a_2 \sin y_1 \cos y_2 , \quad x_3 = a_3 \sin y_3 .$$

Soll diese Methode verwendbar sein, so muss es gelingen, die neuen Variabeln y so zu wählen, dass realen Werthen der x auch stets reale Werthe der y entsprechen, da alle bisherigen Entwicklungen die Voraussetzung enthalten, dass die Variablen und die Functionen real sind.

Zweckmässiger im Allgemeinen, als diese beiden, ist folgende von Lagrange herrührende Methode: Man betrachte auf Grund der Gleichungen 1. die m Variabeln

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$$

als Functionen der übrigen $n-m$ Variabeln

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n .$$

Bezeichnet x_i irgend eine Variable der zweiten Gruppe, so erhält man durch partiale Differentiation der Gleichungen 1. die Differentialgleichungen

$$2. \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = 0 , \\ &\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = 0 , \\ &\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} = 0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 . \end{aligned}$$

Setzt man hier für i der Reihe nach $m+1, m+2, \ldots n$, so erhält man im Ganzen $m(n-m)$ Gleichungen, welche die $m(n-m)$ Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i}, \frac{\partial x_2}{\partial x_i}, \frac{\partial x_3}{\partial x_i}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial x_i}$$

eindeutig bestimmen. Die partialen Differentialquotienten von f bezüglich der unabhängigen Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_n$ verschwinden für ein einem extremen Werthe von f zugehöriges Werthsystem der Variabeln. Also hat man noch die $n-m$ Gleichungen

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$
$$i = m+1, m+2, \ldots n .$$

Substituirt man in dieselben die aus 2. gewonnenen Differentialquotienten der $x_1, \ldots x_m$, so enthält das System 3. nur noch die Variabeln $x_1, \ldots\ldots x_n$ und genügt, um im Verein mit den m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0 , \quad \varphi_2 = 0 , \ldots \varphi_m = 0$$

die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ zu bestimmen. Aus den Gleichungen 2. und 3. kann man die Differentialquotienten der abhängigen Variabeln mit Leichtigkeit eliminiren, denn der Verein derjenigen Gleichungen der Systeme 2. und 3., die sich auf dieselbe unabhängige Variable x_i beziehen, bedingt das Verschwinden ihrer Determinante

$$4. \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 .$$

Aus den $n - m$ Gleichungen

$$\Delta_{m+1} = \Delta_{m+2} = \Delta_{m+3} = \ldots = \Delta_n = 0$$

und den Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m = 0$$

erhält man die gesuchten Werthsysteme der Variabeln. Setzt man in 4. für i der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, so erhält man Determinanten, die identisch verschwinden, weil in ihnen die erste Colonne mit einer späteren identisch ist; man hat daher die n Gleichungen

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \Delta_m = \Delta_{m+1} = \ldots = \Delta_n = 0 ,$$

von denen die ersten m identisch sind, die übrigen nicht. Die Determinanten Δ_i weichen bloss in Bezug auf die erste Colonne der Elemente von einander ab. Bezeichnet man daher mit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ die Coefficienten der Glieder der ersten Colonne in jeder der Determinanten Δ_i, so ist

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots + \mu_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 .$$

Dividirt man durch μ und bezeichnet $\mu_r : \mu$ mit λ_r, so erhält man die Gleichungen

$$5. \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 , \quad i = 1, 2, 3, \ldots n .$$

Da diese n Gleichungen im Verein mit den m Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ausreichen, so kann man sie zur Lösung des Problems benutzen. Dieselben $(n + m)$ Gleichungen werden aber auch erhalten, wenn man das unbedingte Problem stellt: Die Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ zu finden, welche die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Denn die partialen Differentialquotienten von F nach den x führen auf die Gleichungen 5., und die nach den λ führen auf die Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0 .$$

Wir erhalten somit folgende Regel: Um die Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ zu finden, welche die Function

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

zu einem Maximum oder Minimum machen und die zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_m = 0 ,$$

bilde man die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m ,$$

und suche die Systeme der Variabeln

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m$$

auf, welche F zu einem Maximum oder Minimum machen; die dabei erhaltenen Systeme $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind die gesuchten.

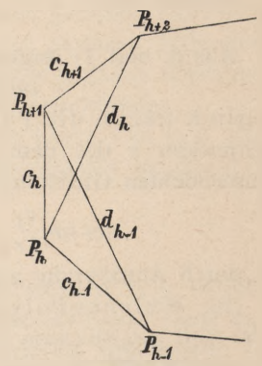
Um zu entscheiden, ob für die aufgefundenen Werthe der $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Function f ein Maximum, ein Minimum oder keins von beiden wird, hat man die homogene quadratische Form zu bilden

$$2V = \Sigma_1^n \Sigma_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k ,$$

wobei die ξ_i den aus den Bedingungsgleichungen fliessenden m Gleichungen unterworfen sind

$$\Sigma_i \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \xi_i = 0 , \quad h = 1, 2, 3 \ldots m ,$$

und zu untersuchen, ob nach Einsetzung der gefundenen Werthe der x die Function $2V$ für alle realen ξ_i das negative oder das positive Zeichen hat, oder nicht dasselbe Zeichen bewahrt. Näher auf diese Kriterien einzugehen, müssen wir uns versagen.



(M. 494.)

15. Aus n gegebenen Seiten, die in bestimmter Reihe auf einander folgen, das Polygon mit grösstem Flächeninhalte zu construiren.

Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k$ die Eckpunkte und x_h, y_h die rechtwinkeligen Coordinaten von P_h, so ist die doppelte Fläche des Polygons

$$\Sigma_1^n (x_{h+1} - x_{h-1}) y_h .$$

Bezeichnet man mit c_h die Strecke $P_h P_{h+1}$, so sind die n Bedingungen zu erfüllen

$$\sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + (y_h - y_{h-1})^2} - c_h = 0 .$$

Also hat man

$$F = \Sigma_1^n \left\{ (x_{h+1} - x_{h-1}) y_h + \lambda_h \left[\sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + (y_h - y_{h-1})^2} - c_h \right] \right\} ,$$
$$h = 1, 2 \ldots n ,$$

wobei x_0, y_0 durch x_n, y_n zu ersetzen ist.

Setzt man die partialen Differentialquotienten von F nach den Variabeln gleich Null, so erhält man

$$- (y_{h+1} - y_{h-1}) + \lambda_h \frac{x_h - x_{h-1}}{c_{h-1}} - \lambda_{h+1} \frac{x_{h+1} - x_h}{c_h} = 0 ,$$

$$1. \qquad (x_{h+1} - x_{h-1}) + \lambda_h \frac{y_h - y_{h-1}}{c_{h-1}} - \lambda_{h+1} \frac{y_{h+1} - y_h}{c_h} = 0 .$$

Wir bezeichnen die Strecke $P_{h-1} P_{h+1}$ mit d_{h-1}, ihre Winkel mit OX, OY und c_k mit $(H-1, x)$, $(H-1, y)$ und $(H-1, k)$; ferner die Winkel von c_k mit OX, OY und c_i mit (k, x), (k, y) und (k, i); alsdann folgt aus 1.

$$2. \qquad - d_{h-1} \cdot cos(H-1, y) + \lambda_h cos(h-1, x) - \lambda_{h+1} cos(h, x) = 0 ,$$

$$3. \qquad d_{h-1} \cdot cos(H-1, x) + \lambda_h cos(h-1, y) - \lambda_{h+1} cos(h, y) = 0 .$$

Werden 2. und 3. mit $cos(H-1, x)$ und $cos(H-1, y)$ multiplicirt und addirt, so folgt

$$4. \qquad \lambda_h cos(H-1, h-1) - \lambda_{h+1} cos(H-1, h) = 0 .$$

Multiplicirt man dagegen 2. und 3. mit $cos(h-1, y)$ und $cos(h-1, x)$ und subtrahirt, so entsteht

$$5. \qquad d_{h-1} cos(H-1, h-1) - \lambda_{h+1} sin(h, h-1) = 0 .$$

Aus 4. folgt

6. $$\frac{\lambda_h}{cos(H-1,\ h)} = \frac{\lambda_{h+1}}{cos(H-1,\ h-1)};$$
aus 5. und 6.

7. $$\frac{d_{h-1}}{sin(h,\ h-1)} = \frac{\lambda_{h+1}}{cos(H-1,\ h-1)} = \frac{\lambda_h}{cos(H-1,\ h)}.$$

Das Dreieck $P_{h-1}P_hP_{h+1}$ lehrt

8. $$\frac{d_{h-1}}{sin(h,\ h-1)} = \frac{c_{h-1}}{sin(H-1,\ h)} = \frac{c_h}{sin(H-1,\ h-1)};$$
folglich ist

9. $$\lambda_{h+1} = c_h\, cot(H-1,\ h-1).$$

Ersetzt man in 7. und 8. h durch $h+1$, so erhält man für das Dreieck $P_h P_{h+1} P_{h+2}$

10. $$\frac{d_h}{sin(h+1,\ h)} = \frac{\lambda_{h+2}}{cos(H,\ h)} = \frac{\lambda_{h+1}}{cos(H,\ h+1)} = \frac{c_h}{sin(H,\ h+1)} = \frac{c_{h+1}}{sin(H,\ h)}.$$

Hieraus folgt

11. $$\lambda_{h+1} = c_h\, cot(H,\ h+1).$$

Aus 9. und 11. ergiebt sich
$$cot(H-1,\ h-1) = cot(H,\ h+1),$$
folglich liegen die Punkte P_{h-1}, P_h, P_{h+1}, P_{h+2} auf einem Kreise. Der Halbmesser r des dem Maximalpolygon umschriebenen Kreises wird aus der transcendenten Gleichung bestimmt
$$arc\,sin\frac{c_1}{2r} + arc\,sin\frac{c_2}{2r} + \ldots + arc\,sin\frac{c_n}{2r} = \pi,$$
die durch Annäherung aufgelöst werden kann.

16. Welches Polygon unter allen Polygonen von gegebener Eckenzahl und gegebenem Umfange hat die grösste Fläche?

Ist n Anzahl der Ecken und c der Perimeter des Polygons, so ist die Function F

1. $$F = \Sigma_1^n (x_{h-1} - x_{h+1})\, y_h + \lambda\left[\Sigma_1^n \sqrt{(x_h - x_{h+1})^2 + (y_h - y_{h+1})^2} - c\right] = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen
$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = -y_{h-1} + y_{h+1} + \lambda\left[\frac{x_h - x_{h+1}}{\sqrt{(x_h - x_{h+1})^2 + (y_h - y_{h+1})^2}} - \frac{x_{h-1} - x_h}{\sqrt{(x_{h-1} - x_h)^2 + (y_{h-1} - y_h)^2}}\right] = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = x_{h-1} - x_{h+1} + \lambda\left[\frac{y_h - y_{h+1}}{\sqrt{(x_h - x_{h+1})^2 + (y_h - y_{h+1})^2}} - \frac{y_{h-1} - y_h}{\sqrt{(x_{h-1} - x_h)^2 + (y_{h-1} - y_h)^2}}\right] = 0.$$

Durch Anwendung der Bezeichnungen in der vorigen Aufgabe gehen diese Gleichungen über in

3. $$d_{h-1} \cdot cos(H-1,\ y) = \lambda\,[cos(h,\ x) - cos(h-1,\ x)],$$

4. $$d_{h-1} \cdot cos(H-1,\ x) = -\lambda\,[cos(h,\ y) - cos(h-1,\ y)].$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht
$$d_{h-1}^2 = 2\lambda^2[1 - cos(h-1,\ h)],$$
daher ist

5. $$d_{h-1} = 2\lambda\, sin\tfrac{1}{2}(h-1,\ h).$$

Ferner ergiebt sich, wenn man 3. mit $cos(h-1,\ y)$ und 4. mit $cos(h-1,\ x)$ multiplicirt und addirt

6. $$d_{h-1}\, cos(H-1,\ h-1) = \lambda\, sin(h-1,\ h).$$

Aus 5. und 6. folgt weiter
$$cos(H-1,\ h-1) = cos\tfrac{1}{2}(h-1,\ h), \quad \text{und daher}$$
$$(H-1,\ h-1) = \tfrac{1}{2}(h-1,\ h).$$

Dies zeigt, dass die Basis $P_{h-1}P_{h+1}$ mit der Halbirungslinie des Aussenwinkels von der Spitze des Dreiecks $P_{h-1}P_hP_{h+1}$ parallel, dass mithin $P_{h-1}P_hP_{h+1}$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist. Hieraus ergiebt sich weiter, dass alle Seiten des Maximalpolygons einander gleich sind. Aus der vorigen Aufgabe erfolgt dann weiter, dass alle Winkel des gesuchten Polygons gleich sind. Unter allen Polygonen von gegebener Seitenzahl und gegebenem Umfange hat das reguläre die grösste Fläche.

§ 15. Singuläre Punkte, Tangenten und Tangentenebenen an Curven und Flächen.

1. Unter einem singulären Punkte einer Curve oder Fläche $f = 0$ versteht man einen Punkt der Curve oder Fläche, für welchen alle partialen Differentialquotienten erster Ordnung der Function f, — oder alle partialen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung — oder allgemein alle partialen Differentialquotienten erster, zweiter u. s. w. bis zur $r$ten Ordnung verschwinden.

Ist x, y ein singulärer Punkt der einfachsten Art der Curve $f = 0$, d. i. ein Punkt, für welchen nur die ersten partialen Differentialquotienten verschwinden, so genügen x, y den Gleichungen

1. $$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Coordinaten x, y, so erhält man eine Gleichung zwischen den Constanten der Curvengleichung; diese muss erfüllt sein, wenn singuläre Punkte auf der Curve vorhanden sein sollen. Ist ferner x, y, z ein singulärer Punkt einfachster Art der Fläche $f = 0$, so sind die Gleichungen erfüllt
$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Durch Elimination der Coordinaten ergiebt sich wieder eine Bedingungsgleichung der Constanten der Flächengleichung. Wir sehen hieraus: Eine ebene Curve und eine Fläche enthalten im Allgemeinen keine singulären Punkte; das Vorhandensein eines singulären Punktes setzt vielmehr voraus, dass zwischen den Constanten der Gleichung eine gewisse charakteristische Bedingungsgleichung erfüllt ist.

Sollen singuläre Punkte höherer Art auf einer Curve oder Fläche vorkommen, so müssen mehrere Bedingungsgleichungen erfüllt sein. Die Existenz eines singulären Punktes einer Curve, für welchen die partialen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung verschwinden, verlangt den Verein der Gleichungen
$$f = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Combinirt man mit den beiden ersten Gleichungen jede der übrigen vier, so erhält man vier Systeme von drei Gleichungen; eliminirt man die Coordinaten aus jedem dieser Systeme, so erhält man vier Bedingungsgleichungen als nothwendige und ausreichende Bedingung für einen singulären Punkt dieser Art.

2. Die Gleichung der Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte x, y ist
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0;$$

für einen singulären Punkt ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f = 0$ im Punkte x, y, z ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

und für einen singulären Punkt der Fläche hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Wir sehen daher: *In einem singulären Punkte einer Curve ist die Tangente, in einem singulären Punkte einer Fläche die Tangentenebene unbestimmt.*

3. Ist P ein Punkt der Curve $f = 0$, so sind die Coordinaten eines Punktes Π der Geraden, die durch P geht und mit der X-Achse den Winkel α bildet

1. $$\xi = x + r\cos\alpha, \quad \eta = y + r\sin\alpha,$$

wobei r die Strecke $P\Pi$ bezeichnet. Um die Punkte zu erhalten, welche die Gerade mit der Curve gemein hat, setzt man die Werthe 1. in die Curvengleichung ein; diese enthält dann nur noch die Unbekannte r. Entwickelt man die Function $f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha)$ nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

2. $$\begin{aligned} f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha) &= f(x, y) + r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\ &+ \frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{2\cdot 3}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist $f(x, y) = 0$. Die Gleichung für r enthält daher in allen Gliedern den Faktor r, und liefert eine Wurzel $r = 0$, die dem Punkte P zugehört. Die übrigen Wurzeln r ergeben sich aus der Gleichung

3. $$\begin{aligned} &\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f + \frac{1}{2}r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \\ &+ \frac{1}{6}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Ist nun P ein singulärer Punkt, so verschwindet das erste Glied der linken Seite für jeden Werth von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$; die Gleichung 3. hat daher eine Wurzel $r = 0$. Sind die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung nicht sämmtlich gleich Null, so sind die andern Wurzeln r der Gleichung 3. im Allgemeinen von Null verschieden. Wir schliessen daher: *Jede Gerade, die durch einen singulären Punkt P einfachster Art geht, hat in P mit der Curve zwei Schnittpunkte.*

Ein solcher Punkt wird daher als *Doppelpunkt* der Curve bezeichnet.

Ist P ein Doppelpunkt, so werden die Punkte, in welcher eine durch P gehende Gerade die Curve noch ausser in P durchschneidet, aus der Gleichung gewonnen

4. $$\frac{1}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{r}{6}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0.$$

Wählt man die Gerade so, dass

5. $$\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha = 0,$$

so hat die Gleichung 4. eine Wurzel $r = 0$. Die Gerade hat alsdann in P drei Punkte mit der Curve gemein; sie giebt eine Richtung an, in welcher man vom Doppelpunkte aus auf der Curve fortschreiten kann und heisst daher *Tangente im Doppelpunkte.*

Durch die Gleichung 5. werden zwei Gerade bestimmt, die real und verschieden, real und gleich, oder conjugirt complex sind, je nachdem

6. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 \lesseqgtr 0.$$

Sind die beiden Tangenten im Doppelpunkte real und verschieden, so bezeichnet man den singulären Punkt als *Doppelpunkt im engern Sinne*; in diesem Falle kann man von P aus in zwei verschiedenen Richtungen auf der Curve fortschreiten, die Curve geht also zweimal durch P hindurch. Sind sie real und vereint, so giebt man ihm den Namen *Rückkehrpunkt* und die durch 5. bestimmte Gerade heisst *Rückkehrtangente*. Sind sie complex, so kann von dem Punkte aus in keiner realen Richtung auf der Curve fortschreiten, es giebt also keine realen Punkte der Curve, die dem singulären Punkte benachbart wären, er ist ein *vereinzelter* oder *isolirter Punkt*.

Die Gleichung der beiden Doppelpunktstangenten wird erhalten, wenn man in 5. setzt

$$\cos\alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{\eta - y}{r}.$$

Man erhält

7. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi - x)(\eta - y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta - y)^2 = 0.$$

4. Wir geben zunächst hierzu einige Beispiele.

Für die Doppelpunkte der Curve dritter Ordnung

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3ex^2 + 6fxy + 3gy^2 = 0$$

hat man
$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy = 0,$$
$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + dy^2 + 2fx + 2gy = 0.$$

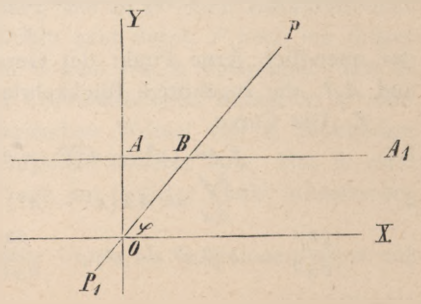
Alle drei Curven $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gehen durch den Nullpunkt, daher ist dieser Doppelpunkt von f; mehr als einen Doppelpunkt kann f nicht haben; denn hätte eine Curve III. O. zwei Doppelpunkte A und B, so würde die Gerade AB in A zwei und in B zwei Punkte mit der Curve gemein haben, hätte also vier Schnittpunkte mit der Curve, im Widerspruche mit der Thatsache, dass eine Gerade mit einer (eigentlichen, nicht in Kegelschnitt und Gerade oder in drei Gerade zerfallenden) Curve III. O. nur drei Punkte gemein haben kann. Man hat

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ax + by + e, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = bx + cy + f, \quad \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = cx + dy + g.$$

Für den Doppelpunkt $x = y = 0$ erhalten diese Ausdrücke der Reihe nach die Werthe e, f, g; daher ist die Gleichung der Doppelpunktstangenten

$$ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0.$$

Der Nullpunkt ist ein Doppelpunkt im engern Sinne, wenn $eg - f^2 < 0$, ein Rückkehrpunkt, wenn $eg - f^2 = 0$, ein isolirter Punkt, wenn $eg - f^2 > 0$.



(M. 495.)

5. Zieht man durch den Nullpunkt Gerade, und trägt vom Schnittpunkte B dieser Geraden mit einer Parallelen AA_1 zur Abscissenachse auf der Geraden nach

beiden Seiten hin eine gegebene Strecke $BP = P_1 B = m$ ab, so ist der Ort der Punkte P und P_1 eine Curve, die unter dem Namen der Conchoide des NIKOMEDES bekannt ist. Ist $OA = p$, und bezeichnet man Radius vector und Anomalie eines Curvenpunktes r und φ, so gelten für P und P_1 die Gleichungen

$$(r \mp m)\, sin\varphi = p\,.$$

Ersetzt man $sin\varphi$ durch $y : r$, so erhält man

$$\mp m \frac{y}{r} = p - y,$$

und hieraus die rationale Gleichung

1. $$f \equiv (x^2 + y^2)(p - y)^2 - m^2 y^2 = 0\,.$$

Hieraus findet man

2. $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x(p - y)^2, \qquad 3.\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = (y - p)(x^2 + 2y^2 - py) - m^2 y,$$

4. $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (p - y)^2, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x(y - p), \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + 6y^2 - 6py + p^2 - m^2\,.$$

Aus 2. folgt für Doppelpunkte

5. $$x = 0, \quad \text{oder} \quad y = p.$$

Setzt man das erstere in 1. und 3. ein, so ergiebt 1.

6. $$y^2 = 0, \quad \text{oder} \quad (p - y)^2 = m^2, \quad \text{und 3.}$$

7. $$y = 0, \quad \text{oder} \quad (y - p)(2y - p) = m^2\,.$$

Hieraus folgt, dass der Nullpunkt den Gleichungen 1., 2. und 3. genügt; da er die Grössen 4. nicht zu Null macht, so ist er ein Doppelpunkt der Conchoide. Die beiden andern Werthe für y unter 6. und 7. stimmen nicht überein; der in 5. noch angegebene Werth $y = p$ befriedigt 3. nur unter der Annahme $x = \infty$; beide Werthe genügen auch 1., und machen 4. nicht gleich Null, sind also Coordinaten eines zweiten Doppelpunktes.

Setzt man in den Formeln 4. $x = y = 0$, so erhält man die Gleichung der Doppelpunktstangenten des Nullpunktes

8. $$px^2 + (p^2 - m^2)y^2 = 0\,.$$

Ist $p > m$, so sind diese Tangenten conjugirt complex; der Nullpunkt wird in diesem Falle zwar durch die Construction der Curve nicht erhalten, gehört aber als isolirter Punkt zu der durch die Gleichung 1. definirten Curve. Ist $p = m$, so hat die Curve in O einen Rückkehrpunkt und OY ist Rückkehrtangente; ist $p < m$, so ist O ein eigentlicher Doppelpunkt.

Der zweite Doppelpunkt ist der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1. Für die Coordinaten desselben ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ unbestimmt}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \infty,$$

die Gleichung der Doppelpunktstangenten ist daher

$$(y - p)^2 = 0;$$

der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1 ist somit ein Rückkehrpunkt, und AA_1 die zugehörige Rückkehrtangente der Conchoide.

6. Die Curve

1. $$f \equiv (x^2 - a^2)^2 - ay^2(3a + 2y) = 0^{*)} \quad \text{liefert}$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - a^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6ay(a + y),$$

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6a(a + 2y)\,.$$

*) SALMON-FIEDLER, Analyt. Geom. der höh. ebenen Curven, Leipzig 1873, 1. Kap., 2. Abschn.

Für Doppelpunkte folgt aus 2.

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm a,$$

und

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -a\,.$$

Von den sechs Paar Punkten, die sich durch Combination dieser Abscissen und Ordinaten ergeben, genügen der Curvengleichung die drei Punkte

$$x_1 = 0,\ y_1 = -a; \qquad x_2 = a,\ y_2 = 0; \qquad x_3 = -a,\ y_3 = 0\,.$$

Für keinen dieser Punkte verschwinden die zweiten Differentialquotienten; also sind die so bestimmten Punkte P_1, P_2, P_3 Doppelpunkte. Die Gleichungen der Doppelpunktstangenten sind

$$\text{für } P_1: \quad 2x^2 - 3(y + a)^2 = 0,$$
$$\text{für } P_2: \quad 4(x - a)^2 - 3y^2 = 0,$$
$$\text{für } P_3: \quad 4(x + a)^2 - 3y^2 = 0\,.$$

Hieraus erkennt man, dass P_1, P_2, P_3 eigentliche Doppelpunkte sind.

7. Wenn in einem Punkte P einer Curve $f = 0$ die ersten und die zweiten partialen Differentialquotienten von f verschwinden, aber nicht sämmtliche dritte, so hat die Gleichung (vergl. No. 2, 2)

$$f(x + r\cos\alpha,\ y + r\sin\alpha) \equiv f(x, y) + r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$
$$+ \frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{2\cdot 3}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}r^4\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f + \ldots$$

drei Wurzeln $r = 0$, und die übrigen Wurzeln folgen aus der Gleichung

1. $$\frac{1}{2\cdot 3}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f + \ldots = 0.$$

Für jede durch den Punkt P gehende Gerade sind also drei Schnittpunkte mit der Curve in P vereint; der Punkt wird daher als dreifacher Punkt der Curve bezeichnet. Bestimmt man α aus der Gleichung

2. $$\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f$$
$$\equiv \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\cdot\cos^3\alpha + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\cos\alpha\sin^2\alpha + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\sin^3\alpha = 0,$$

so erhält man drei durch P gehende Gerade; diese enthalten die Richtungen, in denen man von P aus auf der Curve fortschreiten kann. Durch einen dreifachen Punkt geht daher die Curve dreimal. Die drei durch 2. bestimmten Geraden bezeichnet man als die Tangenten im dreifachen Punkte. Sind die Wurzeln von 2. real und verschieden, so ist P ein dreifacher Punkt im engern Sinne; sind zwei Wurzeln gleich, so wird die der Doppelwurzel zugehörige Gerade T_1 in P von zwei Curvenästen berührt, die in P einen Rückkehrpunkt und T_1 zur Rückkehrtangente haben; ausserdem geht durch P noch ein dritter Curvenast, dessen Tangente in P der dritten Wurzel von 2. entspricht. Hat 2. drei gleiche Wurzeln, so enden in P drei Curvenäste und haben in P eine gemeinsame Tangente, nämlich die der dreifachen Wurzel von 2. zugehörige Gerade; in diesem Falle ist P ein Rückkehrpunkt höherer Art. Hat 2. eine reale und zwei complexe Wurzeln, so ist P als ein isolirter Punkt aufzufassen, durch den ein Curvenast hindurchgeht.

8. Wenn die Coordinaten der Punkte einer Curve als Functionen eines unabhängigen Parameters u dargestellt sind,

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u),$$

so können Doppelpunkte in der Weise auftreten, dass zwei verschiedene Werthe u_1, u_2 des Parameters dieselben Coordinatenwerthe x, y ergeben, während die Differentialquotienten φ' und ψ' und damit die Tangente

$$\psi' \cdot (\xi - x) - \varphi' \cdot (\eta - y) = 0$$

für die beiden Parameter verschiedene Werthe annehmen. Aendert sich u continuirlich wachsend oder abnehmend von u_1 zu u_2, so beschreibt dabei P eine Curvenschleife, die zu dem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Diese Schleife wird immer kleiner, je kleiner die Differenz $u_1 - u_2$ ist; wenn u_2 von u_1 nur unendlich wenig verschieden ist, so verschwindet die Schleife und der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über. Die Bedingung für einen Rückkehrpunkt ist also, dass einer unendlich kleinen Aenderung von u unendlich kleine Aenderungen höherer Ordnung von x und y entsprechen; daher ist für einen Rückkehrpunkt

$$\frac{dx}{du} = 0, \quad \frac{dy}{du} = 0.$$

A. Für die Curve, welche durch die Gleichungen dargestellt ist

$$x = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c} + d, \quad y = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c_1} + d_1$$

ergiebt sich derselbe Punkt $x = d$, $y = d_1$ für die beiden Parameterwerthe $u = a$ und $u = b$. Die Differentialquotienten der Coordinaten sind

$$\frac{dx}{du} = \frac{(u-a)(u-c) + (u-b)(u-c) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u-a)(u-c_1) + (u-b)(u-c_1) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2}.$$

Für $u = a$ und $u = b$ folgt

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c_1},$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c_1}.$$

Daher ist der Punkt d, d_1 Doppelpunkt und die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte sind

$$\frac{x-d}{a-c_1} - \frac{y-d_1}{a-c} = 0, \quad \frac{x-d}{b-c_1} - \frac{y-d_1}{b-c} = 0.$$

B. Die Cycloide hat die Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u);$$

daher ist

$$\frac{dx}{du} = a(1 - \cos u), \quad \frac{dy}{du} = a \sin u.$$

Beide Differentialquotienten verschwinden für die Parameterwerthe $u = 0$ 2π, 4π u. s. w. Die zugehörigen Punkte sind daher Rückkehrpunkte; die Rückkehrtangenten sind normal zur Abscissenachse.

---

9. Doppelpunkte an Flächen. Um die Punkte Π zu erhalten, die eine durch den Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$ unter den Richtungswinkeln α, β, γ gelegte Gerade mit der Fläche gemein hat, setzt man

$$\xi = x + r\cos\alpha, \quad \eta = y + r\cos\beta, \quad \zeta = z + r\cos\gamma$$

in die Flächengleichung an die Stelle von x, y, z und bestimmt aus der resultirenden Gleichung die Unbekannte r. Entwickelt man nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

1. $$f(x,y,z) + r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \frac{1}{2}r^2\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \frac{1}{6}r^3\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f + \ldots\ldots$$

Nach der Voraussetzung ist $f(x, y, z) = 0$; mithin hat die Gleichung 1. eine Wurzel $r = 0$, entsprechend dem Punkte P. Die andern Wurzeln werden aus der Gleichung bestimmt

2. $$\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\right)f + \frac{1}{2}r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\right)^2 f + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung hat eine Wurzel $r = 0$, die Gleichung 1. also eine Doppelwurzel $r = 0$, wenn die Gerade so gelegt wird, dass

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ersetzt man hier $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die proportionalen Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, so erhält man die Gleichung der Tangentenebene in P.

Sind für P die Gleichungen erfüllt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so verschwindet in 2. das erste Glied unabhängig von α, β, γ. Es hat also denn jede Gerade, die durch P geht, mit der Fläche in P zwei zusammenfallende Schnittpunkte. Sind für P nun nicht sämmtliche partiale Differentialquotienten zweiter Ordnung gleich Null, so verschwindet das zweite Glied von 2. nicht identisch, alsdann hat also im Allgemeinen eine durch P gehende Gerade in P nicht mehr als zwei Schnittpunkte mit der Fläche; der Punkt P wird deswegen als Doppelpunkt der Fläche bezeichnet.

10. Die durch den Doppelpunkt P gehenden Geraden, welche mit der Fläche in P drei zusammenfallende Punkte gemein haben, genügen der Gleichung

1. $$\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0,$$

denn in diesem Falle verschwinden in der Gleichung No. 9, 1. das erste, zweite und dritte Glied, dieselbe hat daher eine dreifache Wurzel $r = 0$. Die der Gleichung 1. genügenden Geraden bezeichnet man als Tangenten im Doppelpunkte. Ersetzt man in 1. die Cosinus der Reihe nach durch $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, so erhält man die Gleichung der von den Tangenten im Doppelpunkte erzeugten Kegelfläche, nämlich

2. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi - x)(\eta - y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\xi - x)(\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta - y)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\eta - y)(\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta - z)^2 = 0.$$

Wir schliessen daher: Die Tangenten im Doppelpunkte einer Fläche sind die Mantellinien eines Kegels II. O., der den Doppelpunkt zur Spitze hat.

Je nach der Realität und den Ausartungen dieses Berührungskegels im Doppelpunkte unterscheidet man verschiedene Ausartungen der Doppelpunkte. Ist der Kegel real und ohne Ausartung, so wird P als Doppelpunkt im engern Sinne bezeichnet. Ist der Kegel imaginär, so ist nur seine Spitze real, und P wird zu einem isolirten Punkte.

11. A. Die Gleichung der Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

für das Centrum als Pol ist

1. $$f = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0\,.$$

Die partialen Differentialquotienten erster Ordnung sind

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a^2 - 2r^2)x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b^2 - 2r^2)y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(c^2 - 2r^2)z\,,$$

wobei
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Die Functionen 1. und 2. verschwinden nur für $x = y = z = 0$.

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 - 4r - 8x^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b^2 - 4r - 8y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2c^2 - 4r^2 - 8z^2\,,$$
$$\frac{\partial x \partial y}{\partial^2 f} = -8xy\,, \quad \frac{\partial x \partial z}{\partial y} = -8xz\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8yz\,.$$

Sie verschwinden für den Nullpunkt nicht; derselbe ist daher ein Doppelpunkt der Fusspunktfläche.

Der Tangentenkegel im Nullpunkte ist, wie sich aus 3. ergiebt:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0\,;$$

derselbe ist imaginär, und daher der Nullpunkt kein Doppelpunkt im engeren Sinne, sondern ein isolirter Punkt.

B. Für das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist die Gleichung der Fusspunktfläche, wieder mit dem Centrum als Pol,

$$f = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0\,.$$

Daher ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a^2 - 2r^2)x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b^2 - 2r^2)y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2(c^2 + 2r^2)z\,;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 - 4r^2 - 8x^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b^2 - 4r^2 - 8y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2c^2 - 4r^2 - 8z^2\,,$$
$$\frac{b^2 f}{\partial x \partial y} = -8xy\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8xz\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8yz\,.$$

Der Nullpunkt ist daher Doppelpunkt, und der Tangentenkegel im Doppelpunkte hat die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0\,.$$

Ist $a = 0$, artet also das Hyperboloid in eine hyperbolische Grenzfläche aus, so artet der Tangentenkegel im Doppelpunkte zu zwei Ebenen aus

$$b^2y^2 - c^2z^2 = 0\,.$$

12. Trägt man auf jeder durch das Centrum eines dreiachsigen Ellipsoids gehenden Geraden vom Centrum aus nach beiden Seiten hin je zwei Strecken ab, die der grossen und der kleinen Halbachse des zur Geraden normalen Diametralschnittes gleich sind, so erhält man die Punkte der FRESNEL'schen Wellenfläche*).

Ist P ein Punkt der Wellenfläche und sind φ, ψ, χ die Richtungswinkel von OP, so genügt $OP = r$ der Gleichung § 14 No. 6, 12

$$\frac{a^2 \cos^2\varphi}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2\psi}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2\chi}{r^2 - c^2} = 0\,.$$

*) Der Name der Fläche bezieht sich auf die Bedeutung, die sie für die Theorie der Aetherschwingungen in optisch zweiachsigen Mitteln hat.

Multiplicirt man mit r und substituirt

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\psi\,, \quad z = r\cos\chi\,,$$

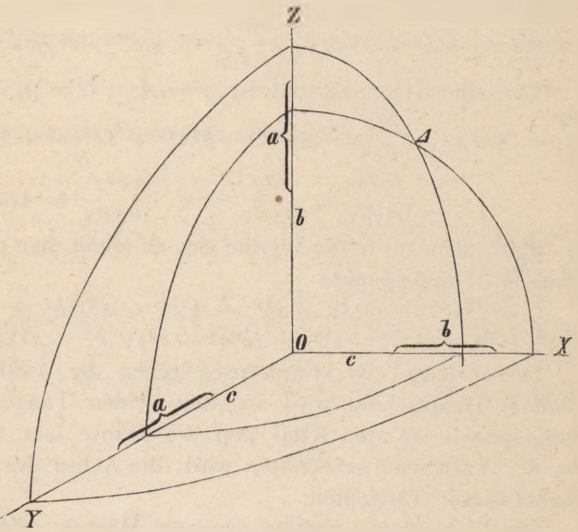
so erhält man die Gleichung der Wellenfläche in der Form

1. $$\frac{a^2x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - c^2} = 0\,.$$

Durch Beseitigung der Nenner erhält man hieraus

2. $$f = (x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - a^2x^2(b^2 + c^2)$$
$$- b^2y^2(a^2 + a^2) - c^2z^2(a^2 + b^2) + a^2b^2c^2 = 0\,.$$

Um eine Vorstellung von der Gestalt der Wellenfläche zu erhalten, bemerke man, dass die Wellenfläche von jeder Coordinatenebene in einem Kreise und in einer Ellipse geschnitten wird; bei der XY-Ebene hat der Kreis den Halbmesser c, die Ellipse in der X- und der Y-Achse der Reihe nach die Halbachsen b und a; bei der XZ-Ebene hat der Kreis den Halbmesser b, die Ellipse in der X- und Z-Achse die Halbachsen c und a; bei der YZ-Ebene hat der Kreis den Halbmesser a, die Ellipse in der Y- und Z-Achse die Halbachsen c und b.



(M. 496.)

Die Differentialquotienten von f sind

3. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2(r^2 - b^2 - c^2)] = 2xA\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + b^2(r^2 - c^2 - a^2)] = 2yB\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + c^2(r^2 - a^2 - b^2)] = 2zC\,,$$

wobei A, B, C zur Abkürzung für die Grössen in den eckigen Klammern eingeführt sind. Die Gleichung der Tangentenebene der Wellenfläche im Punkte P derselben ist daher

4. $$xA(\xi - x) + yB(\eta - y) + zC(\zeta - z) = 0\,.$$

Man überzeugt sich leicht, dass unter den Punkten, welche den Gleichungen

$$xA = yB = zC = 0$$

genügen, nur diejenigen drei Gruppen der Fläche angehören, welche je eines der drei Systeme auflösen

5. $$x = B = C = 0\,,$$
6. $$A = y = C = 0\,,$$
7. $$A = B = z = 0\,,$$

Jede dieser drei Gruppen enthält vier Punkte, nämlich die Schnittpunkte der Kegelschnitte, welche je eine Coordinatenebene mit der Wellenfläche gemein hat.

Unter diesen Gruppen enthält eine vier reale, die andern beiden enthalten imaginäre Punkte; ist $a > b > c$, so sind die vier Punkte der zweiten Gruppe real; einer derselben ist in der Figur mit Δ bezeichnet. Die Coordinaten dieser vier realen Doppelpunkte ergeben sich aus

5. $$x^2 = c^2\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = a^2\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A + 8a^2x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B + 8b^2y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C + 8c^2z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4(a^2+b^2)\,xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 4(a^2+c^2)\,xz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 4(b^2+c^2)\,yz,$$

Für einen Doppelpunkt ist $y = A = C = 0$, und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8a^2x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(a^2x^2+b^2z^2) + 2b^2(x^2+z^2-a^2-c^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8c^2z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 4(a^2+c^2)xz.$$

Setzt man aus 5. die Werthe ein, so erhält man die Gleichung des Tangentenkegels im Doppelpunkte

$$a^2c^2(b^2-a^2)(\xi-x)^2 - \tfrac{1}{4}(c^2-a^2)(b^2-a^2)(c^2-b^2)\eta^2$$
$$+ a^2c^2(c^2-b^2)(\zeta-z)^2 + ac(a^2+c^2)\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}\,(\xi-x)\,\zeta - z) = 0.$$

Dieser Kegel ist symmetrisch gegen die XZ-Ebene; sein in diese Ebene fallender Hauptschnitt wird aus den beiden Tangenten gebildet, die man im Doppelpunkte an den Kreis und die Ellipse legt, in welchen die Wellenfläche von der XZ-Ebene geschnitten wird; die Achse des Kegels halbirt den stumpfen Winkel dieser Tangenten.

Die Wellenfläche besteht aus zwei Mänteln; einem äusseren Mantel, dessen Punkte von den grossen Halbachsen der Diametralschnitte herrühren, und einem inneren, dessen Punkte von den kleinen Halbachsen herrühren; der innere wird ganz von dem äusseren eingeschlossen. Beide Mäntel haben vier Punkte gemein, die vier Doppelpunkte. Wie man aus den Coordinaten der Doppelpunkte erkennt, sind die Geraden $O\Delta$ normal zu den Kreisschnitten des Ellipsoids. In der Umgebung von Δ hat der innere Mantel eine Spitze, der äussere eine trichterförmige Vertiefung. Der Uebergang aus dem inneren durch einen Doppelpunkt in den äusseren Mantel erfolgt entlang der Oberfläche des Tangentenkegels.

---

13. Betrachtet man eine Curve als Einhüllende ihrer Tangenten, so können singuläre Tangenten auftreten, die den Doppelpunkten und den vielfachen Punkten einer als Punktgebilde aufgefassten Curve entsprechen.

Sind u, v und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ die Coordinaten zweier Geraden, und ξ, η die Coordinaten ihres Schnittpunktes, so ist bekanntlich (vergl. § 3, No. 23)

$$\xi : \eta = -\Delta v : \Delta u.$$

Man kann daher setzen

1. $$\Delta u = \eta t, \quad \Delta v = -\xi t,$$

wobei t unbestimmt ist; ändert sich t von $-\infty$ bis $+\infty$, so umhüllt die Gerade $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ den Punkt ξ, η.

Die Geraden $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, welche durch den Punkt ξ, η einer Geraden u, v gehen und die Curve $f(u, v) = 0$ berühren, werden erhalten, indem man t aus der Gleichung berechnet

2. $$f(u + \Delta u,\ v + \Delta v) \equiv f(u + \eta t,\ v - \xi t) = 0,$$

und mit Hülfe der Wurzeln dieser Gleichung und der bekannten Werthe ξ, η, u, v die Coordinaten zusammensetzt

3. $$u + \Delta u = u + \eta t, \quad v + \Delta v = v - \xi t.$$

Entwickelt man $f(u + \eta t,\ v - \xi t)$ nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

4. $$f(u+\eta t,\ v-\xi t) \equiv f(u,v) + t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)f + \frac{1}{1\cdot 2}t^2\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot t^3\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots = 0.$$

Ist u, v eine Tangente der Curve, so ist $f(u, v) = 0$ und daher eine Wurzel der Gleichung 4. gleich Null; die andern Wurzeln ergeben sich aus der Gleichung

5. $$\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)f + \frac{1}{2}t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f + \frac{1}{6}t^2\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots = 0.$$

Wählt man ξ, η so, dass sie der Gleichung genügen

6. $$\eta\frac{\partial f}{\partial u} - \xi\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

so ist hierdurch ein Punkt P vollständig bestimmt; durch diesen Punkt gehen zwei zusammenfallende Tangenten der Curve, der Punkt ist somit der Berührungspunkt der Geraden u, v und der Curve. Die Gleichung desselben ergiebt sich aus 6., wenn man darin η und $(-\xi)$ durch die proportionalen Grössen

$$\mathfrak{u} - u, \quad \mathfrak{v} - v$$

ersetzt; denn ist $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ eine P enthaltende Gerade, so ist für einen bestimmten Werth von t (No. 1)

$$\mathfrak{u} - u = \eta t, \quad \mathfrak{v} - v = -\xi t.$$

Man erhält dadurch die Gleichung

7. $$\frac{\partial f}{\partial u}(\mathfrak{u} - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathfrak{v} - v) = 0,$$

in Uebereinstimmung mit § 5 No. 23, 4.

Wenn es eine Tangente T der Curve giebt, für welche

8. $$\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

so ist die Gleichung 7. identisch erfüllt; in diesem Falle gehen durch jeden Punkt der Geraden T zwei zusammenfallende Tangenten der Curve, die Curve wird daher als Doppeltangente bezeichnet. Die Tangenten, welche ausser der Doppeltangente selbst durch einen Punkt derselben gehen, ergeben sich aus der Gleichung

9. $$\frac{1}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f + \frac{1}{6}t\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0.$$

Bestimmt man ξ, η aus der Gleichung

10. $$\left(\eta\frac{\partial}{\partial u} - \xi\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 f = \eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\eta\xi\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

so fallen für diese beiden Punkte je drei Tangenten der Curve mit der Doppeltangente zusammen. Die Gleichung dieser beiden Punkte wird erhalten, wenn man 10. mit t^2 multiplicirt und dann die Substitution ausführt

$$\eta t = \mathfrak{u} - u, \quad \xi t = \mathfrak{v} - v.$$

Man erhält dadurch

11. $$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\mathfrak{u} - u)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(\mathfrak{u} - u)(\mathfrak{v} - v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\mathfrak{v} - v)^2 = 0.$$

Diese beiden Punkte werden als die Berührungspunkte der Doppeltangente bezeichnet. Sind sie real und verschieden, so ist T eine Doppeltangente im engern Sinne; sind sie conjugirt complex, so enthält T keinen realen Punkt der Curve und ist daher eine isolirte Tangente.

14. Beispiel. Sind P_1 und P_2 lineare Functionen von Liniencoordinaten, so werden durch die Gleichung

$$P_1 P_2 + \lambda(P_1^2 + aP_1 P_2 + bP_2^2) = 0$$

für ein veränderliches λ Punktpaare dargestellt, die auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen und eine quadratische Involution bilden. Sind Q_1 und Q_2 ebenfalls lineare Functionen in Liniencoordinaten, so bilden die Punkte

$$Q_1 + \lambda Q_2 = 0$$

eine Punktreihe, die mit der Involution projectiv ist. Die Geraden, welche entsprechende Punkte der Involution und der Reihe verbinden, genügen der Gleichung

$$f = (P_1^2 + aP_1 P_2 + bP_2^2)Q_1 - P_1 P_2 Q_1 = 0;$$

dies ist die Gleichung einer Curve dritter Klasse. Man erhält

$$\frac{\partial f}{\partial u} = P_1 M + P_2 N, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = P_1 M' + P_2 N',$$

wobei M, N, M', N' leicht zu bildende Functionen sind. Man sieht hieraus, dass die drei Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

durch die Gerade erfüllt werden, deren Coordinaten den Gleichungen

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0$$

genügen. Die Curve $f = 0$ hat also die Gerade $P_1 P_2$ zur Doppeltangente.

15. Sind u, v, w, und $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ die Coordinaten zweier Tangentialebenen T, T' der Fläche $f(u, v, w) = 0$, sind ferner $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Coordinaten einer durch den Schnitt von T und T' gehenden Ebene $\mathfrak{T}$, so ist bekanntlich (vergl. § 6, No. 9, 4)

$$\frac{\mathfrak{u} - u}{\Delta u} = \frac{\mathfrak{v} - v}{\Delta v} = \frac{\mathfrak{w} - w}{\Delta w}.$$

Man kann daher, mit t eine unbestimmte Grösse bezeichnend, setzen

$$1. \qquad \mathfrak{u} = u + t \cdot \Delta u, \quad \mathfrak{v} = v + t \cdot \Delta v, \quad \mathfrak{w} = w + t \cdot \Delta w.$$

Die Tangentialebenen von f, welche durch die Gerade TT' gehen, werden somit aus der Gleichung erhalten

$$f(u + t \cdot \Delta u, \quad v + t \cdot \Delta v, \quad w + t \cdot \Delta w) = 0.$$

Entwickelt man nach dem Taylor'schen Satze, so erhält man

$$2. \quad \begin{aligned} &f(u, v, w) + t\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right) f + \frac{1}{2} t^2 \cdot \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 f \\ &\quad + \frac{1}{6} \cdot t^3 \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial n} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right)^3 f + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist $f(u, v, w) = 0$; die Gleichung 2. hat daher eine Wurzel $t = 0$; ihr gehört die Ebene T zu.

Werden Δu, Δv, Δw so gewählt, dass

$$3. \qquad \Delta u \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \Delta v \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \Delta w \cdot \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

so hat die Gleichung 2. noch eine Wurzel $t = 0$; es fallen denn also zwei durch die Gerade TT' gehende Tangentenebene der Fläche in T zusammen. Bezeichnet man die Coordinaten von T' mit U, V, W, so ist

$$\Delta u = U - u, \quad \Delta v = V - v, \quad \Delta w = W - w,$$

aus der Gleichung 3. erhält man daher

$$4. \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(U - u) + \frac{\partial f}{\partial v}(V - v) + \frac{\partial f}{\partial w}(W - w) = 0;$$

dies ist in Uebereinstimmung mit § 6, No. 5, 4 die Gleichung des auf T enthaltenen Tangentialpunkts der Fläche f.

Giebt es eine Tangentenebene T der Fläche, für welche die Differentialquotienten verschwinden

$$5. \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

so dass für die Coordinaten von T die vier Gleichungen bestehen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

so ist 3. identisch erfüllt; jede auf T enthaltene Gerade hat dann die Eigenschaft, dass zwei durch sie hindurchgehende Tangentenebenen der Fläche f mit T zusammenfallen. Die Ebene T heisst daher Doppeltangentenebene.

Sind in 2. u, v, w die Coordinaten einer Doppeltangentenebene, so hat die Gleichung 2. unabhängig von der Wahl der Ebene T zwei Wurzeln $t = 0$; die übrigen ergeben sich aus

$$6. \quad \frac{1}{2}\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial x} + \Delta v \frac{\partial}{\partial y} + \Delta w \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \frac{1}{6}\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w}\right)^3 f + \ldots = 0.$$

Wählt man nun T' so, dass

$$7. \qquad \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial x} + \Delta v \frac{\partial}{\partial y} + \Delta w \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0,$$

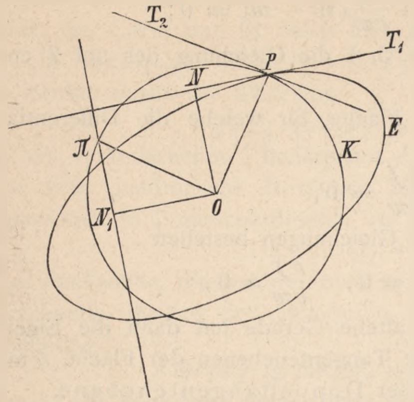
so hat die Gleichung 6. eine Wurzel $t = 0$, die Gleichung 2. mithin eine dreifache Wurzel $t = 0$; für die Geraden, in welchen die der Gleichung 7. entsprechenden Ebenen T' die Doppeltangentenebene T schneiden, fallen also drei Tangentenebenen mit T zusammen. Die Gleichung 7. giebt entwickelt

$$8. \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(U - u)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(U - u)(V - v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}(U - u)(W - w) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(V - v)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(V - v)(W - w) + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(W - w)^2 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Grenzfläche zweiter Klasse; die in T liegenden Tangenten dieser Grenzfläche (die Träger der Ebenenbüschel, welche die Grenzfläche berühren) heissen die Tangenten der Fläche auf der Doppeltangentenebene, die auf T liegende Curve zweiten Gerades, welche sie berühren, und deren Punkte der Fläche f angehören, ist die Berührungscurve der Doppeltangentenebene. Ist diese Curve eine eigentliche Curve zweiten Grades, so wird T als Doppelebene im engern Sinne bezeichnet; sie kann auch zu zwei getrennten oder vereinten Punkten ausarten, oder imaginär sein; im letztern Falle ist T eine isolirte Tangentenebene der Fläche f, ohne reale Berührungspunkte.

16. Als Beispiel wählen wir die Wellenfläche. Um zunächst die Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten zu erhalten, bemerken wir Folgendes: Ist P ein Punkt des der Wellenfläche zu Grunde liegenden Ellipsoids E, so beschreibe man um das Centrum O des Ellipsoids eine Kugel K, die durch P geht, und construire die Ebenen T_1 und T_2, die E und K in P berühren. Die Schnittlinie QQ_1 dieser beiden Ebenen ist normal zu OP, und berührt den durch QQ_1 gehenden Diametralschnitt in P; folglich ist P ein Scheitel dieses Diametralschnitts*).

*) In Fig. 497 sind E, K, T_1, T_2 durch ihre Schnittlinien mit der Ebene vertreten, die durch OP normal zu QQ_1 geht.



(M. 497).

Macht man daher auf einer durch O gehenden Normalen zu OPQ die Strecke $O\Pi = OP$, so ist Π ein Punkt der Wellenfläche; wir wollen ihn als den mit P verbundenen Punkt bezeichnen.

Die Gleichungen der Ebenen T_1 und T_2 sind, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ laufende Coordinaten bezeichnen, und $OP = r$ gesetzt wird

$$1.\quad T_1 \equiv \frac{x}{a^2}\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}\mathfrak{y} + \frac{z}{c^2}\mathfrak{z} - 1 = 0.$$
$$T_2 \equiv x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} - r^2 = 0,$$

Die Ebene OQQ_1 geht durch die Schnittlinie $T_1 T_2$ und durchs Centrum; ihre Gleichung ist daher

$$r^2 T_1 - T_2 \equiv x\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)\mathfrak{x} + y\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)\mathfrak{y} + z\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)\mathfrak{z} = 0.$$

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene, d. i. der Geraden $O\Pi$ folgen hieraus zu

$$2.\quad \cos\varphi = \frac{x\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)}{rM}, \quad \cos\psi = \frac{y\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)}{rM}, \quad \cos\chi = \frac{z\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)}{rM}.$$

Hierbei ist

$$3.\quad M^2 = \frac{1}{r^2}\left[x^2\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2 + y^2\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right)^2 + z^2\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)^2\right] = r^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) - 1.$$

Aus 2. ergeben sich die Coordinaten des mit P verbundenen Punktes der Wellenfläche zu

$$4.\quad \xi = \frac{x}{M}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right), \quad \eta = \frac{y}{M}\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right), \quad \zeta = \frac{z}{M}\left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right).$$

Aus der von Nennern freien Gleichung der Wellenfläche erhält man die Gleichung der Tangentenebene im Punkte Π

$$T \equiv \xi[\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)](\mathfrak{x} - \xi) + \eta[\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)](\mathfrak{y} - \eta)$$
$$+ \zeta[\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)](\mathfrak{z} - \zeta) = 0,$$

wenn
$$\varphi = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2,$$

Legt man Ebenen T_1', T_2', T' parallel zu T_1, T_2, T durch den Nullpunkt, so sind deren Gleichungen

$$T_1' \equiv \frac{x}{a^2}\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}y + \frac{z}{c^2}\mathfrak{z} = 0,$$
$$T_2' \equiv x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = 0,$$
$$T' \equiv \xi[\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)]\mathfrak{x} + \eta[\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)]\mathfrak{y} + \zeta[\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)]\mathfrak{z} = 0.$$

Hierzu fügen wir noch die Gleichung der Ebene OQQ_1

$$T_3' \equiv \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{z} = 0,$$

und beachten, dass die Ebenen T_1', T_2', T_3' ein Büschel bilden. Die Function T lässt sich in folgender Weise unter Benutzung der Formeln 4. zerlegen

$$T' \equiv \varphi \cdot T_3' + \frac{r^2}{M}[(r^2 - a^2)x\mathfrak{x} + (r^2 - b^2)y\mathfrak{y} + (r^2 - c^2)z\mathfrak{z}]$$
$$- \frac{1}{M}[(b^2 + c^2)(r^2 - a^2)x\mathfrak{x} + (c^2 + a^2)(r^2 - b^2)y\mathfrak{y} + (a^2 + b^2)(r^2 - c^2)z\mathfrak{z}]$$
$$\equiv \varphi \cdot T_3' + \left[\frac{r^4}{M} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{M}r^2 + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\right]T_2' - a^2b^2c^2 \cdot T_1'.$$

Da hiernach die Function T' in der Form erscheint

$$T' \equiv \alpha T_3' + \beta T_2' + \gamma T_1',$$

so erkennt man, dass T' durch die den Ebenen T_1', T_2', T_3 gemeinsame Schnittlinie geht. Hieraus folgt, dass *die Tangentenebene der Wellenfläche in Π normal zur Ebene ΠOP ist.*

Um den Winkel zu beurtheilen, den die Tangentenebenen T und T_1 einschliessen, bilden wir die Ausdrücke

$$\frac{x}{a^2}\cdot\xi[\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)] = r^2\varphi\cdot\frac{x^2}{a^4} - (\varphi - r^4)\cdot\frac{x^2}{a^2} - r^2x^2 - r^2(b^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} + (b^2 + c^2)x^2,$$
$$5.\quad \frac{y}{b^2}\cdot\eta[\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)] = r^2\varphi\cdot\frac{y^2}{b^4} - (\varphi - r^4)\cdot\frac{y^2}{b^2} - r^2y^2 - r^2(c^2 + a^2)\frac{y^2}{b^2} + (c^2 + a^2)y^2,$$
$$\frac{z}{c^2}\cdot\zeta[\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)] = r^2\varphi\cdot\frac{z^2}{c^4} - (\varphi - r^4)\cdot\frac{z^2}{c^2} - r^2z^2 - r^2(a^2 + b^2)\frac{z^2}{c^2} + (a^2 + b^2)z^2.$$

In Rücksicht auf

$$(b^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} + (c^2 + a^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2 + b^2)\frac{z^2}{c^2} = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - r^2,$$
$$(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\,r^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$$

ergiebt sich die Summe der Ausdrücke 5. zu

$$6.\quad \varphi r^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) - (\varphi - r^4) - r^4 - r^2(a^2 + b^2 + c^2 - r^2) + (a^2 + b^2 + c^2)\,r^2$$
$$- (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \equiv \varphi M^2 + r^4 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2).$$

Nun ist

$$\varphi M^2 \equiv a^2\xi^2M^2 + b^2\eta^2M^2 + c^2\zeta^2M^2,$$
$$\equiv a^2x^2\left(\frac{r^4}{a^4} - 2\frac{r^2}{a^2} + 1\right) + b^2y^2\left(\frac{r^4}{b^4} - 2\frac{r^2}{b^2} + 1\right) + c^2z^2\left(\frac{r^4}{c^4} - 2\frac{r^2}{c^2} + 1\right),$$
$$\equiv r^4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 2r^2(x^2 + y^2 + z^2) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$
$$\equiv - r^4 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Setzt man diesen Werth in 6. ein, so erkennt man, dass die Summe der drei Produkte 5. verschwindet und hat somit den Satz: *Die Tangentenebenen zweier verbundenen Punkte des Ellipsoids E und der Wellenfläche sind normal zu einander.*

Ist $ON \perp T_1'$ und $ON_1 \perp T$, so folgt hieraus, dass $ON \perp ON_1$ und $ON = ON_1$. Die Gleichung jeder Ebene, die den Schnitt $T_1'T_2'$ enthält, hat die Form

$$T_2' + \alpha T_1' = 0.$$

Soll sie ON enthalten, mithin normal zu T_1 sein, so muss die Gleichung erfüllt sein

$$x\left(1 + \frac{\alpha}{a^2}\right)\cdot\frac{x}{a^2} + y\left(1 + \frac{\alpha}{b^2}\right)\cdot\frac{y}{b^2} + z\left(1 + \frac{\alpha}{c^2}\right)\cdot\frac{z}{c^2} = 0,$$

aus welcher sich ergiebt

$$\alpha = -1 : \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Sind u, v, w die Coordinaten von T_1, sowie $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die von T_2, so ist

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = u^2 + v^2 + w^2 = \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2,$$

denn diese Quadratsummen sind gleich dem reciproken Quadrate der Strecke $ON = ON_1$. Setzt man

$$1:ON = 1:ON_1 = \rho,$$

so ist daher die Gleichung der ON enthaltenden Ebene des Büschels $T_1'T_2'$, d. i. die Gleichung der Normalebene zu ON_1,

6. $$\frac{x}{a^2}(a^2\rho^2 - 1)\mathfrak{x} + \frac{y}{b^2}(b^2\rho^2 - 1)\mathfrak{y} + \frac{z}{c^2}(c^2\rho^2 - 1)\mathfrak{z} = 0.$$

Ersetzt man $x:a^2$, $y:b^2$, $z:c^2$ durch u, v, w, so erhält man für die Cosinus der Winkel der Geraden ON und der Achsen

7. $$\cos\varphi = \frac{u}{\rho L}(a^2\rho^2 - 1), \quad \cos\psi = \frac{v}{\rho L}(b^2\rho^2 - 1), \quad \cos\chi = \frac{w}{\rho L}(c^2\rho^2 - 1),$$

wobei L sich ergiebt aus

8. $$L^2 = \frac{1}{\rho^2}[u^2(a^2\rho^2-1)^2 + v^2(b^2\rho^2-1)^2 + w^2(c^2\rho^2-1)^2] = \rho^2(a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2) - 1.$$

Die Coordinaten von T folgen aus

$$\mathfrak{u} = \rho\cos\varphi, \quad \mathfrak{v} = \rho\cos\psi, \quad \mathfrak{w} = \rho\cos\chi \quad \text{zu}$$

9. $$\mathfrak{u} = \frac{u}{L}(a^2\rho^2 - 1), \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{L}(b^2\rho^2 - 1), \quad \mathfrak{w} = \frac{w}{L}(c^2\rho^2 - 1).$$

Die gesuchte Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten ergiebt sich nun, indem man aus 9. und aus der Gleichung des Ellipsoids E

$$E = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0.$$

die Coordinaten u, v, w eliminirt. Aus 9. ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{u}^2}{a^2\rho^2 - 1} = \frac{u^2(a^2\rho^2-1)}{L^2}, \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{b^2\rho^2 - 1} = \frac{v^2(b^2\rho^2-1)}{L^2}, \quad \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2\rho^2 - 1} = \frac{w^2(c^2\rho^2-1)}{L^2}.$$

Addirt man, so erhält man die gesuchte Gleichung

10. $$\frac{\mathfrak{u}^2}{a^2\rho^2 - 1} + \frac{\mathfrak{v}^2}{b^2\rho^2 - 1} + \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2\rho^2 - 1} = 0.$$

Man überzeugt sich auf Grund dieser Gleichung leicht, dass die Tangentenebenen der Wellenfläche erhalten werden, wenn man auf der Normalen zu einem Diametralschnitte des Ellipsoids

$$\mathfrak{E} = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0$$

die reciproke grosse und kleine Halbachse des Schnittes vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin abträgt und durch die Endpunkte Ebenen parallel zum Diametralschnitte legt. Denn die Endpunkte der Normalen gehören einer Fläche an, deren Gleichung aus der Gleichung der Wellenfläche

11. $$\frac{a^2x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

hervorgeht, indem man a, b, c mit $1:a$, $1:b$, $1:c$ vertauscht, und die Coordinaten x, y, z eines Punktes P durch die Coordinaten X, Y, Z des Punktes P' ersetzt, der auf OP liegt, und dessen Radius vector reciprok zu OP ist. Man hat somit

$$X:Y:Z = x:y:z, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und daher

12. $$x = \frac{X}{R^2}, \quad y = \frac{Y}{R^2}, \quad z = \frac{Z}{R^2}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Die gesuchte Gleichung der Reciprokalfläche der zum Ellipsoide E gehörigen Wellenfläche ist hiernach

13. $$\frac{X^2}{a^2 - R^2} + \frac{Y^2}{b^2 - R^2} + \frac{Z^2}{c^2 - R^2} = 0.$$

Die Ebene, die durch P' normal zu OP' geht, hat die Coordinaten

$$\mathfrak{u} = \frac{X}{R^2}, \quad \mathfrak{v} = \frac{Y}{R^2}, \quad \mathfrak{w} = \frac{Z}{R^2},$$

dabei ist $$R^2 = 1:(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) = 1:\rho^2.$$

Setzt man dies in 13. ein, so erhält man in der That die Gleichung der Wellenfläche 10.

Befreit man die Gleichung 10. von Brüchen, so erhält man, wenn man nun u, v, w statt $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ schreibt

$$\begin{aligned} f = (u^2 + v^2 + w^2)(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2) - (b^2 + c^2)u^2 \\ - (c^2 + a^2)v^2 - (a^2 + b^2)w^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} = u(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + b^2c^2\rho^2 - b^2 - c^2) = u\cdot A,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v} = v(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + c^2a^2\rho^2 - c^2 - a^2) = v\cdot B,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w} = w(b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 + a^2b^2w^2 + a^2b^2\rho^2 - a^2 - b^2) = w\cdot C,$$

wobei A, B, C abkürzungsweise für die eingeklammerten Polynome gesetzt ist. Den Gleichungen

$$uA = vB = wC = f = 0$$

kann nur durch die Ebenen genügt werden, deren Coordinaten eines der drei Systeme erfüllen

$$\begin{aligned} u &= 0, & B &= 0, & C &= 0, \\ v &= 0, & C &= 0, & A &= 0, \\ w &= 0, & A &= 0, & B &= 0, \end{aligned}$$

und hiervon liefert nur das zweite reale Wurzeln. Die Wellenfläche hat somit 12 Doppeltangentenebenen, nämlich vier parallel zu jeder Achse; von diesen sind aber nur die vier real, die parallel zur mittleren Achse des Ellipsoids E sind.

Die Spuren der realen Doppeltangentenebenen auf der XZ-Ebene sind die gemeinsamen Tangenten des Kreises und der Ellipse, welche die Wellenfläche mit der XZ-Ebene gemein hat. Die Coordinaten der Doppeltangentenebenen ergeben sich aus

$$u^2 = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad v^2 = 0, \quad w^2 = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Die Gleichung der Grenzfläche zweiter Klasse, längs welcher die Doppelebene u, v, w die Wellenfläche berührt, ergiebt sich mit Hülfe der Werthe, welche die zweiten partialen Differentialquotienten von f für die Doppelebene haben

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 4b^2c^2u^2 = 4\frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w} = 2b^2(a^2 + c^2)uw = 2\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = b^2(c^2u^2 + a^2w^2) + a^2c^2(u^2 + w^2) - (a^2 + c^2) = -\frac{1}{b^2}(a^2 - b^2)(b^2 - c^2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 4a^2b^2w^2 = 4a^2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Man erhält, wenn $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ laufende Coordinaten bezeichnen,

14. $$\begin{aligned} b^2c^2(a^2 - b^2)(\mathfrak{u} - u)^2 + b^2(a^2 + c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}\cdot(\mathfrak{u} - u)(\mathfrak{w} - w) \\ - \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2 - c^2)(\mathfrak{w} - w)^2 = 0. \end{aligned}$$

Für die Doppelebene, welche im ersten Quadranten berührt, ist der positive Werth der Quadratwurzel zu nehmen.

Die Gleichung der Horizontalprojection der Berührungscurve wird erhalten, wenn man in 14. $\mathfrak{w} = 0$ setzt. Man erhält

$$15.\quad b^2c^2(a^2-b^2)(\mathfrak{u}-u)^2 - b^2(a^2+c^2)\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\,w(\mathfrak{u}-u) - \tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2-c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2-c^2)w^2 = 0\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die symmetrisch zur X-Ache liegt; daher ist die Berührungscurve eine zur XZ-Ebene symmetrische Ellipse. Eine Achse der Ellipse 14. ist der zur OX normalen Achse von 15. parallel und gleich. Das halbe Reciprokum derselben ist der Werth von $\mathfrak{v}$, den die Gleichung 15. für $\mathfrak{u} = 0$ ergiebt; letzterer bestimmt sich aus

$$16.\quad b^2c^2(a^2-b^2)u^2 + b^2(a^2+c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\,uw - \tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\mathfrak{v}^2 + a^2b^2(b^2-c^2)w^2 = 0\,.$$

Setzt man für u, w die Werthe ein, so ergiebt sich

$$17.\quad \mathfrak{v}^2 = \frac{4b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\,.$$

Daher ist die der Y-Achse parallele Achse der Berührungsellipse

$$18.\quad \frac{1}{b}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\,.$$

Die reciproken Abstände der auf der OX liegenden Scheitel der Ellipse 15. vom Nullpunkte sind die Werthe von $\mathfrak{u}$, welche aus 15. für $\mathfrak{v} = 0$ hervorgehen; werden diese mit $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ bezeichnet, so ist die auf der X-Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$19.\quad \frac{1}{\mathfrak{u}_2} - \frac{1}{\mathfrak{u}_1}\,.$$

Die Gleichung 15. liefert für $\mathfrak{v} = 0$, unter Rücksicht auf den Werth von w,

$$20.\quad (\mathfrak{u}-u)^2 - \frac{(a^2+c^2)(b^2-c^2)}{c^2b\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}(\mathfrak{u}-u) + \frac{a^2(b^2-c^2)^2}{b^2c^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)} = 0\,.$$

Löst man diese Gleichung auf und setzt dann für u den Werth ein, so erhält man nach den einfachen Reductionen

$$21.\quad \mathfrak{u}_1 = \frac{b}{c^2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\,,\qquad \mathfrak{u}_2 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\,.$$

Daher ist die auf der X-Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$22.\quad \frac{1}{\mathfrak{u}_2} - \frac{1}{\mathfrak{u}_1} = \frac{b^2-c^2}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\,.$$

Die auf der XZ-Ebene liegende Achse der Berührungsellipse selbst wird hieraus durch Multiplication mit $1 : \cos\varphi$ erhalten, wenn φ den Winkel der Doppeltangentenebene mit der X-Achse bezeichnet. Da nun

$$\cos\varphi = w : \sqrt{u^2+w^2} = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,,$$

so ist die in der XZ-Ebene liegende Achse der Berührungsellipse

$$\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\,.$$

Vergleicht man dies mit 18., so erkennt man: Die Wellenfläche wird von jeder der vier Doppeltangentenebenen in einem Kreise berührt.

---

17. Ist eine Raumcurve der Durchschnitt der Flächen $f(x, y, z) = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ und gehören ihr die Punkte P und P' mit den Coordinaten x, y, z bez. $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ an, so sind die Gleichungen erfüllt

$$1.\quad f(x, y, z) = 0\,; \qquad F(x, y, z) = 0\,,$$

$$2.\quad f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \equiv f(x, y, z) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \ldots + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \ldots = 0\,,$$

$$3.\quad F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \equiv F(x, y, z) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F + \ldots = 0\,.$$

Zufolge der Gleichungen 1. vereinfachen sich die Gleichungen 2. und 3 zu

$$4.\quad \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)f + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)^2 f + \ldots = 0\,,$$

$$5.\quad \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)F + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\right)^2 F + \ldots = 0\,.$$

Bezeichnet man die Strecke PP' mit p und ihre Winkel mit den Achsen mit α, β, γ, so gehen 4. und 5 über in

$$6.\quad r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \frac{r^2}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \ldots = 0,$$

$$7.\quad r\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \frac{r^2}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F + \ldots = 0.$$

Verschwindet die Strecke PP', so werden die Winkel α, β, γ durch die Gleichungen bestimmt, die durch Grenzübergang aus 6. und 7. hervorgehen. Im Allgemeinen sind dies die beiden Gleichungen

$$8.\quad \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,;$$

$$9.\quad \cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z} = 0\,.$$

Die Geraden, die ihnen einzeln genügen, erfüllen bekanntlich die Tangentenebenen an f und F in P, ihr Verein bestimmt die Curventangente in P als Schnitt dieser beiden Tangentenebenen. Unter besonderen Voraussetzungen können aber hiervon abweichende Bestimmungen eintreten.

A. Wenn für den Punkt P die beiden Functionen

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\,,\qquad \cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z}$$

nur um einen constanten Faktor verschieden sind, wenn also

$$10.\quad n\left(\cos\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial F}{\partial z}\right) \equiv m\left(\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

so fallen die Tangentenebenen von f und F in P zusammen, die beiden Flächen berühren sich also in P. Die Richtungen, in welchen man von P auf der Schnittcurve von f und F fortschreiten kann, sind in diesem Falle nicht aus 8. und 9. zu bestimmen, da diese Gleichungen identisch sind, sondern man muss auf 6. und 7. zurückgehen. Multiplicirt man 6. mit m und 7. mit n und subtrahirt, so erhält man mit Rücksicht auf 10. und wenn man zur Grenze $r = 0$ übergeht

$$11.\quad m\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f - n\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F = 0.$$

Diese Gleichung im Verein mit

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bestimmt die Tangenten der Raumcurve in dem ausgezeichneten Punkte P. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes Π einer solchen Tangente, so kann man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die proportionalen Grössen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ ersetzen und erhält daher die Gleichungen

$$\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - n\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(\xi - x)^2 + 2\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - n\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)(\xi - x)(\eta - y)$$

12. $$+\,2\left(m\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - n\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)(\xi - x)(\zeta - z) + \left(m\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - n\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)(\eta - y)^2$$

$$+\,2\left(n\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} - m\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)(\eta - y)(\zeta - z) + \left(m\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - n\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)(\zeta - z)^2 = 0,$$

13. $$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Die Gleichung 12. ist die eines Kegels zweiter Ordnung; je nachdem derselbe von der Ebene 13. in zwei realen verschiedenen, oder in zwei realen zusammenfallenden oder in zwei imaginären Geraden geschnitten wird, hat die Curve in P zwei reale getrennte, oder zwei reale zusammenfallende, oder zwei imaginäre Tangenten, und P ist demgemäss als Doppelpunkt, als Rückkehrpunkt oder als isolirter Punkt der Raumcurve zu bezeichnen.

B. Wenn für die Fläche f im Punkte P die partialen ersten Differentialquotienten verschwinden, für F aber nicht, so bestimmen sich die Tangenten der Raumcurve in P aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi - x)(\eta - y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\xi - x)(\zeta - z)$$

14. $$+\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta - y)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial z}(\eta - y)(\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta - z)^2 = 0$$

15. $$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Je nachdem die Ebene 15. mit dem Kegel 14. zwei reale getrennte, reale vereinte oder imaginäre Gerade gemein hat, ist P ein Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder vereinzelter Punkt der Raumcurve.

C. Wenn für beide Flächen f und F die partialen ersten Differentialquotienten im Punkte P verschwinden, wenn also beide Flächen in P einen Doppelpunkt haben, so werden die Tangenten ihrer Schnittcurve in P aus den beiden Gleichungen erhalten.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi - z)(\eta - y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\xi - x)(\zeta - z)$$

16. $$+\,\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(\eta - y)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\eta - y)(\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\zeta - z)^2 = 0,$$

17. $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\xi - x)(\eta - v) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}(\xi - x)(\zeta - z)$$

$$+\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\eta - y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}(\eta - y)(\zeta - z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(\zeta - z)^2 = 0.$$

Diese beiden Kegel zweiter Ordnung haben vier gemeinsame Mantellinien. Wenn also zwei Flächen einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, so gehen durch denselben vier Zweige ihrer Durchschnittscurve, dieser Punkt ist daher ein vierfacher Punkt der Raumcurve; er tritt als isolirter Punkt auf, wenn die vier Tangenten imaginär sind.

18. Für die Rotationscylinder

$$f \equiv y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
$$F \equiv x^2 + y^2 - 2(R - r)y + R^2 - 2Rr = 0$$

hat man
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z;$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - R + r), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen No. 17, 8. und 9 sind daher

1. $2\cos\beta\cdot y + 2\cos\gamma\cdot z = 0$, 2. $2\cos\alpha\cdot x + 2\cos\beta(y - R + r) = 0$,

Sie werden identisch für $x = z = 0$; für diese Werthe haben $f = 0$ und $F = 0$ die gemeinsame Wurzel $y = R$; die Cylinder haben also den Punkt $x = z = 0$, $y = R$ gemein und in diesem Punkte eine gemeinsame Tangentenebene, die der XZ-Ebene parallel ist. Für $x = z = 0$, $y = R$ gehen die Gleichungen 1. und 2. über in

$$2\cos\beta\cdot R = 0, \quad 2\cos\beta\cdot r = 0;$$

daher ist $m = r$, $n = R$.

Ferner ergeben sich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2;$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Daher werden die Gleichungen No. 17, 12. und 13.

$$R\xi^2 + (R - r)(\eta - R)^2 - r\zeta^2 = 0, \quad \eta - R = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen der Verticalprojectionen der Doppelpunktstangenten

$$R\xi^2 - r\zeta^2 = 0.$$

Für die Abscisse $\xi = r$ folgt die Ordinate $\zeta = \sqrt{Rr}$, wonach die Tangenten leicht construirt werden können*).

19. Das Ellipsoid $\qquad f \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

und die Kugel $\qquad F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2(c - r)z + c^2 - 2cr = 0$

haben den Punkt C mit den Coordinaten 0, 0, c gemein und berühren sich in diesem Punkte. Man hat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2};$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - c + r);$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{c^2};$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2.$$

Die übrigen partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung sind gleich Null. Die Gleichungen No. 17, 8, 9 werden für C

$$\frac{2}{c}\cos\gamma = 0, \quad 2r\cos\gamma = 0,$$

Daher ist $m = c$, $n = 1 : r$; die Gleichungen 12 und 13 sind

$$\left(\frac{c}{a^2} - \frac{1}{r}\right)\xi^2 + \left(\frac{c}{b^2} - \frac{1}{r}\right)\eta^2 + \left(\frac{2}{c} - \frac{1}{r}\right)(\zeta - c)^2 = 0, \quad \zeta - c = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung der Doppelpunktstangenten

$$\left(\frac{c}{a^2} - \frac{1}{r}\right)\xi^2 + \left(\frac{c}{b^2} - \frac{1}{r}\right)\eta^2 = 0.$$

Wird das geometrische Mittel aus c und r mit d bezeichnet, und ist $a > b$, so sind die beiden Tangenten

real und verschieden, wenn $a > d > b$,
real und vereint, „ $a = d$ oder $b = d$,
imaginär, „ $a < d$ „ $b > d$.

---

*) Vergl. SCHLOEMILCH, Handbuch der Math., 1. Bd., Darstellende Geometrie § 8, No. 14.

20. Der Kegel $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

und die Kugel $F = x^2 + y^2 + z^2 - 2dx - 2ey - 2fz = 0$

haben den Nullpunkt gemein, und im Nullpunkte hat f einen Doppelpunkt. Die Gleichungen No. 17, 14. und 15. werden für den Nullpunkt

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0, \quad d\xi + e\eta + f\zeta = 0.$$

Die Doppelpunktstangenten sind daher die Mantellinien, in welchen der Kegel von der Tangentenebene der Kugel im Nullpunkte geschnitten wird.

Allgemein gilt die Bemerkung, dass in der Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Fläche F, die durch die Kegelspitze S geht, letztere ein Doppelpunkt ist und die Tangenten des Doppelpunktes die Mantellinien des Kegels sind, in welchen derselbe von der Tangentenebene von F in S geschnitten wird.

§ 16. Unendliche Reihen.

1. In § 13 haben wir die Reihen kennen gelernt

1. $$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$$

2. $$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots\dots$$

3. $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dots$$

4. $$1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \dots\dots$$

5. $$x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots$$

Diese Reihen stimmen darin überein, dass für unbeschränkte oder für innerhalb gewisser Grenzen liegende Werthe von x die Summe der ersten n Glieder mit einer bestimmten Function um so genauer übereinstimmt, je grösser n ist, und dass man diese Genauigkeit beliebig gross machen kann, wenn man nur n hinlänglich gross wählt. Diese Functionen $[(1+x)^\mu,\ l(1+x),\ e^x,\ cos x,\ sin x]$ sind daher die Grenzwerthe, denen sich die Reihen bei unendlich wachsender Gliederzahl nähern, und konnten in Folge dessen als die Summen der unendlich fortgesetzten Reihen bezeichnet werden.

Jedes Glied der obigen Reihen kann als Function der Zahl m angesehen werden, welche angiebt, das wievielste Glied der Reihe es ist; wird diese Function mit q_m bezeichnet, so treten die Reihen unter die allgemeine Form

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + \dots$$

oder noch kürzer

$$\Sigma_1^\infty q_m,$$

wobei das vor q_m stehende Zeichen bedeutet, dass die Functionen $q_1, q_2, q_3, q_4 \dots$ gebildet und addirt werden sollen. Die Grösse q_m wird als das allgemeine Glied der betreffenden unendlichen Reihe bezeichnet. Die allgemeinen Glieder der Reihen 1 . . 5 sind

$$\binom{\mu}{m-1}x^{m-1},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^m}{m},\ \frac{x^{m-1}}{(m-1)!},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!},\ (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Diese Beispiele für unendliche Reihen fordern dazu auf, unendliche Reihen im Allgemeinen zu betrachten, die Bedingungen anzugeben, unter welchen die

Summe der ersten n Glieder bei wachsender Gliederzahl einer endlichen Grenze sich nähert, und zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Reihen den arithmetischen Operationen unterworfen werden können.

2. Es sei q_m eine Function der positiven ganzen Zahl m, und das allgemeine Glied einer unendlich fortgesetzten Reihe $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + \dots$.

Nähert sich die Summe der ersten n Glieder einem bestimmten endlichen Grenzwerthe S, mit dem sie bis zu jedem Grade der Genauigkeit übereinstimmt, wenn man nur n gross genug wählt, so bezeichnet man S als die Summe der unendlichen Reihe und die Reihe selbst heisst convergent. Enthält dabei das allgemeine Glied q_m eine unbestimmte Grösse x, so wird im Allgemeinen die Reihe nicht für alle, sondern nur für die zwischen bestimmten Grenzen liegenden Werthe von x convergiren; innerhalb der Convergenzgrenzen ist die Summe der Reihe von x abhängig und daher eine bestimmte Function $f(x)$ von x; jenseit der Convergenzgrenzen ist die Summe der Reihenglieder unabhängig von x unendlich gross oder unbestimmt; die Reihensumme stimmt also dann nur innerhalb der Convergenzgrenzen mit $f(x)$ überein; jenseit derselben ist diese Uebereinstimmung nicht vorhanden.

Wächst die Summe der ersten n Glieder über alle Grenzen, wenn n wächst, so bezeichnet man die Reihe als divergent. Wenn hingegen bei einer Reihe Gruppen mit positiven und Gruppen mit negativen Gliedern abwechseln, so kann es sich ereignen, dass die Summe der Glieder, bis zum Abschlusse einer Gruppe positiver Glieder, sich einer bestimmten Grenze nähert, während die Summe der Glieder bis zum Abschlusse einer Gruppe negativer sich einer andern bestimmten Grenze nähert; dies ist z. B. der Fall bei

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Hört man hier bei einem positiven Gliede auf, so ist die Summe $+1$, hört man bei einem negativen auf, so erhält man 0. Solche Reihen sind als oscillirende bezeichnet worden; da durch dieselben bestimmte Grössen nicht dargestellt werden, so sind sie analytisch nicht verwendbar.

3. Wir beschäftigen uns in den folgenden Abschnitten mit der wichtigsten der hierher gehörigen Fragen — mit den Convergenzbedingungen für unendliche Reihen.

Um über die Convergenz einer unendlichen Reihe zu entscheiden, kann man zunächt versuchen, die Summe der ersten n Glieder in übersichtlicher Weise als Function von n darzustellen. Findet man dann, dass diese Function für ein unendlich wachsendes n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, so ist diese Grenze die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe und die Reihe selbst ist convergent; man hat also in diesem Falle nicht blos über die Convergenz entschieden, sondern auch die Reihe in geschlossener Form summirt.

A. Um über die Convergenz der Reihe

1. $$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots$$

zu entscheiden, bilde man

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$
$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}\cdot x^{n+1}.$$

Ist der absolute Werth von $x > 1$, so ist $lim x^{n+1} = \infty$, und daher die Reihe 1. divergent.

Ist $x = 1$, so ersieht man sofort, dass die Summe der Reihe unendlich ist.

Ist $-1 < x < 1$, so ist

$$lim x^{n+1} = 0,$$

und daher

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Diese Reihe wird als die geometrische Reihe bezeichnet.

B. Um über die Reihe zu entscheiden (vergl. § 2, No. 7, 3)

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots\ldots$$

betrachte man

$$s_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Man hat

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x + 2x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-1}.$$
$$= \frac{1-x^n}{1-x} + x(s_n - nx^{n-1}).$$

Hieraus folgt

$$s_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\cdot x^n - \frac{1}{1-x}\cdot nx^n.$$

Die Grösse nx^n wird für ein unendlich grosses n selbst unendlich, sobald der absolute Werth von $x = 1$ oder > 1 ist; wenn x ein echter Bruch ist, so giebt es immer eine Zahl m, für welche

$$1 + \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$$

so dass also $\left(1 + \frac{1}{m}\right)x$ ein echter Bruch ist, den wir mit ε bezeichnen wollen; bezeichnen wir ferner die endliche Zahl mx^m mit A, so ist

$$(m+1)x^{m+1} = m\left(1+\frac{1}{m}\right)x^{m+1} = A\left(1+\frac{1}{m}\right)x = A\varepsilon$$

$$(m+2)x^{m+2} = (m+1)x^{m+1}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)x, \quad \text{also} < A\varepsilon^2,$$

$$(m+3)x^{m+3} = (m+2)x^{m+2}\left(1+\frac{1}{m+2}\right)x, \quad \text{also} < A\varepsilon^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Folglich bilden die Grössen

$$mx^m, \quad (m+1)x^{m+1}, \quad (m+2)x^{m+2}, \quad (m+3)x^{m+3}, \ldots\ldots$$

eine abnehmende Reihe, die stärker fällt als die Reihe

$$A\varepsilon, \quad A\varepsilon^2, \quad A\varepsilon^3, \quad A\varepsilon^4, \ldots\ldots$$

Da nun ε ein echter Bruch ist, so ist für ein unendlich grosses n und einen gegebenen Werth von m

$$lim\, A\varepsilon^{n-m} = 0,$$

also um so mehr

$$lim\, nx^n = 0.$$

Die unendliche Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots\ldots$$

convergirt daher für alle echt gebrochenen x; es ist

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad -1 < x < 1.$$

4. Die endliche Reihe*)

1. $$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

lässt sich summiren, indem man von der identischen Gleichung Gebrauch macht

*) Vergl. u. A. SCHLOEMILCH, Compendium der höhern Analysis, 1. Bd., § 36.

2. $$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$ und addirt, so erhält man

3. $$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots\ldots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}\right).$$

Die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe

4. $$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} + \ldots$$

wird daher durch die Untersuchung des Grenzwerthes entschieden, den der Bruch

5. $$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

bei unendlich wachsendem n sich nähert.

Ist $\alpha = \beta$, so ist dieser Bruch die Einheit; in diesem Falle wird aus 1. die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

In 3. sind dann beide Seiten Null, und man kann an 2. weitere Schlüsse nicht knüpfen; wir berücksichtigen diesen Fall jetzt nicht weiter und behalten uns vor, auf die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots$$

später zurückzukommen.

Wir haben nun die Fälle $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ zu untersuchen und beschränken uns dabei auf positive Werthe von α und β.

Sind h und k ganze positive Zahlen, und ist auch x positiv, so ist bekanntlich

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^h > 1 + x, \quad (1+x)^k > 1 + kx,$$

folglich auch

6. $$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{h}\right)^h} < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{(1+kx)^{\frac{1}{k}}}.$$

Ist nun $\alpha > \beta$ und $m > 0$, so kann man x durch $(\alpha - \beta) : (\beta + m)$ ersetzen und erhält

7. $$\left[\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right]^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wählt man h und k so, dass

$$h > \alpha - \beta, \quad k > \frac{1}{\alpha-\beta},$$

so ist $(\alpha-\beta):h < 1$ und $k(\alpha-\beta) > 1$; die Ungleichung 7. wird daher noch verstärkt, wenn man $(\alpha-\beta):h$ und $k(\alpha-\beta)$ durch die Einheit ersetzt. Dadurch entsteht

8. $$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m = 0, 1, 2, 3, \ldots n - 1$ und multiplicirt alle so entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^h < \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)} < \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Geht man zur Grenze für $n = \infty$ über, so wird

$$lim \frac{\beta}{\beta + n} = 0, \quad \text{also auch} \quad lim \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^h = 0, \quad lim \left(\frac{\beta}{\beta + n}\right)^{\frac{1}{k}} = 0,$$

und daher auch

$$lim \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)} = 0.$$

Setzt man dagegen $\beta > \alpha$ voraus, so beachte man, dass

$$lim \frac{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)} = \frac{1}{lim \dfrac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}}.$$

Da $\beta > \alpha$, so ist

$$lim \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)} = 0,$$

und daher

$$lim \frac{\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)} = \infty.$$

Wir haben somit gefunden: *Die unendliche Reihe*

$$\frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} + \ldots$$

convergirt, wenn $\alpha > \beta > 0$, *und hat dann die Summe*

$$\frac{\beta}{\alpha - \beta};$$

Ist $\beta > \alpha > 0$, *so divergirt sie.*

5. Durch die Forderung, behufs der Entscheidung über die Convergenz einer unendlichen Reihe die Summe einer endlichen Reihe in übersichtlicher Form darzustellen, wird die Schwierigkeit im Allgemeinen nicht vermindert, sondern vermehrt. Handelt es sich zunächst nur um die Entscheidung über die Convergenz, so giebt es einfachere Mittel. Wir geben dieselben zunächst für *Reihen an, die lauter positive Glieder haben.*

Um über die Convergenz der Reihe

1. $$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \ldots$$

zu entscheiden, vergleichen wir diese Reihe mit einer Reihe

2. $$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \ldots$$

deren Convergenz bekannt ist; wenn von irgend einem Gliede q_m an die Glieder der Reihe 1. kleiner bleiben, als die gleichstehenden Glieder der zweiten Reihe, so dass also

$$q_m < Q_m, \quad q_{m+1} < Q_{m+1}, \quad q_{m+2} < Q_{m+2}, \ldots$$

so ist

3. $$q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} \ldots < Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \ldots$$

Da nun nach der Voraussetzung die Reihe 2. eine endliche Summe hat, da ferner die Reihe

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \ldots + Q_{m-1}$$

als die Summe einer endlichen Anzahl endlicher Grössen selbst endlich ist, so hat auch die unendliche Reihe

$$Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \ldots$$

eine endliche Summe, und diese ist zufolge der Ungleichung 3. grösser als die Summe

$$q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + \ldots$$

also ist letztere Reihe, und daher auch die um eine endliche Anzahl endlicher Glieder vermehrte Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{m-1} + q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + \ldots$$

convergent. Dies ergiebt den Satz: *Wenn die Glieder der unendlichen Reihe*

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$$

von einem Gliede q_m *an sämmtlich kleiner sind als die gleichstehenden Glieder einer convergenten Reihe, so ist die vorgelegte Reihe convergent.*

In ähnlicher Weise schliesst man: *Sind die Glieder der unendlichen Reihe*

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + \ldots$$

von einem bestimmten Gliede q_m *an sämmtlich grösser als die Glieder einer divergenten Reihe, so ist die vorgelegte Reihe divergent.*

6. Die unendliche Reihe

1. $$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots$$

convergirt für alle echt gebrochenen x. Wenn daher in der unendlichen Reihe

2. $$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$$

von einer gewissen Stelle an

3. $$q_{m+1} < ax^{m+1}, \quad q_{m+2} < ax^{m+2}, \quad q_{m+3} < ax^{m+3} \quad \text{u. s. w.,}$$

so convergirt auch 2. Ist nun von einer bestimmten Stelle an das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder $q_{m+1} : q_m$ ein echter Bruch, und bezeichnet x einen echten Bruch, der grösser ist, als der grösste Werth, den das Verhältniss $q_{m+1} : q_m$ annimmt, so ist

$$q_{m+1} < q_m \cdot x,$$
$$q_{m+2} < q_{m+1} \cdot x < q_m \cdot x^2,$$
$$q_{m+3} < q_{m+2} \cdot x < q_m \cdot x^3, \ldots$$

Wenn man nun in 1. und 3. a durch q_m ersetzt, so erkennt man, dass die Glieder der Reihe 2. von q_{m+1} an kleiner bleiben, als die gleichstehenden Glieder der Reihe 1. Hieraus folgt: *Wenn das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an kleiner bleibt als ein gegebener echter Bruch, so ist die Reihe convergent.*

Wenn der Quotient $q_{m+1} : q_m$ *mit* m *wächst, so hat man, um dieses Kriterium anwenden zu können, nachzuweisen, dass*

$$lim(q_{m+1} : q_m) < 1.$$

Geht man davon aus, dass die Reihe

4. $$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots$$

für $x > 1$ divergirt, so ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise: *Wenn das Verhältniss zweier auf einander folgenden Glieder einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an grösser ist als die Einheit, so divergirt die Reihe. Nimmt* $q_{m+1} : q_m$ *mit* m *zu, so ist die Reihe divergent, wenn*

$$lim(q_{m+1} : q_m) > 1.$$

Wenn das Verhältniss $q_{m+1} : q_m$ die Einheit zur Grenze hat, so sind die obigen Schlüsse nicht mehr anwendbar; in diesem Falle muss man die vorgelegte unendliche Reihe mit einer Reihe vergleichen, die schwächer convergirt oder divergirt, als die Reihen 1. und 4., d. i. deren Glieder langsamer abnehmen als in 1. oder bez. langsamer zunehmen, als in 4.

Als Beispiel betrachten wir die Reihe

5. $$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \cdots$$

Nimmt man das 2. und 3., das 4., 5., 6. und 7., das 8. bis mit 15., das 16. bis mit 31. Glied u. s. w. zusammen, und bemerkt, dass

$$\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} < 2 \cdot \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \frac{1}{6^\mu} + \frac{1}{7^\mu} < 4 \cdot \frac{1}{4^\mu},$$
$$\frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{9^\mu} + \cdots + \frac{1}{15^\mu} < 8 \cdot \frac{1}{8^\mu}, \cdots$$

so erhält man

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots < 1 + \frac{2}{2^\mu} + \frac{4}{4^\mu} + \frac{8}{8^\mu} + \cdots$$

mithin kleiner als

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \cdots$$

Schreibt man hierfür

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^3 + \cdots,$$

so erkennt man, dass diese Reihe, und mithin auch 6. convergirt, sobald $\mu > 1$, und divergirt, sobald $\mu < 1$.

Um auch über den Fall $\mu = 1$, also über die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

zu entscheiden, bemerken wir, dass

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{17} + \cdots + \tfrac{1}{32} > \tfrac{1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In dieser Weise die Glieder zusammenfassend, erhält man unendlich viele Gruppen von Gliedern, deren Summe grösser als $\frac{1}{2}$ ist; folglich ist die Summe der Reihe unendlich gross, die Reihe also divergent.

7. Die Reihe

1. $$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \cdots$$

divergirt nur schwach und liefert daher ein verwendbares Merkmal für die Divergenz einer Reihe. Man erhält hieraus: Wenn das Produkt nq_n von einer gewissen Stelle an abnimmt und sich einer Grenze nähert, die von Null verschieden ist, so divergirt die Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \cdots$$

Nähert sich das Produkt nq_n der von Null verschiedenen Zahl k, so müssen von einer gewissen Nummer m an die Ungleichungen bestehen

$$mq_m > k, \quad \text{daher} \quad q_m > \frac{1}{m} \cdot k,$$
$$(m+1)\,q_{m+1} > k, \quad \text{"} \quad q_{m+1} > \frac{1}{m+1} \cdot k,$$
$$(m+2)\,q_{m+2} > k, \quad \text{"} \quad q_{m+2} > \frac{1}{m+2} \cdot k.$$

Hieraus folgt

$$q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + \cdots > k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots\right).$$

Die Reihe 1. lehrt, dass der Klammerinhalt unendlich gross ist; da nun k nach der Voraussetzung nicht unendlich klein ist, so ist $q_m + q_{m+1} + \cdots$ unendlich gross, und daher die vorgelegte Reihe divergent.

Bei der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \cdots$$

ist $$\lim mq_m = \lim \frac{m}{2m+1} = \lim 1 : \left(2 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2},$$

daher divergirt die Reihe.

Ebenso erfährt man, dass die Reihen

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{13} + \cdots,$$
$$1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \cdots,$$
$$1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{21} + \cdots,$$

überhaupt alle Reihen von der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b} + \cdots$$

divergiren; denn es ist

$$\lim mq_m = \lim \frac{m}{a + (m-1)\,b} = \lim \frac{1}{\dfrac{a-b}{m} + b} = \frac{1}{b},$$

und daher von Null verschieden, wenn a und b endliche Zahlen sind.

8. Wenn $\lim q_{n+1} : q_n = 1$, so führt der Vergleich der unendlichen Reihe

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \cdots$$

mit der geometrischen Reihe zu keiner Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz. In einigen dieser Fälle führt der folgende Satz zum Ziele: Ist von einer bestimmten Stelle $n = m$ an das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

grösser als die Einheit, so convergirt die Reihe; ist es kleiner als die Einheit, so divergirt die Reihe.

Im ersten Falle kann man einen unechten Bruch k wählen, so dass die Ungleichungen gelten

$$m\left(1 - \frac{q_{m+1}}{q_m}\right) > k, \quad (m+1)\left(1 - \frac{q_{m+2}}{q_{m+1}}\right) > k,$$
$$(m+2)\left(1 - \frac{q_{m+3}}{q_{m+2}}\right) > k, \cdots$$

Aus der Ungleichung

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) > k$$

schliesst man die folgende

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{n-k}{n}.$$

Wendet man dies der Reihe nach für die Werthe $n = m,\ m+1,\ m+2,\ m+3, \ldots$ an und multiplicirt die ersten zwei, die ersten drei, die ersten vier . . . . der so erhaltenen Ungleichungen, so erhält man

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} < \frac{m-k}{m}, \quad \frac{q_{m+2}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)},$$
$$\frac{q_{m+3}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)}, \quad \frac{q_{m+4}}{q_m} < \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)(m-k+3)}{m(m+1\,(m+2)(m+3)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} & q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + q_{m+4} + \cdots \\ < q_m & \left[\frac{m-k}{m} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Da k nach der Voraussetzung ein unechter Bruch ist, so ist

$$m - k < m - 1,$$

daher convergirt die in der Klammer enthaltene unendliche Reihe (vergl. No. 4), mithin auch die vorgelegte Reihe

Ist hingegen von einer bestimmten Stelle $n = m$ an das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

beständig kleiner als die Einheit, so kann man einen echten Bruch k immer so wählen, dass die Ungleichung gilt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) < k.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > \frac{n-k}{n},$$

und dann wie oben weiter, dass

$$\frac{q_{m+1}}{q_m} > \frac{m-k}{m}, \quad \frac{q_{m+2}}{q_m} > \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)}, \quad \frac{q_{m+3}}{q_m} > \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1)(m+2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daher ist

$$\begin{aligned} & q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + q_{m+4} + \cdots \\ > q_m & \left[\frac{m-k}{m} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)}{m(m+1(m+2)} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Da k hier ein unechter Bruch ist, so ist

$$m - k > m - 1,$$

daher divergirt die in der Klammer enthaltene Reihe, und um so mehr die vorgelegte Reihe.

Nimmt das Produkt

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$$

von einer bestimmten Stelle an beständig zu oder beständig ab, und ist $\lim n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) = 1$, so liefert der soeben bewiesene Satz keine Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz der Reihe; auf die Untersuchung solcher Fälle können wir hier nicht weiter eingehen.

Beispiel. Die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots$$

liefert für den Quotienten zweier auf einander folgenden Glieder

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(2n-3)^2}{(2n-2)(2n-1)}x^2.$$

Der vor x^2 stehende Faktor ist kleiner als Eins, nimmt beständig zu, wenn m wächst und hat für ein unendliches m den Grenzwerth 1. Ist nun $x < 1$, so ist daher für alle Werthe von n

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < 1,$$

und daher die obige Reihe convergent; ist $x > 1$, so ist

$$\lim \frac{q_{n+1}}{q_n} > 1,$$

und daher divergirt die Reihe. Für $x = 1$ erhält man aber auf diesem Wege keine Auskunft. Wendet man das soeben entwickelte Verfahren an, so erhält man für $x = 1$ nach einfacher Reduction

$$n\left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n}\right) = \frac{n(6n-7)}{(2n-2)(2n-1)} = \left(6 - \frac{7}{n}\right) : \left(2 - \frac{2}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Der Grenzwerth dieses Bruches ist $\frac{3}{2}$; folglich convergirt die vorgelegte Reihe auch noch, wenn $x = 1$ ist.

9. Wir wenden uns nun zur Untersuchung über die Convergenz und Divergenz von Reihen, deren Glieder nicht sämmtlich positiv sind.

Hier kann man zunächst von folgendem Satze Gebrauch machen, dessen Richtigkeit ohne Weiteres erhellt: Eine unendliche Reihe, deren Glieder ungleiche Vorzeichen haben, convergirt, wenn die aus den absoluten Werthen der Glieder gebildete Reihe convergirt. Die Reihe kann aber auch dann noch convergiren, wenn die aus den absoluten Werthen gebildete Reihe divergirt.

10. Wenn je zwei auf einander folgende Glieder einer unendlichen Reihe ungleiche Vorzeichen haben, und die absoluten Werthe der Glieder von einer bestimmten Stelle an beständig bis zur Grenze Null abnehmen, so ist die Reihe convergent.

Die Reihe sei

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + q_7 - q_8 + \ldots$$

es seien q_1, q_2, q_3 sämmtlich positiv und

$$q_m > q_{m+1} > q_{m+2} > q_{m+3} > \cdots$$

Setzt man alsdann

$$\begin{aligned} s_1 &= q_m, \\ s_3 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}), \\ s_5 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}) - (q_{m+3} - q_{m+4}), \\ s_7 &= q_m - (q_{m+1} - q_{m+2}) - (q_{m+3} - q_{m+4}) - (q_{m+5} - q_{m+6}), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} s_2 &= q_m - q_{m+1}, \\ s_4 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}), \\ s_6 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}) + (q_{m+4} - q_{m+5}), \\ s_8 &= q_m - q_{m+1} + (q_{m+2} - q_{m+3}) + (q_{m+4} - q_{m+5} + (q_{m+6} - q_{m+7}), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so ist, da $q_r - q_{r+1}$ der Voraussetzung nach für jedes $r > m$ positiv ist

$$s_1 > s_3 > s_5 > s_7 > s_9 > \ldots$$

und

$$s_2 < s_4 < s_6 < s_8 < s_{10} < \ldots$$

Dabei ist

$$s_1 > s_2, \quad s_3 > s_4, \quad s_5 > s_6, \ldots$$

Da nun

$$\lim(s_{2p-1} - s_{2p}) = \lim q_{m+2p-1} = 0,$$

so folgt, dass die abnehmenden Grössen $s_1, s_3, s_5, s_7 \ldots$ sowie die zunehmenden $s_2, s_4, s_6, s_8 \ldots$ derselben endlichen Grenze sich nähern, die kleiner als jedes s_{2p} und grösser als jedes s_{2p-1} ist. Wird diese gemeinsame Grenze mit S bezeichnet, so ist

$$S = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + \cdots$$

Dieser Satz zeigt, dass die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

convergirt, obgleich die Reihe aus den absoluten Werthen divergirt. Die Summe der Reihe liegt z. B. zwischen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5},$$

d. i. zwischen $\frac{35}{60}$ und $\frac{47}{60}$.

11. Wenn der Grenzwerth der absoluten Werthe der Glieder einer Reihe eine von Null verschiedene Zahl γ ist, und im Uebrigen dieselben Voraussetzungen gelten, wie beim vorigen Satze, so hat die Reihe keinen bestimmten Grenzwerth.

Man hat nämlich auch jetzt wieder

$$s_1 < s_3 < s_5 < s_7 < s_9 \ldots$$
$$s_2 > s_4 > s_6 > s_8 > s_{10} \ldots$$

und

$$lim(s_{2p-1} - s_{2p}) = lim q_{m+2p-1}.$$

Da nun nach der Voraussetzung

$$lim\, q_{m+2p-1} = \gamma,$$

so folgt, dass die Summen $s_1, s_3, s_5 \ldots$ und $s_2, s_4, s_6 \ldots$ sich zwei verschiedenen Grenzen nähern, deren Unterschied γ ist. Die unendliche Reihe

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - q_6 + \cdots$$

liefert also zwei endliche um γ verschiedene Werthe, je nachdem man sie bei einer ungeraden oder einer geraden Gliederzahl abbricht.

12. Eine Reihe, deren Glieder ungleiche Zeichen haben, kann verschiedene Summen geben, wenn man die Anordnung der Glieder ändert; es kann selbst der Fall eintreten, dass die Reihe bei einer gewissen Anordnung der Glieder convergirt, bei einer andern divergirt. Wenn die aus den positiven Gliedern gebildete Reihe, sowie die aus den negativen Gliedern gebildete einzeln divergiren, so ist es doch möglich, dass, wenn man in einer bestimmten Weise zwischen die positiven Glieder die negativen einstreut, der Grenzwerth von

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n,$$

der als der Grenzwerth der Differenz zweier unendlich wachsenden Summen aufgefasst werden kann, einen endlichen Betrag hat, während bei einer andern Anordnung, bei welcher unter den ersten n Gliedern eine grössere Anzahl positiver oder negativer Glieder sich finden, der Grenzwerth positiv oder negativ unendlich oder auch von einem andern endlichen Betrage sein kann, als bei der ersten Anordnung. Die Reihe

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

in welcher je zwei folgende Glieder ungleiche Vorzeichen haben, ist nach No. 9 convergent; ihre Summe beträgt $l\,2$ (§ 13, No. 7). Ordnet man die negativen Glieder so an, dass man hinter je zwei positive ein negatives einschaltet, vom grössten an absteigend, so entsteht die Reihe

$$S' = (1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6}) + \cdots.$$

S' ist dann der Grenzwerth von

$$S_n' = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

während S der Grenzwerth ist von

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right).$$

Hieraus folgt

$$lim(S_n' - S_n) = \Sigma_1^\infty \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right) = \Sigma_1^\infty \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} S,$$

und daher hat man

$$S' = \tfrac{3}{2} S.$$

Wir begnügen uns damit, hierüber folgenden Satz nachzuweisen: Wenn eine convergente Reihe nur positive Glieder hat, oder wenn, falls die Glieder mit ungleichen Vorzeichen behaftet sind, die aus den absoluten Werthen der Glieder gebildete Reihe convergirt, so ist die Reihensumme von der Anordnung der Glieder nicht abhängig.

Die vorliegende Reihe sei

1. $$S = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + \cdots.$$

Durch andere Anordnung der Glieder entstehe

2. $$S' = q_f + q_g + q_h + q_i + q_k + \cdots$$

Ferner sei S_n die Summe der ersten n Glieder in 1., also

$$S_n = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n.$$

In der Reihe S' gehe man bis zu einem solchen Gliede q_r vorwärts, dass in der Gruppe

$$S_r' = q_f + q_g + q_h + \cdots + q_r$$

alle Glieder von S_n vorhanden sind; ausser diesen Gliedern enthält dann S_r' noch andere Glieder, deren Indices alle grösser sein müssen, als n; die Summe dieser Glieder sei

$$q_x + q_y + q_z + \cdots.$$

Alsdann ist

$$S_r' - S_n = q_x + q_y + q_z + \cdots$$

Nähert sich nun n dem Grenzwerthe ∞, so nähert sich auch r dieser Grenze; die Summe der absoluten Werthe von $q_x, q_y, q_z, \ldots$ ist nur ein Theil der Summe der absoluten Werthe der Glieder der Reihe S, deren Index grösser als n ist, also nähert sich

$$q_x + q_y + q_z \cdots$$

dem Grenzwerthe Null; daher haben wir

$$S - S' = lim S_n - lim S_r' = lim(S_n - S_r') = 0,$$

folglich

$$S = S'.$$

In dem obigen Beispiele ist die Voraussetzung des Satzes nicht erfüllt, denn die Reihe der absoluten Werthe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \cdots$$

ist divergent.

13. Addition unendlicher Reihen. Wenn die unendlichen Reihen

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots,$$
$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \cdots$$

convergiren, und man streut zwischen die n Glieder der ersten Reihe

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

die r Glieder der zweiten

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_r$$

so, dass mit n auch r unendlich gross wird, so erhält man eine neue convergente unendliche Reihe, deren Summe $P + Q$ ist.

Bezeichnet man die neue unendliche Reihe mit S und die Summe der ersten $n + r$ Glieder mit S_{n+r}, so ist

$$S_{n+r} = P_n + Q_r.$$

Werden n und r unendlich gross, so gehen P_n und Q_r in P und Q über, und man hat daher

$$S = P + Q.$$

Denkt man sich P und Q aus gegebenen Reihen durch Multiplication mit endlichen Faktoren a und b entstanden, so erkennt man, dass der soeben gegebene Satz auch auf die Bildungen $P - Q$, $aP + bQ$ anwendbar ist. Nachdem man aus den convergenten Reihen aP und bQ die convergente Reihe $aP + bQ$ erhalten hat, kann man auf diese Reihe und eine neue S den Satz wieder anwenden u. s. f.; dadurch gelangt man zu der Bildung

$$aP + bQ + cS + dT + \ldots,$$

jedoch mit der ausdrücklichen Einschränkung, dass die Anzahl der zu einem Aggregat verbundenen unendlichen Reihen nicht eine unendlich grosse sein darf; ein solcher Fall müsste vielmehr besonders untersucht werden.*)

14. Multiplication von Potenzreihen. Auf die convergenten unendlichen, nach steigenden Potenzen einer Variabeln x fortschreitenden Reihen

1. $$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

2. $$Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

wollen wir die gewöhnlichen Multiplicationsregeln anwenden und das Resultat nach steigenden Potenzen von x ordnen; wir erhalten dann eine neue Potenzreihe, und es ist nun zu entscheiden, ob die Summe dieser Reihe gleich dem Produkte PQ ist. Durch Multiplication der Reihen 1. und 2. erhält man eine Reihe S, deren allgemeines Glied ist

3. $$s_{n+1} = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) x^n .$$

Durch Multiplication der ersten $n + 1$ Glieder der Reihen 1. und 2. entsteht das Produkt

4. $$\begin{aligned} P_{n+1} Q_{n+1} = a_0 b_0 &+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) x \\ &+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 \\ &+ (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) x^3 \\ &+ (a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4) x^4 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n) x^n \\ &+ (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_n) x^{n+1} \\ &+ (a_n b_2 + a_{n-1} b_3 + \ldots + a_2 b_n) x^{n+2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_n b_n x^{2n} . \end{aligned}$$

Diese ersten $n + 1$ Glieder dieses Produktes stimmen der Reihe nach mit

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4, \; s_8 \ldots\ldots s_{n+1}$$

überein. Setzen wir nun voraus, dass die Reihen P und Q nur positive Glieder enthalten, und setzen

$$S_{n+1} = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{n+1}$$

so ist

5. $$S_{n+1} < P_{n+1} \cdot Q_{n+1} .$$

Die Glieder, welche in 4. auf das $(n + 1)$te folgen, sind kleiner als die Glieder

$$s_{n+2}, \; s_{n+3}, \; \ldots \; s_{2n+1};$$

folglich ist

6. $$S_{2n+1} > P_{n+1} Q_{n+1} .$$

Vertauschen wir in 5. n gegen $2n$, so erhalten wir im Verein mit 6. die Begrenzung

$$P_{2n+1} Q_{2n+1} > S_{2n+1} > P_{n+1} Q_{n+1} .$$

Für ein unendlich wachsendes n wird

$$lim\, P_{2n+1} Q_{2n+1} = lim\, P_{n+1} Q_{n+1} = PQ, \quad lim\, S_{2n+1} = S;$$

daher folgt

$$S = PQ .$$

*) Vergl. SCHLOEMILCH, Compendium der höheren Analysis, I. Bd., § 43.

Wenn man daher zwei convergente Potenzreihen mit positiven Gliedern multiplicirt, und das Produkt nach steigenden Potenzen der Variabeln ordnet, so erhält man eine convergente Potenzreihe, deren Summe das Produkt der Summen der beiden gegebenen Reihen ist.

Wenn in den Reihen P und Q positive und negative Glieder mit einander abwechseln, und die Reihen aus den positiven sowie die aus den negativen Glieder einzeln convergiren (oder wenn, was damit gleichbedeutet, die Reihen der absoluten Werthe convergiren), so kann man die Ordnung der Glieder in P und Q dergestalt ändern, dass man P und Q als Differenzen je zweier Reihen auffasst, deren Glieder positiv sind,

$$P = U' - U'', \quad Q = V' - V''.$$

Auf die Reihen U', U'', V', V'' kann man die Multiplicationsregel anwenden. Aus den Produkten

$$U'V', \quad U'V'', \quad U''V', \quad U''V'',$$

erhält man

$$S = U'V' - U'V'' - U''V' + U''V'' = (U' - U'')(V' - V'');$$

folglich ist

$$S = PQ .$$

Bei Potenzreihen mit wechselnden Zeichen gilt also die Multiplicationsregel, wenn die Reihen der absoluten Werthe convergiren.

15. Differentiation unendlicher Reihen. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe eine unbestimmte Grösse x enthalten und die Reihe für alle zwischen gegebenen Grenzen liegenden Werthe von x convergirt, so ist innerhalb dieser Grenzen die Summe der Reihe eine Function von x. Bezeichnen wir dieselbe mit $S(x)$ und das allgemeine Glied der Reihe mit $\varphi(x, n)$, so ist

1. $$S(x) = \varphi(x, 1) + \varphi(x, 2) + \varphi(x, 3) + \ldots\ldots$$

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen man aus dieser Gleichung auf die durch Differentiation gewonnene schliessen darf

$$S'(x) = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots$$

Denn wenn auch für eine endliche Anzahl Summanden aus der Gleichung

$$S = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$$

auf die Gleichung

$$S' = \varphi_1' + \varphi_2' + \ldots + \varphi_n'$$

geschlossen wird, so kann doch nicht behauptet werden, dass dieser Schluss auf eine Summe aus unendlich vielen Summanden ausgedehnt werden kann.

Wenn $x + h$ den Convergenzbereich der Reihe 1. nicht überschreitet, so ist

2. $$S(x + h) = \varphi(x + h, 1) + \varphi(x + h, 2) + \varphi(x + h, 3) + \ldots$$

Zieht man hiervon die Reihe 1. ab und setzt nach § 13, No. 3, 5

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x) + \tfrac{1}{2} h \varphi''(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < h,$$

so erhält man

3. $$\begin{aligned} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} &= \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x, 3) + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2} h [\varphi''(x + \vartheta_1 h, 1) + \varphi''(x + \vartheta_2 h, 2) + \varphi''(x + \vartheta_3 h, 3) + \ldots] . \end{aligned}$$

Wenn die in der Klammer eingeschlossene Reihe — auch für einen verschwindenden Werth von h — gegen einen endlichen Grenzwerth $R(x, h)$ convergirt, so nähert sich das Produkt $hR(x, h)$ mit h zugleich der Grenze Null; man erhält daher aus 3.

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x,\ 1) + \varphi'x,\ 2) + \varphi'(x,\ 3) + \ldots.$$

Dies ergiebt: Wenn für den Werth x die Differentialquotienten $\varphi'(x,\ n)$ und $\varphi''(x,\ n)$ endlich und stetig sind und wenn die Reihe

$$R(x,\ h) = \varphi''(x + \vartheta_1 h,\ 1) + \varphi''(x + \vartheta_2 h,\ 2) + \varphi''(x + \vartheta_3 h,\ 3) + \ldots$$

für ein hinlänglich kleines positives h und für positive echt gebrochene ϑ convergirt, so folgt aus der convergenten Reihe

$$S(x) = \varphi(x,\ 1) + \varphi(x,\ 2) + \varphi(x,\ 3) + \ldots$$

die neue convergente Reihe

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x,\ 1) + \varphi'(x,\ 2) + \varphi'(x,\ 3) + \ldots$$

16. Als Beispiel betrachten wir zunächst die Potenzreihe

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots, \qquad -1 < x \leqq +1.$$

Das allgemeine Glied derselben ist

$$S(x,\ n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$$

hieraus folgt

$$\varphi''(x,\ n) = (-1)^{n-1}(2n-2)x^{2n-3},$$

$$R(x,\ h) = -2(x + \vartheta_2 h) + 4(x + \vartheta_3 h)^3 - 6(x + \vartheta_4 h)^5 + 8(x + \vartheta_5 h)^7 \ldots$$

Die Reihe der absoluten Werthe ist

$$2(x + \vartheta_2 h) + 4(x + \vartheta_3 h)^3 + 6(x + \vartheta_4 h)^5 + \ldots.$$

Setzt man für die ϑ den grössten Werth, nämlich die Einheit, so erhält man eine Reihe, welche convergirt, so lange $-1 < (x + h) < +1$; es convergirt daher auch $R(x,\ h)$; folglich ist der Differentialquotient von $S(x)$ gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Reihenglieder

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

Die Summe der rechts stehenden Reihe ist bekanntlich $1 : (1 + x^2)$; man hat daher

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Da nun auch

$$\frac{d\, arc\, tang\, x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2},$$

so folgt, dass

$$\frac{d(S - arc\, tang\, x)}{dx} = 0,$$

dass also $S - arc\, tang\, x$ gleich eine von x unabhängige Constante a ist. Man kann dieselbe bestimmen, indem man für einen geschickt gewählten Werth $x = x_0$ die Differenz $S_0 - arc\, tang\, x_0$ berechnet; setzt man z. B. $x_0 = 0$, so erhält man $S_0 = 0$, $arc\, tang\, x_0 = 0$, und hieraus folgt $a = 0$. Daher ist

$$arc\, tang\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots. \quad -1 < x \leqq +1.$$

Für $x = +1$ folgt hieraus eine zur Berechnung von π brauchbare Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \ldots$$

17. Die Reihe

$$\varphi = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

convergirt für $\qquad -1 \leqq x \leqq +1.$

Das allgemeine Glied ist

$$\varphi(x,\ n) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi''(x,\ n) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-4)} \cdot x^{2n-3}.$$

Die Reihe $R(x,\ h)$ wird bei positiven Werthen von x vergrössert, wenn man $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = +1$ setzt. Für den Grenzwerth des Quotienten zweier auf einanderfolgenden Glieder ergiebt sich unter dieser Voraussetzung

$$lim \frac{\varphi(x + h,\ n + 1)}{\varphi(x + h,\ n)} = lim \frac{2n - 1}{2n - 2}(x + h)^2.$$

Folglich convergirt $R(x,\ h)$ sobald $x^2 < 1$; innerhalb dieser Grenzen ist daher

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 + \ldots$$

Nun ist nach dem binomischen Satze (§ 13, No. 6)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \ldots.$$

Daher haben wir

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da nun auch

$$\frac{d\, arc\, sin\, x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

so folgt

$$S - arc\, sin\, x = a,$$

wo a einer von x unabhängige Constante bezeichnet. Setzen wir $x = 0$, so wird $S = 0$ und $arc\, sin\, x = 0$; folglich ist auch $a = 0$. Dies ergiebt die auch für $x^2 = 1$ convergente Reihenentwicklung

$$arc\, sin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Für $x = +1$ folgt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots,$$

eine nur schwach convergirende Reihe. Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich die rascher convergirende

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$$

18. Wenn man zur numerischen Berechnung einer Irrationalzahl (z. B. von π, e, Logarithmen, Sinus oder Cosinus bestimmter Bogen) eine unendliche Reihe zur Verfügung hat und die gesuchte Zahl mit grosser Genauigkeit bestimmt werden soll, so ist die direkte Verwendung der Reihe oft insofern sehr lästig, als man zur Erreichung grosser Genauigkeit nicht selten eine sehr grosse Anzahl von Gliedern der Reihe berechnen und addiren muss. Für solche Fälle ist es werthvoll, eine Methode zu besitzen, welche die Reihensumme bis auf eine grosse Genauigkeit rascher gewinnen lehrt, als dies durch direkte Summation erfolgen könnte*).

*) KUMMER, Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu finden. CRELLE's Journal, Bd. 16, pag. 206, 1837.

Die unendliche Reihe

$$S = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n + q_{n+1} + \ldots$$

theilen wir in

$$S_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

und

$$R = q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots;$$

wir nehmen an, dass S_n durch direkte Summation der darin enthaltenen Reihenglieder gefunden sei und suchen einen angenäherten Werth des Restes R. Hierzu bestimme man die beiden Functionen $\varphi(n)$ und $f(n)$ so, dass

1. $$\lim \varphi(n) \cdot q_n = 0,$$
2. $$\lim f(n) = 1,$$
3. $$f(n) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Es wird sich später zeigen, wie sich φ und f diesen Bedingungen entsprechend bestimmen lassen. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f(n)\, q_{n+1} &= \varphi(n)\, q_n - \varphi(n+1)\, q_{n+1}, \\ f(n+1)\, q_{n+2} &= \varphi(n+1)\, q_{n+1} - \varphi(n+2)\, q_{n+2}, \\ f(n+2)\, q_{n+3} &= \varphi(n+2)\, q_{n+2} - \varphi(n+3)\, q_{n+3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(n+k)\, q_{n+k+1} &= \varphi(n+k)\, q_{n+k} - \varphi(n+k+1)\, q_{n+k+1} \end{aligned}$$

erhält man durch Addition

$$f(n) q_{n+1} + f(n+1) q_{n+2} + \ldots + f(n+k) q_{n+k+1} = \varphi(n) q_n - \varphi(n+k+1) q_{n+k+1}.$$

Lässt man n unbegrenzt wachsen, so folgt in Rücksicht auf 1.

$$\varphi(n) q_n = f(n)\, q_{n+1} + f(n+1)\, q_{n+2} + f(n+2)\, q_{n+3} + \ldots.$$

Ist nun

$$f(n) > f(n+1) > f(n+2) > \ldots > 1$$

so ist

$$R < f(n)\, q_{n+1} + f(n+1)\, q_{n+2} + \ldots.$$

und zugleich

$$R > q_{n+1} + \frac{f(n+1)}{f(n)} q_{n+2} + \frac{f(n+2)}{f(n+1)} q_{n+3} + \ldots$$

Man hat somit für R die Begrenzung

4. $$\frac{\varphi(n)\, q_n}{f(n)} < R < \varphi(n)\, q_n.$$

Wenn hingegen

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \ldots < 1,$$

so hat man umgekehrt

5. $$\varphi(n)\, q_n < R < \frac{\varphi(n)\, q_n}{f(n)}.$$

Die Functionen φ und f kann man in folgender Weise entsprechend den Bedingungen 1., 2., 3. erhalten. Man setze für $\varphi(n)$ eine algebraische rationale gebrochene Function von n, etwa

6. $$\varphi(n) = c'n + c_0 + \frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \ldots + b_p}.$$

Entwickelt man durch Division den Bruch nach steigenden Potenzen von $1 : n$, so erhält man

7. $$\varphi(n) = c'n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{c_4}{n^4} + \ldots$$

Ferner wollen wir voraussetzen, dass sich der Quotient $q_n : q_{n+1}$ in folgende Reihe entwickeln lässt

8. $$\frac{q_n}{q_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \frac{\alpha_4}{n^4} + \ldots$$

Dann ist $f(n)$ durch die Gleichung 3. bestimmt

$$f(n) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Um aus derselben $f(n)$ nach fallenden Potenzen von n darzustellen, multipliciren wir zunächst die Reihen 7. und 8. und erhalten

9. $$\begin{aligned} \frac{q_n}{q_{n+1}} \varphi(n) = {} & c'n + (c_0 + \alpha_1 c') + (c'\alpha_2 + c_0\alpha_1 + c_1) \frac{1}{n} \\ & + (c'\alpha_3 + c_0\alpha_2 + c_1\alpha_1 + c_2) \frac{1}{n^2} \\ & + (c'\alpha_4 + c_0\alpha_3 + c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1 + c_3) \frac{1}{n^3} \\ & + (c'\alpha_5 + c_0\alpha_4 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_1 + c_4) \frac{1}{n^4} \\ & + (c'\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1 + c_5) \frac{1}{n^5} \\ & + (c'\alpha_7 + c_0\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_2\alpha_4 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_2 + c_5\alpha_1 + c_6) \frac{1}{n^6} \\ & + (c'\alpha_8 + c_0\alpha_7 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_5 + \ldots\ldots + c_6\alpha_1 + c_7) \frac{1}{n^7} \\ & + (c'\alpha_9 + c_0\alpha_8 + c_1\alpha_7 + c_2\alpha_6 + \ldots\ldots + c_7\alpha_1 + c_8) \frac{1}{n^8} \\ & + (c'\alpha_{10} + c_0\alpha_9 + c_1\alpha_8 + c_2\alpha_7 + \ldots\ldots + c_8\alpha_1 + c_9) \frac{1}{n^9} \\ & + (c'\alpha_{11} + c_0\alpha_{10} + c_1\alpha_9 + c_2\alpha_8 + \ldots\ldots + c_9\alpha_1 + c_{10}) \frac{1}{n^{10}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ferner ersetzen wir in 7. n durch $n+1$ und bilden so

$$\varphi(n+1) = c'(n+1) + c_0 + \frac{c_1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{c_2}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} + \frac{c_3}{n^3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3} + \ldots$$

Entwickeln wir hier die negativen Potenzen der Binome nach steigenden Potenzen von $1 : n$ und beachten, dass

$$\begin{aligned} \binom{-\mu}{\nu} &= (-1)^\nu \cdot \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu} = (-1)^\nu \binom{\mu+\nu-1}{\nu} \\ &= (-1)^\nu \binom{\mu+\nu-1}{\mu-1}, \end{aligned}$$

so erhalten wir

10. $$\begin{aligned} \varphi(n+1) = {} & c'n + (c' + c_0) + \frac{c_1}{n} - (c_1 - c_2)\frac{1}{n^2} + (c_1 - 2c_2 + c_3)\frac{1}{n^3} \\ & - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{n^k}\left[c_1 - \binom{k-1}{1} c_2 - \binom{k-1}{2} c_3 - \binom{k-1}{3} c_4 + \ldots \pm c_k\right] \pm \ldots \end{aligned}$$

Aus den Reihen 9. und 10. ergiebt sich schliesslich

11. $$\begin{aligned} f(n) = {} & c'(\alpha_1 - 1) + (c'\alpha_2 + c_0\alpha_1)\frac{1}{n} + [c'\alpha_3 + c_0\alpha_2 + c_1(\alpha_1 + 1)]\frac{1}{n^2} \\ & + [c'\alpha_4 + c_0\alpha_3 + c_1(\alpha_2 - 1) - c_2(\alpha_1 + 2)] \cdot \frac{1}{n^3} \\ & + [c'\alpha_5 + c_0\alpha_4 + c_1(\alpha_3 + 1) + c_2(\alpha_2 - 3) + c_3(\alpha_1 + 3)]\frac{1}{n^4} \\ & + [c'\alpha_6 + c_0\alpha_5 + c_1(\alpha_4 - 1) + c_2(\alpha_3 + 4) + c_3(\alpha_2 - 6) + c_4(\alpha_1 + 4)]\frac{1}{n^5} \end{aligned}$$

$$+ [c'\alpha_7 + c_0\alpha_6 + c_1(\alpha_5+1) + c_2(\alpha_4-5) + c_3(\alpha_3+10) + c_4(\alpha_2-10) + c_5(\alpha_1+5) \cdot \frac{1}{n^6}$$
$$+ [c'\alpha_8 + c_0\alpha_7 + c_1(\alpha_6-1) + c_2(\alpha_5+6) + c_3(\alpha_4-15) + c_4(\alpha_3+20) + c_5(\alpha_2-15)$$
$$+ c_6(\alpha_1+6)] \cdot \frac{1}{n^7}$$
$$+ [c'\alpha_9 + c_0\alpha_8 + c_1(\alpha_7+1) + c_2(\alpha_6-7) + c_3(\alpha_5+21) + c_4(\alpha_4-35) + c_5(\alpha_3+35$$
$$+ c_6(\alpha_2-21) + c_7(\alpha_1+7)] \cdot \frac{1}{n^8}$$
$$+ [c'\alpha_{10} + c_0\alpha_9 + c_1(\alpha_8-1) + c_2(\alpha_7+8) + c_3(\alpha_6-28) + c_4(\alpha_5+56) + c_5(\alpha_4-70)$$
$$+ c_6(\alpha_3+56) + c_7(\alpha_2-28) + c_8(\alpha_1+8)] \cdot \frac{1}{n^9}$$
$$+ [c'\alpha_{11} + c_0\alpha_{10} + c_1(\alpha_9+1) + c_2(\alpha_8-9) + c_3(\alpha_7+36) + c_4(\alpha_6-84)$$
$$+ c_5(\alpha_5+126) + c_6(\alpha_4-126) + c_7(\alpha_3+84) + c_8(\alpha_2-36) + c_9(\alpha_1+9)] \cdot \frac{1}{n^{10}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Zahlen c', c_0, $c_1 \ldots$ kann man nun so bestimmen, dass der Gleichung 2. genügt wird, und dass möglichst viele Glieder von $f(n)$ verschwinden; zur Erfüllung dieser Bestimmungen muss man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ kennen, und erhält somit für jede Reihe eine besondere Bestimmung für $f(n)$. Hat man nun die Coefficienten bestimmt

$$c', c_0, c_1, c_2 \ldots c_{2p},$$

so hat man den Bruch (6)

$$\frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p}$$

der Reihe gleichzusetzen

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c^2}{n^2} + \frac{c^3}{n^3} + \ldots + \frac{c_{2p}}{n^{2p}} + \ldots$$

Man erhält dann die Gleichung

$$a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p = (n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p)\left(\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_{2p}}{n^{2p}} + \ldots\right).$$

Setzt man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von n auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}
a_1 &= c_1, \\
a_2 &= c_2 + b_1c_1, \\
a_3 &= c_3 + b_1c_2 + b_2c_1, \\
a_4 &= c_4 + b_1c_3 + b_2c_2 + b_3c_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_p &= c_p + b_1c_{p-1} + \ldots + b_{p-1}c_1, \\
0 &= c_{p+1} + b_1c_p + \ldots + b_pc_1, \\
0 &= c_{p+2} + b_1c_{p+1} + \ldots + b_pc_2, \\
0 &= c_{p+3} + b_1c_{p+2} + \ldots + b_pc_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= c_{2p} + b_1c_{2p-1} + \ldots + b_pc_p.
\end{aligned} \qquad 12.$$

Aus den letzten p dieser Gleichungen erhält man die Grössen

$$b_1, b_2, b_3 \ldots b_p,$$

und mit Hülfe derselben aus dem ersten p die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_p.$$

19. Als Beispiel hierzu wollen wir π mit Hülfe der schwach convergenten Reihe berechnen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots.$$

Nimmt man je zwei Glieder zusammen, und dividirt dann durch 2, so erhält man

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \frac{1}{17\cdot 19} + \frac{1}{21\cdot 23} + \frac{1}{25\cdot 27} + \ldots$$

Das $n$te Glied dieser Reihe ist

$$q_n = \frac{1}{(4n-3)(4n-1)} = \frac{1}{16n^2 - 16n + 3}.$$

Demnach hat man

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{(4n+1)(4n+3)}{(4n-3)(4n-1)} = \frac{16n^2+16n+3}{16n^2-16n+3}$$
$$= 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{13}{8}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{n^4} + \frac{121}{128}\cdot\frac{1}{n^5} + \frac{91}{128}\cdot\frac{1}{n^6} + \ldots$$

Man hat daher für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$

die Werthe $2, 2, \frac{13}{8}, \frac{5}{4}, \frac{121}{128}, \frac{91}{128}$.

Setzt man in No. 18, 11. die Coefficienten von n^{-1}, n^{-2}, n^{-3}, n^{-4}, n^{-5}, gleich Null, und berücksichtigt die Bedingung 2., so erhält man

$$\begin{aligned}
&c' - 1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots & c' &= 1, \\
&2c' + 2c_0 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots & c_0 &= -1, \\
&\tfrac{13}{8}c' + 2c_0 + 3c_1 = 0, \ldots\ldots\ldots & c_1 &= \tfrac{1}{8}, \\
&\tfrac{5}{4}c' + \tfrac{13}{8}c_0 + c_1 + 4c_2 = 0, \ldots\ldots\ldots & c_2 &= \tfrac{1}{16}, \\
&\tfrac{121}{128}c' + \tfrac{5}{4}c_0 + \tfrac{21}{8}c_1 - c_2 + 5c_3 = 0, \ldots\ldots & c_3 &= \tfrac{1}{128}, \\
&\tfrac{91}{128}c' + \tfrac{121}{128}c_0 + \tfrac{1}{4}c_1 + \tfrac{45}{8}c_2 - 4c_3 + 6c_4 = 0, \ldots & c_4 &= -\tfrac{5}{256}.
\end{aligned}$$

Das System No. 18, 12. ergiebt für $p = 2$ und für die soeben gefundenen Werthe der c die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{16}b_1 + \tfrac{1}{8}b_2, &&\text{folglich} & b_1 &= -1, \\
0 &= -\tfrac{5}{256} + \tfrac{1}{128}b_1 + \tfrac{1}{16}b_2, &&\text{„ „} & b_2 &= \tfrac{7}{16}, \\
a_1 &= \tfrac{1}{8}, \quad a_2 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{8}b_1, &&\text{„ „} & a_2 &= -\tfrac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Daher ist nach Beseitigung der gebrochenen Coefficienten

$$\varphi(n) = n - 1 + \frac{2n-1}{16n^2 - 16n + 7}.$$

Berechnet man nun die Summe

$$S_6 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6$$

direkt, so erhält man auf 8 Stellen genau

$$S_6 = 0{,}382\,300\,35.$$

Ferner ergiebt sich

$$\varphi(6) = 5{,}022\,587\,26, \qquad \varphi(7) = 6{,}019\,145\,80,$$
$$\varphi(6)\cdot q_6 = 0{,}010\,398\,73, \qquad \varphi(6)\cdot\frac{q^6}{q^7} = 7{,}019\,142\,75.$$

Aus diesen Werthen folgt

$$f(6) = 0{,}999\,996\,95, \qquad \frac{\varphi(6)q_6}{f(6)} = 0{,}010\,398\,70.$$

Dies ergiebt auf 7 Stellen genau

$$R = 0{,}010\,398\,7.$$

Hieraus findet man schliesslich ebenfalls auf 7 Stellen genau

$$\frac{\pi}{8} = 0{,}392\,699\,1\,.$$

Um dieselbe Genauigkeit durch direkte Summation der Glieder der gegebenen unendlichen Reihe zu erlangen, hätte man so viel Glieder zusammennehmen müssen, bis man $1:(4n-3)(4n-1)$ kleiner als 10^{-7}, also $(4n-3)(4n-1)$ grösser als 10^7 erhalten hätte; bei dem Gliede

$$\frac{1}{3001\cdot 3003} = \frac{1}{(4\cdot 751-3)(4\cdot 751-1)}$$

wäre dies noch nicht erreicht worden; man hätte also mehr als 750 Glieder berechnen müssen, um zu dem Ziele zu gelangen, das wir durch eine nicht umständliche Rechnung nach Kummer's Methode erreicht haben.

---

20. Methode der unbestimmten Coefficienten. Wenn man nachweisen kann, dass eine Function $f(x)$ innerhalb gewisser Grenzen für die Variable x sich in eine Potenzreihe

1. $$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

entwickeln lässt, die Anwendung des Taylor'schen Satzes aber wegen der mehrfachen Differentiationen ungeeignet erscheint, so kann man durch geschickte Benutzung der Besonderheiten von $f(x)$ oft eine Reihe von linearen Gleichungen aufstellen, aus denen sich A_0, A_1, A_2, A_3 . . ergeben. Man kommt dann dazu, eine beliebige Anzahl der Coefficienten von A kennen zu lernen; lässt sich der Fortgang der Rechnung mit Sicherheit übersehen, so kann man auch das allgemeine Glied finden, während man im Gegenfalle es dabei bewenden lassen muss, jeden einzelnen Coefficienten zu ermitteln.

Geht man von der Voraussetzung aus, dass $tang\,x$ für die zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden x, für welche kein Differentialquotient von $tang\,x$ unendlich gross wird, in eine Potenzreihe entwickelt werden kann,

$$tang\,x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

so ist zunächst sicher, dass $A_0 = 0$ ist, da $tang\,x$ mit x zugleich verschwindet. Da ferner x und $tang\,x$ zugleich das Vorzeichen wechseln, so erkennt man, dass

$$A_2 = A_4 = A_6 = \ldots = A_{2n} = \ldots = 0\,.$$

Die Reihenentwicklung beschränkt sich daher auf die Glieder mit ungeraden Exponenten,

$$tang\,x = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + A_7x^7 + \ldots$$

Benutzt man die Gleichung

$$sin\,x = tang\,x\,cos\,x\,,$$

und setzt für $sin\,x$ und $cos\,x$ die früher gefundenen unendlichen Reihen ein, so erhält man

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right)$$
$$= (A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots\right).$$

Führt man links die Multiplication aus und vergleicht beiderseits die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x, so erhält man zur Bestimmung der A die Gleichungen

$$A_1 = 1\,,\quad A_3 - \frac{A_1}{2!} = -\frac{1}{3!}\,,$$
$$A_5 - \frac{A_3}{2!} + \frac{A_1}{4!} = \frac{1}{5!}\,,$$

Breslau. Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).