ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 20. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK

ACHTE LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der zwanzigsten Lieferung:

Fortsetzung des Handbuchs der Mathematik. »Analytische Geometrie des Raumes« (Schluss) von Professor Dr. HEGER. (Seite 273—380.)

Ferner: »Differentialrechnung« von Prof. Dr. HEGER. (Seite 381—416.)

Die Fälle $B = E = 0$, $C \gtrless 0$ oder $C = E = 0$, $B \gtrless 0$ sind von dem soeben erledigten nicht wesentlich verschieden.

Ist $B = C = 0$ und $A = D$, so folgt aus 3., dass auch $E = 0$; wir kommen damit auf den Fall $B = C = E = 0$. Ist $B = C = E = 0$, so folgt aus 1., dass auch

$$A - \mu_0 = D - \mu_0 = F - \mu_0 = 0.$$

Hieraus folgt die Bedingung $A = D = F$. Nimmt man den gemeinsamen Werth dieser Grössen für μ_0, so ist $R = 0$ und die Gleichungen No. 11., 8. werden identisch; folglich ist jede Ebene, die durch P_0 geht, Symmetrieebene. Die Gleichung der Fläche ist

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

die Fläche ist daher eine Kugel.

13. Der Untersuchung des Falles $\Delta_1 = 0$ schicken wir einige Bemerkungen über die Geraden voraus, die eine Fläche II. O. in einem unendlich fernen Punkte treffen.

Eine Gerade, die durch einen Punkt Π geht und mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, hat mit der Fläche II. O. $f = 0$ einen unendlich fernen Punkt gemein, wenn in der Gleichung No. 1, 1 der Coefficient von r^2 verschwindet, wenn also α, β, γ der Bedingung genügen

1. $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma = 0.$

Zieht man durch den Nullpunkt eine Parallele zu einer solchen Geraden, und ist P ein Punkt dieser Parallelen, so ist

$$x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

mithin erfüllen die Coordinaten x, y, z die Gleichung

2. $$k = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur die quadratischen Glieder der Function f, sie stellt daher einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Spitze im Nullpunkte liegt; der Kegel ist unabhängig von den Coordinaten des Punktes P_0.

Bezogen auf die Symmetrieebenen ist die Gleichung einer centralen Fläche II. O.

$$f = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

die Gleichung des Kegels k wird daher

$$k = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0.$$

Beim Ellipsoid haben die Coefficienten A, D, F dasselbe Vorzeichen. Der Kegel k enthält daher ausser der Spitze keinen realen Punkt; es giebt mithin keine realen Geraden, die ein Ellipsoid in einem unendlich fernen Punkte treffen.

Bei den Hyperboloiden haben wir den Kegel $k = 0$ (in § 6, No. 9 und 12) bereits als Asymptotenkegel kennen gelernt. Alle Geraden, die ein Hyperboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind daher den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel.

Giebt man den Gleichungen der beiden Paraboloide die Form

$$f = Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0,$$

so erhält man

$$k = Ax^2 + Dy^2 = 0.$$

Beim elliptischen Paraboloide haben A und D gleiches Vorzeichen; daher besteht die dieser Gleichung zugehörige Fläche aus zwei imaginären Ebenen

$$\sqrt{A}\cdot x + \sqrt{-D}\cdot y = 0, \quad \sqrt{A}\cdot x - \sqrt{-D}\cdot y = 0,$$

die sich in der Z-Achse schneiden, und ausser derselben reale Punkte nicht enthalten. Alle Geraden, die ein elliptisches Paraboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind der Achse des Paraboloids parallel.

Beim hyperbolischen Paraboloide haben A und D verschiedene Vorzeichen; die Ebenen

$$\sqrt{A}\cdot x+\sqrt{-D}\cdot y=0,\qquad \sqrt{A}\cdot x+\sqrt{-D}\cdot y=0$$

sind daher real. Die Geraden, die ein hyperbolisches Paraboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind den Asymptotenebenen parallel (vergl. § 6, 18).

14. Wenn Δ_1 verschwindet, so zerfällt die quadratische Function

$$A\left(\frac{x}{z}\right)^2+2B\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}+2C\frac{x}{z}+D\left(\frac{y}{z}\right)^2+2E\frac{y}{z}+F$$

in zwei lineare Faktoren (Anal. Geom. d. Ebene § 13, No. 3.)

$$\left(a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c\right)\left(a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+c'\right).$$

Daher zerfällt der Kegel k in die beiden Ebenen

1. $$(ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z)=0.$$

Dieselben sind real und verschieden, real und vereint, oder conjugirt complex. Im letzteren Falle werden sie von jeder Ebene $z=d$ in den conjugirt complexen Geraden getroffen

$$(ax+by+cd)(a'x+b'y+c'd)=0.$$

Da diese einen realen Punkt gemein haben, so folgt, dass die Schnittlinie der Ebenen 1. auch dann real ist, wenn die Ebenen conjugirt complex sind.

Wählt man diese Schnittgerade zur Z-Achse eines neuen Coordinatensystems, so muss die Gleichung $k=0$ für dieses System zwei Ebenen darstellen, die die Z-Achse enthalten; hieraus folgt $C=E=F=0$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung für μ

$$-\mu\,[\mu^2-(A+D)\mu+AD-B^2]=0;$$

dieselbe ergiebt die Wurzeln

$$\mu_0=0,\quad \mu_1 \text{ und } \mu_2=\frac{1}{2}(A+D)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4B^2+(A-D)^2}.$$

Die Wurzeln μ_1 und μ_2 sind real.

Ist $A=B=D=0$, so verschwinden alle drei Wurzeln dieser Gleichung. Die Fläche reducirt sich dann auf

$$2Gx+2Hy+2Jz+K=0,$$

artet also in den Verein dieser Ebene und der unendlich fernen Ebene aus.

Ist $AD=B^2$, so verschwindet μ_2; die Fläche enthält daher unter dieser Voraussetzung nur eine Symmetrieebene; hierdurch ist sie als parabolischer Cylinder charakterisirt.

In jedem andern Falle ergeben die Proportionen No. 11, 10.

2. $$\cos\gamma=0,\quad \cos\alpha:\cos\beta=(\mu-D):B=B:(\mu-A).$$

Ist $B=0$ und $A=D$, so bleibt das Verhältniss $\cos\alpha:\cos\beta$ unbestimmt; alsdann sind alle durch P_0 gehenden Verticalebenen zugleich Symmetrieebenen der Fläche, und ausserdem hat dieselbe keine Symmetrieebenen; die Fläche ist daher ein Rotationsparaboloid.

Wenn B nicht verschwindet, so folgen aus 2. zwei bestimmte Werthpaare für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, für welche

$$\cos\alpha_1:\cos\beta_1=(\mu_1-D):B,$$
$$\cos\alpha_2:\cos\beta_2=(\mu_2-D):B.$$

Hieraus folgt

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2=n\,[(\mu_1-D)(\mu_2-D)+B^2],$$

wobei n eine leicht angebbare Grösse bezeichnet. Da nun

$$\mu_1\mu_2=AD-B^2,\qquad \mu_1+\mu_2=A+D,$$

so folgt $\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2=0$. Die beiden Symmetrieebenen der Fläche sind daher normal zu einander; folglich ist die Fläche ein elliptisches oder ein hyberbolisches Paraboloid.

15. Aus diesen Untersuchungen ziehen wir den Schluss, dass es nur folgende Arten eigentlicher (nicht in Ebenen zerfallender) Flächen II. O. giebt:

Parabolische, elliptische und hyperbolische Cylinder; Kegel; elliptische und hyperbolische Paraboloide; einschalige und zweischalige Hyperboloide; Ellipsoide.

---

16. Wir kehren zu dem Ausgangspunkte unserer Untersuchung über Symmetrieebenen an Flächen zweiter Ordnung zurück und knüpfen noch einige Bemerkungen an die Proportionen No. 11, 10, unter der Voraussetzung, dass für keine Wurzel μ der Gleichung $R=0$ alle Subdeterminanten von R verschwinden.

Setzen wir abkürzend

1. $$\begin{aligned}&(D-\mu)(F-\mu)-E^2\equiv\mathfrak{A},\quad CE-B(F-\mu)\equiv\mathfrak{B},\quad BE-C(D-\mu)\equiv\mathfrak{C},\\ &(A-\mu)(F-\mu)-C^2\equiv\mathfrak{D},\quad CB-E(A-\mu)\equiv\mathfrak{E},\quad (A-\mu)(D-\mu)-B^2\equiv\mathfrak{F},\end{aligned}$$

so haben wir

2. $$\begin{aligned}\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma&=\mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C},\\ &=\mathfrak{B}:\mathfrak{D}:\mathfrak{E},\\ &=\mathfrak{C}:\mathfrak{E}:\mathfrak{F}.\end{aligned}$$

Erweitert man die drei Verhältnisse rechts der Reihe nach mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ und ersetzt dann die in der Diagonalreihe stehenden Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$ der Reihe nach durch die auf Grund der Proportionen 2. gleichen Produkte $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{E}$, so erhält man die Proportion

3. $$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\mathfrak{B}\mathfrak{C}:\mathfrak{B}\mathfrak{E}:\mathfrak{C}\mathfrak{E},$$

woraus durch Division mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}$ hervorgeht

4. $$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{1}{\mathfrak{E}}:\frac{1}{\mathfrak{C}}:\frac{1}{\mathfrak{B}}.$$

Da $1:\mathfrak{E}$, $1:\mathfrak{C}$, $1:\mathfrak{B}$ proportional den Subdeterminanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der Glieder, z. B. der ersten Zeile der Determinante R sind, und da diese Determinante verschwindet, so ist

5. $$\frac{A-\mu}{\mathfrak{E}}=\frac{B}{\mathfrak{C}}=\frac{C}{\mathfrak{B}}=0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $R=0$ (oder der gleichbedeutenden Gleichung 5.) mit μ_1, μ_2, μ_3, und setzen für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ in 5. die Werthe ein, so erhalten wir daher die Gleichungen

6. $$\frac{A-\mu_1}{CB-EA+E\mu_1}+\frac{B}{BE-CD+C\mu_1}+\frac{C}{CE-BF+B\mu_1}=0,$$

7. $$\frac{A-\mu_2}{CB-EA+E\mu_2}+\frac{B}{BE-CD+C\mu_2}+\frac{C}{CE-BF+B\mu_2}=0,$$

8. $$\frac{A-\mu_3}{CB-EA+E\mu_3}+\frac{B}{BE-CD+C\mu_3}+\frac{C}{CE-BF+B\mu_3}=0.$$

Subtrahiren wir die zweite dieser drei Gleichungen von der ersten und beachten, dass

$$(A-\mu_1)(CB-EA+E\mu_2)-(A-\mu_2)(CB-EA+E\mu_1)\equiv(\mu_2-\mu_1)BC,$$

so erhalten wir nach Division durch $(\mu_2-\mu_1)BC$, und wenn wir die Werthe, welche die Grössen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ annehmen, wenn darin μ durch μ_i $(i=1, 2, 3)$ ersetzt wird, durch $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{E}_i$, bezeichnen

9. $$\frac{1}{\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2} + \frac{1}{\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2} = 0.$$

Ebenso entstehen durch Subtraction der Gleichungen 7. und 8. und nachherige Division durch $(\mu_3 - \mu_2)\,BC$, sowie auf gleiche Weise aus den Gleichungen 6. und 8. die beiden Gleichungen

10. $$\frac{1}{\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3} + \frac{1}{\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{C}_3} + \frac{1}{\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3} = 0,$$

11. $$\frac{1}{\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_3} + \frac{1}{\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_3} + \frac{1}{\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_3} = 0.$$

Sind α_i, β_i, γ_i die Stellungswinkel, welche zur Wurzel μ_i gehören, so hat man nach 4.

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = \frac{1}{\mathfrak{F}_1} : \frac{1}{\mathfrak{C}_1} : \frac{1}{\mathfrak{B}_1},$$
$$\cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = \frac{1}{\mathfrak{F}_2} : \frac{1}{\mathfrak{C}_2} : \frac{1}{\mathfrak{B}_2},$$
$$\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = \frac{1}{\mathfrak{F}_3} : \frac{1}{\mathfrak{C}_3} : \frac{1}{\mathfrak{B}_3}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 9., 10., 11. folgt hieraus

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0,$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0,$$
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 = 0.$$

Diese Formeln zeigen, dass die drei Symmetrieebenen einer Fläche zweiter Ordnung mit einander rechte Winkel bilden.

§ 8. Gerade Linien auf Flächen zweiter Ordnung.

1. Wird der Punkt Π auf der Fläche II. O. $f = 0$ angenommen, so ist in der Gleichung § 7, No. 1, 1 $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Soll nun die in der Richtung α, β, γ durch Π gezogene Gerade ganz auf der Fläche $f = 0$ liegen, so muss die Gleichung

$$(f_\xi' \cdot \cos\alpha + f_\eta' \cdot \cos\beta + f_\zeta' \cdot \cos\gamma)\, r + (A\cos^2\alpha + \ldots + F\cos^2\gamma)\, r^2 = 0$$

identisch sein; die Winkel α, β, γ müssen also den Gleichungen genügen

1. $$f_\xi' \cdot \cos\alpha + f_\eta' \cdot \cos\beta + f_\zeta' \cdot \cos\gamma = 0,$$

2. $$A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma = 0.$$

Die Gleichung 1. zeigt, dass die durch Π gehenden Geraden der Fläche auf der Tangentenebene des Punktes liegen (§ 5, No. 3); aus der Gleichung 2. folgt, dass sie den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel sind (wobei man beim hyperbolischen Paraboloide die beiden Asymptotenebenen als einen ausgearteten Kegel betrachten kann).

2. Für das hyperbolische Paraboloid ergiebt sich hieraus der Satz: Durch jeden Punkt eines hyperbolischen Paraboloids gehen zwei Gerade, die ganz auf der Fläche liegen; die eine ist der einen Asymptotenebene, die andere der andern parallel.

Das hyperbolische Paraboloid wird daher von zwei Systemen von Geraden bedeckt; die Geraden jedes Systems sind einer Asymptotenebene parallel; durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade jedes Systems. Die Geraden desselben Systems schneiden sich nicht; denn sonst würden durch den Schnittpunkt zwei derselben Asymptotenebene parallele Geraden der Fläche gehen. Legt man durch eine Gerade g der Fläche und durch einen Punkt P auf einer Geraden h des andern Systems eine Ebene T, so schneidet diese die Fläche f in einem Kegelschnitte, von dem die Gerade g ein Theil ist; zu der Schnittlinie

gehört daher noch eine zweite Gerade, die durch P geht; diese zweite Gerade ist also eine der beiden durch P gehenden Geraden der Fläche. Da diese zweite Gerade nicht desselben Systems sein kann wie g (denn zwei Gerade desselben Systems schneiden sich nicht), so folgt, dass T die Fläche in den Geraden g und h schneidet, dass also g und h sich schneiden. Wir schliessen daher: Jede Gerade des einen Systems wird von jeder Geraden des andern Systems geschnitten.

Jede Ebene, die durch g geht, schneidet f in einem Kegelschnitte, von welchem g ein Theil ist, der also aus g und aus einer Geraden h des andern Systems besteht, und berührt daher die Fläche in dem Punkte, in welchem g und h sich durchschneiden. Wir schliessen daher: Es giebt zwei Systeme von Ebenenbüscheln, welche aus lauter Tangentenebenen eines hyperbolischen Paraboloids bestehen; jede Tangentenebene gehört zu zwei solchen Büscheln, die verschiedenen Systemen angehören. Die Träger der Büschel sind die auf der Fläche liegenden Geraden.

3. Die allgemeine Gleichung der Fläche II. O. enthält zehn Coefficienten, deren Verhältnisse eindeutig berechnet werden, wenn neun Punkte der Fläche bekannt sind; denn durch jeden Punkt P_r ist eine Gleichung

$$f_r \equiv Ax_r^2 + 2Bx_ry_r + \ldots + 2Jz_r + K = 0$$

gegeben, die linear und homogen für die Coefficienten A, B, ... J, K ist. Eine Fläche II. O. ist daher durch neun Punkte bestimmt.

Wenn drei Punkte einer Fläche in gerader Linie liegen, so liegt diese Gerade ganz auf der Fläche; denn die Coordinaten der Schnittpunkte einer Geraden und einer Fläche II. O. hängen von einer quadratischen Gleichung ab, und wenn dieser von mehr als zwei Wurzeln genügt wird, so ist sie identisch.

Sind von einem hyperbolischen Paraboloide zwei Gerade α und α_1 gegeben, die sich nicht schneiden, so gelten diese daher für zusammen sechs Punkte der Fläche; sind noch zwei Gerade β und β_1 gegeben, deren jede die Geraden α und α_1 schneidet, so dass α, α_1 und β, β_1 die Gegenseiten eines unebenen Vierseits bilden, so gelten die Geraden β und β_1, da jede durch zwei gegebene Punkte der Fläche, nämlich durch Punkte auf α und α_1 gelegt ist, zusammen für zwei neue Punkte. Ein unebenes Vierseit, das ganz auf einer Fläche II. O. enthalten ist, zählt also für acht Punkte der Fläche.

Da für die Coefficienten in der Gleichung eines Paraboloids die Bedingung gilt

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

so kann auf Grund dieser Gleichung einer der Coefficienten, z. B. F, durch die andern ausgerechnet werden; man bedarf daher zur Bestimmung eines Paraboloids eines Punktes weniger als im allgemeinen Falle. Wir sehen daher: Ein Paraboloid ist durch acht Punkte bestimmt. Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch ein unebenes Vierseit bestimmt.

Um das Paraboloid zu construiren, auf welchem das unebene Vierseit der Geraden α, β, α_1, β_1 liegt, bemerken wir, dass eine Asymptotenebene parallel den Geraden α und α_1, die andere parallel β und β_1 ist. Da nun alle Geraden des Systems, zu welchem β und β_1 gehören, die beiden Geraden α und α_1 des andern Systems schneiden und der letzteren Asymptotenebene parallel sind, so erhält man das ganze Paraboloid, wenn man eine Gerade γ längs der Geraden

α und α_1 so fortführt, dass sie einer Ebene E parallel bleibt, die zu β und β_1 parallel ist.

Die Punkte P und Q, in welchen α und α_1 von der Geraden γ in irgend einem Augenblicke getroffen wird, sind daher zugleich Schnittpunkte der Geraden α und α_1 mit einer zu E parallelen Ebene. Sind nun P_1, Q_1 und P_2, Q_2 die Schnittpunkte von α, α_1 mit β und β_1, so hat man die Proportion

$$P_1P : Q_1Q = P_1P_2 : Q_1Q_2 \,.$$

Dies ergiebt: Die Geraden α, α_1 etc. eines hyperbolischen Paraboloids werden von den Geraden des andern Systems γ in ähnlichen Punktreihen geschnitten, und zwar entsprechen sich die Punkte, die auf derselben Geraden γ liegen.

Umgekehrt schliesst man leicht, dass, wenn zwei ähnliche Punktreihen auf zwei Geraden α und α_1 liegen, die sich nicht schneiden, die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte einer festen Ebene parallel sind. Wir schliessen daher: Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier ähnlichen Punktreihen bedecken ein hyperbolisches Paraboloid; sie bilden die Geraden eines Systems, während die Träger α und α_1 der Punktreihen zu dem andern Systeme gehören.

4. Um zu erfahren, ob durch einen Punkt Π eines Hyperboloids

$$f \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 - 1 = 0$$

reale Gerade gezogen werden können, die ganz auf der Fläche liegen, haben wir nachzusehen, ob in der Tangentenebene T des Punktes Π durch Π Gerade gezogen werden können, welche Mantellinien des Asymptotenkegels parallel sind. Legt man durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene T_1 parallel zu T, so lassen sich in T durch Π zwei reale verschiedene, zwei reale zusammenfallende, oder keine realen Geraden parallel zu Mantellinien des Asymptotenkegels legen, je nachdem derselbe von der Parallelebene T_1 in zwei Mantellinien geschnitten, oder entlang einer Mantellinie berührt wird, oder ausser der Spitze keine realen Schnittpunkte mit T_1 gemein hat.

Die Gleichungen des Asymptotenkegels und der Tangentialebene T sind

1. $$k \equiv Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0,$$

2. $$T \equiv A\xi x + D\eta y + F\zeta z - 1 = 0.$$

Die Gleichung der den Mittelpunkt enthaltenden Paralellebene T_1 ist demnach

3. $$T_1 \equiv A\xi x + D\eta y + F\zeta z = 0.$$

Multiplicirt man 1. mit $F\zeta^2$ und setzt dann für $F^2\zeta^2 z^2$ den Werth aus 3. ein, so entsteht

$$F\zeta^2 (Ax^2 + Dy^2) + (A\xi x + D\eta y)^2 = 0,$$

oder besser geordnet

4. $$(FA\zeta^2 + A^2\xi^2)x^2 + 2AD\xi\eta \cdot xy + (FD\zeta^2 + D^2\eta^2)y^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Horizontalprojection des Schnittes von k und T; sie stellt zwei durch den Nullpunkt gehende Gerade dar; dieselben sind real verschieden, zusammenfallend, oder imaginär, je nachdem die Gleichung 4., nach x aufgelöst, zwei reale verschiedene, zusammenfallende, oder imaginäre Wurzeln hat, je nachdem also

$$A^2D^2\xi^2\eta^2 - (FD\zeta^2 + D^2\eta^2)(FA\zeta^2 + A^2\xi^2) \gtreqless 0.$$

Multiplicirt man die beiden Binome, so erhält man

5. $$-ADF\zeta^2(A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2) \gtreqless 0.$$

Da nun Π auf dem Hyperboloide liegt, so ist $A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2 = 1$, das Kriterium 5. geht daher über in

6. $$-ADF \gtreqless 0.$$

Das zweischalige Hyperboloid hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

also ist hier $\quad -ADF = -\dfrac{1}{a^2b^2c^2}$;

das einschalige Hyperboloid hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

folglich ist $\quad -ADF = \dfrac{1}{a^2b^2c^2}$.

Hieraus folgt: Auf dem zweischaligen Hyperboloide liegen keine realen Geraden. Durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloids lassen sich zwei reale Gerade auf der Fläche ziehen.

Die durch einen Punkt eines einschaligen Hyperboloids gehenden Geraden fallen nur dann zusammen, wenn für diesen Punkt

$$A\xi^2 + D\eta^2 + F\zeta^2 = 0,$$

also wenn der Punkt zugleich auf dem Asymptotenkegel liegt. Da nun die Mantellinien des Asymptotenkegels mit dem Hyperboloid unendlich ferne Punkte gemein haben, und da ferner zwei Gerade, die im unendlich Fernen sich unter einem verschwindend kleinen Winkel schneiden, parallel sind, so folgt der Satz: Die Geraden eines einschaligen Hyperboloids sind paarweis parallel.

5. Wie beim hyperbolischen Paraboloide (No. 2), so überzeugt man sich auch hier, dass jede Ebene, die durch eine Gerade g eines Hyperboloids gelegt wird, die Fläche in einer zweiten Geraden h schneidet, und Tangentenebene der Fläche in dem Schnittpunkte P der Geraden g und h ist; sowie, dass durch jeden Punkt P des Hyperboloids eine Gerade h desselben geht, welche die Gerade g schneidet. Die zweite Gerade g_1, die ausser h durch P geht, kann die Gerade g nicht schneiden; denn sonst würden die drei Geraden g, h, g_1 auf einer Ebene liegen, diese Ebene würde also mit der Fläche ein Gebilde dritter Ordnung, nämlich den Verein der drei Geraden g, h, g_1, gemein haben — im Widerspruche mit der Thatsache, dass eine Ebene mit einer Fläche II. O. nur ein Gebilde zweiter Ordnung gemein hat. Sämmtliche Gerade eines einschaligen Hyperboloids zerfallen also in zwei Systeme: in solche, die eine gegebene Gerade g der Fläche schneiden, und in solche, die g nicht schneiden; durch jeden Punkt der Fläche geht von jedem der beiden Systeme eine Gerade. Zwei Gerade h und h_1, welche g schneiden, können sich ebenfalls nicht schneiden, da sonst das Dreieck der Geraden h, h_1, g auf der Fläche liegen würde. Jedes der beiden Systeme von Geraden, die auf einem einschaligen Hyperboloide liegen, enthält also solche Gerade, die sich nicht schneiden, während jede Gerade des einen Systems von jeder Geraden des andern Systems geschnitten wird.

Da jede durch eine Gerade eines Hyperboloids gelegte Ebene die Fläche in einem Punkte dieser Geraden berührt, so hat man den Satz: Es giebt zwei Systeme von Ebenenbüscheln, deren Ebenen sämmtlich Tangentenebenen eines einschaligen Hyperboloids sind; jede Tangentenebene des Hyperboloids gehört zu zwei Büscheln verschiedener Systeme; die Träger dieser Systeme von Tangentialebenen-Büscheln sind die beiden Systeme von Geraden des Hyperboloids.

6. Durch drei Gerade g_1, g_2, g_3, die nicht zu zweien auf einer Ebene liegen, ist ein Hyperboloid bestimmt, denn diese Geraden des Hyperboloids sind gleichbedeutend mit neun gegebenen Punkten, deren je drei auf einer der Geraden liegen. Die Geraden g_1, g_2, g_3 schneiden sich nicht, sie gehören also zu demselben Systeme; es werden daher alle drei von jeder Geraden h des andern Systems geschnitten. Da nun durch jeden Punkt der Geraden g nur eine Gerade gelegt werden kann, welche g_2 und g_3 schneidet, so folgt: Wenn eine Gerade h sich so bewegt, dass sie in allen ihren Lagen drei gegebene Gerade g_1, g_2, g_3 schneidet, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid; die verschiedenen Lagen von h sind die Geraden des einen Systems, die Geraden g_1, g_2, g_3 gehören zu dem andern Systeme.

Durch ein unebenes Vierseit und einen Punkt A ist ein einschaliges Hyperboloid bestimmt. Die Geraden des Hyperboloids, die durch A gehen, sind die Geraden, welche die Gegenseiten des unebenen Vierecks schneiden.

7. Die Gerade h, die durch einen Punkt P der Geraden g_1 geht und die Geraden g_2, g_3 schneidet, wird dadurch erhalten, dass man den Punkt P durch Ebenen T und T' projicirt, die durch g_2 und g_3 gelegt sind; die Schnittgerade dieser Ebenen ist die gesuchte Gerade.

Rückt nun P auf g_1 fort, so beschreiben die Ebenen T und die Ebenen T' zwei Ebenenbüschel, welche die Träger g_2 und g_3 haben; diese Büschel, die aus lauter Tangentenebenen der Fläche bestehen, sind projectiv mit der Punktreihe auf h, die sie projiciren, und mithin auch unter einander projectiv.

Wir sehen daher: Je zwei zu demselben Systeme gehörige Büschel von Tangentenebenen eines einschaligen Hyperboloids (und eines hyperbolischen Paraboloids, auf welches man denselben Beweisgang anwenden kann) sind projectiv; und zwar entsprechen sich die Ebenen, welche dieselbe Gerade des andern Systems enthalten, also zusammen ein Büschel des andern Systems bilden.

Man kann die Gerade g_1 durch irgend eine andere Gerade g desselben Systems ersetzen; g wird von allen Geraden h des andern Systems geschnitten, in jedem Punkte von g treffen sich also zwei entsprechende Ebenen der Büschel, deren Träger g_2 und g_3 sind; mithin werden die Geraden, die zu demselben Systeme gehören, von den Geraden des andern Systems in projectiven Punktreihen getroffen, und zwar entsprechen sich die Punkte, die auf derselben Geraden des andern Systems liegen.

8. Umgekehrt schliesst man leicht: Der Ort der Schnittgeraden je zweier entsprechenden Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, deren Träger nicht auf einer Ebene liegen, ist ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Denn sind in den beiden Büscheln die Ebenen $T_1, T_2, T_3 \barwedge T_1', T_2', T_3'$ und sind die Gleichungen von T_3 und T_3'

$$T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0, \quad T_3' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0,$$

so sind die Gleichungen zweier entsprechenden Ebenen

$$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0, \quad T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0.$$

Die Schnittpunkte beider Ebenen genügen der Gleichung, die sich durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$ ergiebt, also der Gleichung

$$a_1 b_2 T_1 T_2' - a_2 b_1 T_2 T_1' = 0;$$

dies ist eine Gleichung zweiten Grades.

Wenn die beiden Ebenenbüschel ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen, so sind die beiden Träger der einen, und die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen der andern Asymptotenebene parallel; daher schneiden je zwei entsprechende Ebenen die letztere Asymptotenebene in parallelen Geraden, erzeugen also auf ihr zwei projective Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen parallel sind. Durch Umkehrung findet man: Hat man auf einer Ebene E zwei congruente Strahlbüschel S und S', deren entsprechende Strahlen parallel sind, zieht durch die Träger zwei nicht auf E liegende sich nicht schneidende Gerade a und a' und projicirt S und S' von a und a' aus, so schneiden sich je zwei entsprechende Ebenen der so erzeugten Ebenenbüschel in den Geraden eines hyperbolischen Paraboloids; eine Asymptotenebene desselben ist parallel zu E, die andere parallel zu a und a'.

Ferner: Die Ebenenbüschel, deren Träger die entsprechenden Punkte zweier projectiven Punktreihen verbinden (die nicht auf derselben Ebene liegen) umhüllen (berühren) ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Sind nämlich entsprechende Punktpaare der beiden Reihen

$$P_1, P_2, P_3 \barwedge P_1', P_2', P_3', \text{ und ist}$$

$$P_3 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2, \quad P_3' \equiv b_1 P_1' + b_2 P_2',$$

so sind die Gleichungen irgend zweier entsprechenden Punkte

$$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0, \quad P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' = 0.$$

Die Ebenen, welche durch zwei entsprechende Punkte gehen, erfüllen die Gleichung, welche durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $P = 0$ und $P' = 0$ hervorgeht

$$a_1 b_2 P_1 P_2' - a_2 b_1 P_2 P_1' = 0.$$

Dies ist die Gleichung der umhüllten Fläche in Ebenencoordinaten. Man kann dem soeben bewiesenen Satze auch folgende Fassung geben: Der Ort der Geraden h, welche je zwei entsprechende Punkte zweier projectiven Punktreihen verbinden, deren Träger nicht auf derselben Ebene liegen, ist ein einschaliges Hyperboloid; die Geraden h bilden das eine System von Geraden des Hyperboloids die Träger der beiden Punktreihen gehören zu dem anderen Systeme.

Wir bemerken schliesslich, dass die Flächen zweiter Ordnung, welche Gerade enthalten, unter der Bezeichnung Regelflächen zweiten Grades zusammengefasst werden.

§ 9. Schnittcurve und Schnittpunkte von Flächen zweiter Ordnung. Kreisschnitte.

1. Die Schnittpunkte zweier Flächen II. O. genügen den Gleichungen der beiden Flächen

$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots + 2Jz + K = 0$ und $g \equiv A'x^2 + 2B'xy + \ldots + 2J'z + K' = 0$;

eliminirt man der Reihe nach x, y und z aus diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichungen der drei Projectionen der Schnittcurve der beiden Flächen; diese drei Gleichungen sind vom vierten Gerade; die Projectionen der Schnittcurven zweier Flächen II. O. sind also Curven vierter Ordnung. Um die Coordinaten der Punkte zu erhalten, in denen die Schnittcurve der Flächen f und g von einer Ebene

$$T \equiv mx + ny + pz + q = 0$$

geschnitten wird, kann man z mittelst der Gleichung $T = 0$ auch den Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ entfernen; man erhält dann zwei Gleichungen zweiten Grades für x und y; bestimmt man die vier gemeinsamen Wurzelsysteme, und zu jedem Werthsysteme durch die Gleichung $T = 0$ den zugehörigen Werth von z, so erhält man die Coordinaten der gesuchten Schnittpunkte. Man sieht hieraus: Die Schnittcurve zweier Flächen II. O. wird von einer Ebene in vier Punkten geschnitten.

Man bezeichnet daher diese Schnittcurve als eine Raumcurve vierter Ordnung; indem man als Raumcurve $n$ter Ordnung eine Raumcurve bezeichnet, die von einer Ebene in n Punkten geschnitten wird. Zum Unterschiede von Raumcurven vierter Ordnung, die nicht auf zwei Flächen II. O. liegen, bezeichnet man die Schnittcurve zweier Flächen II. O. als Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

2. Wenn eine Fläche II. O. die acht Punkte $P_1, \ldots P_8$ enthält, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + \ldots + 2Jz + K = 0, \\ &Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + Dy_1^2 + \ldots + 2Jz_1 + K = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ax_8^2 + 2Bx_8y_8 + 2Cx_8z_8 + Dy_8^2 + \ldots + 2Jz_8 + K = 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$f = \begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy, & xz & y^2 & yz & z^2 & x & y & z & 1 \\ Ax_1^2 + 2Bx_1y_1, & x_1z_1 & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ Ax_2^2 + 2Bx_2y_2, & x_2z_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Ax_8^2 + 2Bx_8y_8, & x_8z_8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass P auf einer durch die gegebenen Punkte gehenden Fläche II. O. liegt, ist also der allgemeine Form der Gleichung irgend einer durch $P_1, \ldots P_8$ gehende Fläche II. O. Die Function f zerfällt in die Summe zweier quadratischen Functionen

$$f \equiv A \cdot \varphi + 2B \cdot \psi,$$

wobei φ und ψ aus f hervorgehen, wenn man die erste Colonne durch x^2, x_1^2, $x_2^2, \ldots x_8^2$, bez. durch xy, $x_1y_1, \ldots x_8y_8$ ersetzt. Die eindeutig bestimmten Flächen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ enthalten die gegebenen acht Punkte; denn wenn man in φ oder ψ die Coordinaten x, y, z durch die Coordinaten eines der Punkte $P_1, \ldots P_8$ ersetzt, so wird die erste Zeile in φ und ψ mit einer der übrigen identisch, mithin verschwinden φ und ψ. Alle Punkte, deren Coordinaten die beiden Gleichungen erfüllen

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0,$$

genügen auch der Gleichung

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Alle die unendlich vielen Flächen II. O., die durch acht gegebene Punkte gehen, haben eine durch diese Punkte gehende Raumcurve vierter Ordnung mit einander gemein; diese Curve ist der Schnitt zweier durch die Coordinaten der gegebenen Punkte vollständig bestimmten Flächen II. O. ($\varphi = 0$ und $\psi = 0$) und mithin selbst durch die acht Punkte eindeutig bestimmt.

3. Wenn eine Fläche II. O. durch acht auf einer Raumcurve C

vierter Ordnung erster Species beliebig gewählte Punkte $P_1, \ldots P_8$ hindurch geht, so geht sie durch alle Punkte dieser Curve. Denn zwei Flächen f_1 und f_2, deren Schnitt die Curve C ist, gehen beide durch die Punkte $P_1, \ldots P_8$, mithin enthalten sie auch die durch diese Punkte bestimmte Raumcurve vierter Ordnung, folglich ist dieselbe mit C identisch. Durch eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. lassen sich unzählig viele Flächen zweiter Ordnung legen. Diese Flächen bilden ein Büschel, dessen Träger die Raumcurve ist, die sie gemein haben.

4. Haben zwei Flächen II. O. eine Gerade G gemein, so schneiden sie sich ausserdem noch in einer realen Curve; denn jede Ebene E, die durch G gelegt wird, schneidet die beiden Flächen noch ausserdem jede in einer realen Geraden, und der endlich oder unendlich ferne Punkt P dieser beiden Geraden ist ein gemeinsamer Punkt der beiden Flächen II. O.; dreht sich E um die Gerade G, so beschreibt P die Curve, in welcher die beiden Flächen ausserhalb G sich schneiden.

Diese Schnittcurve hat mit einer Ebene nur noch drei Punkte gemein, und ist daher eine Raumcurve dritter Ordnung.

5. Wenn fünf Punkte der Durchschnittscurve zweier Flächen II. O. $f = 0$ und $g = 0$ auf einer Ebene T liegen, so haben die Flächen den durch diese fünf Punkte auf T bestimmten Kegelschnitt mit einander gemein; denn die Ebene T trifft jede der beiden Flächen in einem Kegelschnitte, der durch die fünf Punkte geht, mithin sind diese beiden Kegelschnitte identisch. Wählt man T zur XY-Ebene eines Coordinatensystems, und sind

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + \ldots + K = 0, \quad g \equiv A_1x^2 + 2B_1xy + \ldots + K_1 = 0$$

die Gleichungen der Flächen in Bezug auf dieses System, so muss die Substitution $z = 0$ in f und g auf Gleichungen führen, die gleichbedeutend sind, die also nur um einen constanten Faktor von einander abweichen. Ist n dieser Faktor, so hat man daher

$$Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K \equiv n(A_1x^2 + 2B_1xy + D_1y^2 + \ldots + K_1).$$

Bildet man die Differenz $f - ng$, so erhält man

$$f - ng \equiv z[2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J - J_1)].$$

Die Punkte, welche $f = 0$ und $g = 0$ erfüllen, und für welche nicht $z = 0$ ist, genügen somit der Gleichung

$$T_1' \equiv 2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J - J_1) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Ebene; je nachdem diese Ebene f und g in einem realen oder imaginären Kegelschnitte trifft, haben die beiden Flächen ausser dem auf T liegenden Kegelschnitte noch diesen realen oder imaginären Kegelschnitt gemein; die Ebene T_1 dieses Kegelschnitts ist immer real. Wir schliessen daher: Wenn fünf Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5 zweier Flächen II. O. auf einer Ebene T liegen, so zerfällt die Schnittcurve der beiden Flächen in zwei Kegelschnitte; der eine auf T liegende ist durch die Punkte 1 . . 5 bestimmt, der andere kann real oder imaginär sein; die Ebene, die ihn enthält, ist auch im letzteren Falle real.

Oder: Wenn zwei Flächen II. O. einen Kegelschnitt gemein haben, so haben sie noch einen realen oder imaginären Kegelschnitt gemein, dessen Ebene stets real ist.

Bezieht man die Flächen f und g auf ein beliebiges Coordinatensystem, und hat man dabei u. A. die Substitution auszuführen

$$z = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

wobei x', y', z' die Coordinaten im neuen Systeme sind, so erhält man, wenn f', g', T_1' die Functionen sind, in welche f, g und T in Folge der Transformation übergehen

$$f' - ng' = (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')\, T_1'.$$

Hieraus folgt: Wenn zwei Flächen II. O. $f = 0$ und $g = 0$ sich in zwei ebenen Curven schneiden, so kann man die Function g mit einer geeigneten Zahl multipliciren, so dass die Differenz $f - ng$ in zwei lineare Factoren zerfällt, die, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Ebenen der beiden Schnittcurven sind.

6. Wenn eine Fläche II. O.

1. $$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + \ldots + 2Jz + K = 0$$

sieben gegebene Punkte $P_1, \ldots P_7$ enthält, so bestehen die Gleichungen

2. $$\begin{gathered} Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + \ldots + 2Jz_1 + K = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_7^2 + 2Bx_7y_7 + 2Cx_7z_7 + \ldots + 2Jz_7 + K = 0. \end{gathered}$$

Der Verein der Gleichungen 1. und 2. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$f = \begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz, & y^2 & yz & z^2 & x & y & z & 1 \\ Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1, & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Ax_7^2 + 2Bx_7y_7 + 2Cx_7z_7, & y_7^2 & y_7z_7 & z_7^2 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die allgemeine Form der Gleichung einer Fläche II. O., die durch die sieben gegebenen Punkte geht. Die Determinante f zerfällt in drei Determinanten

1. $$f = A \cdot \varphi + 2B \cdot \psi + C \cdot \chi;$$

die quadratischen Functionen φ, ψ, χ gehen aus f hervor, wenn man die erste Colonne der Reihe nach durch x^2, $x_1^2 \ldots x_7^2$, bez. xy, $x_1y_1, \ldots x_7y_7$, bez. xz, $x_1z_1, \ldots x_7z_7$ ersetzt. Aus 1. ist ersichtlich, dass alle Punkte, die den drei Flächen φ, ψ, χ gemeinsam sind, auch auf jeder Fläche II. O. liegen, die durch die gegebenen sieben Punkte hindurch geht.

Die Theorie der Gleichungen lehrt, dass drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten x, y, z durch acht Werthsysteme derselben befriedigt werden. Hieraus folgt, dass drei Flächen II. O. sich in acht Punkten schneiden.

Jede Fläche II. O., die durch die sieben Punkte $1, 2 \ldots 7$ geht, enthält also die acht Punkte, in denen sich die Flächen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und $\chi = 0$ schneiden. Diese drei Flächen haben die gegebenen sieben Punkte gemein; denn wenn man in φ, ψ, φ die Coordinaten x, y, z durch x_r, y_r, z_r, $r = 1 \ldots 7$, ersetzt, so verschwinden φ, ψ, χ identisch.

Da nun durch die sieben gegebenen Punkte die Functionen φ, ψ, χ vollständig bestimmt sind, so ist auch der achte Punkt bestimmt, den die Flächen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ ausser den gegebenen sieben gemein haben. Wir schliessen daher: Alle Flächen II. O., die durch sieben gegebene Punkte gehen, enthalten noch einen achten Punkt, der durch die gegebenen bestimmt ist. Oder: Ein System von acht Schnittpunkten dreier Flächen II. O. enthält nicht lauter von einander unabhängige Punkte, sondern jeder der acht Punkte ist durch die andern sieben bestimmt.

Der Satz: »Eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. ist durch acht Punkte bestimmt«

bedarf hiernach einer Einschränkung; diese acht Punkte dürfen nicht die acht Schnittpunkte dreier Flächen II. O. sein; durch acht Schnittpunkte dreier Flächen II. O. gehen unzählig viele Schnittcurven zweier Flächen II. O.

7. Wir untersuchen nun, ob es Ebenen giebt, die eine Fläche II. O. in einem Kreise schneiden, und beweisen hierzu zunächst folgenden Satz: Parallele Ebenen schneiden eine Fläche II. O. in ähnlichen Kegelschnitten.

Wir nehmen eine der parallelen Schnittebenen zur XY-Ebene eines Coordinatensystems; ist die Gleichung der Fläche in Bezug auf dieses System

$$f = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + K = 0,$$

so ist die Gleichung der Horizontalspur dieser Fläche

1. $$Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0.$$

Ist diese Curve eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder besteht sie aus zwei sich schneidenden Geraden, so nehmen wir die beiden Symmetrieachsen der Spur zur X- und Y-Achse, so dass die Gleichung der Spur die Form annimmt

$$Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Die Gleichung der Fläche bezüglich des neuen Systems ist daher

$$f = Ax^2 + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Jz + K = 0.$$

Eine Ebene, die parallel zur XY-Ebene und von derselben um z_0 entfernt ist, schneidet die Fläche in einer Curve, deren Gleichung ist

$$Ax^2 + 2Cxz_0 + Dy^2 + 2Eyz_0 + Fz_0^2 + 2Jz_0 + K = 0.$$

Hierfür kann man schreiben

$$A\left(x + 2\frac{Cz_0}{A}x + \frac{C^2z_0^2}{A^2}\right) + D\left(y^2 + 2\frac{Ez_0}{D}y + \frac{E^2z_0^2}{D^2}\right) + Fz_0^2 + 2Jz_0 + K$$
$$- \frac{C^2z_0^2}{A} - \frac{E^2z_0^2}{D} = 0,$$

oder

2. $$A\left(x + \frac{Cz_0}{A}\right)^2 + D\left(y + \frac{Ez_0}{D}\right)^2 - K_1 = 0,$$

wobei $K_1 = \dfrac{C^2z_0^2}{A} + \dfrac{E^2z_0^2}{D} - Fz_0^2 - 2Jz_0 - K$.

Die Gleichung 2. gehört einem Kegelschnitte an, dessen Achsen parallel der X- und Y-Achse sind und dessen Mittelpunkt die Coordinaten hat $\xi = -Cz_0 : A$, $\eta = -Ez_0 : D$. Die Halbachsen a_1 und b_1 dieses Kegelschnitts sind $a_1 = \sqrt{K_1 : A}$, $b_1 = \sqrt{K_1 : D}$; man hat demnach

$$a_1 : b_1 = \sqrt{D} : \sqrt{A};$$

das Verhältniss der Halbachsen hat also für alle parallelen Schnitte denselben Werth; mithin sind die Schnitte ähnlich und haben parallele Achsen.

Ist die Horizontalspur 1. eine Parabel, so wähle man die Achse derselben zur X-Achse, den Scheitel zum Nullpunkte; die Gleichung 1. geht dann über in

$$Dy^2 + 2Gx = 0;$$

die Gleichung der Fläche bezüglich des neuen Systems ist daher

$$f = 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Jz = 0.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $z = z_0$ hat die Gleichung

$$2Cxz_0 + Dy^2 + 2Eyz_0 + Fz_0^2 + 2Gx + 2Jz_0 = 0.$$

Hierfür kann man setzen

$$D\left(y + \frac{Ez_0}{D}\right)^2 + 2(G + Cz_0)\left(x + \frac{(DF - E^2)z_0^2 + 2JDz_0}{2D(G + Cz_0)}\right) = 0.$$

Der Schnitt ist daher eine Parabel, deren Achse der Achse der Spur parallel ist, deren Scheitel die Coordinaten hat

$$\xi = -\frac{[(DF - E^2)z_0^2 + 2JDz_0]}{2D(G + Cz_0)}, \quad \eta = -\frac{Ez_0}{D},$$

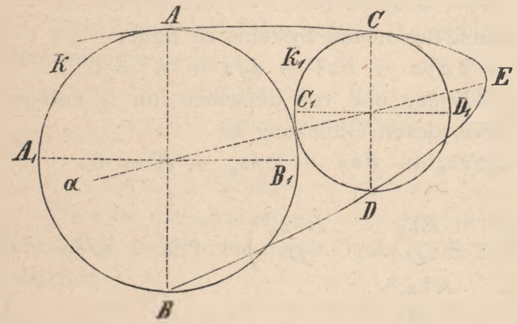
und deren Parameter $p = -(G + Cz_0) : D$ ist.

Da nun je zwei Parabeln einander ähnlich sind, so ist damit der Satz bewiesen.

Insbesondere folgt: Wird eine Fläche II. O. von einer Ebene in einem Kreise geschnitten, so wird die Fläche auch von allen Parallelebenen in Kreisen geschnitten.

8. Die Fläche II. O. $f = 0$ enthalte den Kreis K. Legt man durch K und durch einen anderen auf f liegenden Punkt eine Kugel S, so schneidet dieselbe die Fläche f ausser in K noch in einer ebenen Curve, hat also mit f noch einen Kreis K_1 gemein.

Die Ebene dieses Kreises ist im Allgemeinen nicht zu K parallel. Denn sind K und K_1 parallel, so fallen die Geraden, welche in den Centren normal zu den Kreisebenen errichtet sind, in eine Gerade α zusammen, da sie beide durch das Centrum der Kugel S gehen und parallel sind. Die Gerade α ist Symmetrieachse für jeden ebenen Schnitt der Fläche f, der α enthält, da α zwei parallele Sehnen jedes solchen Schnittes, z. B. AB und CD senkrecht halbirt. Dreht man den durch α gehenden ebenen Schnitt A_1, B_1, C_1, D_1 der Fläche f um α bis die Ebene in die ebenfalls durch α gehende Schnittebene $ABCD$ fällt, so fallen A und A_1, B und B_1, C und C_1 zusammen. Da nun die beiden Schnittcurven noch die beiden Punkte gemein haben, in welchem f von α geschnitten wird, so folgt, dass beide ebene Schnitte congruent sind; mithin sind alle durch α gehenden ebenen Schnitte congruent; folglich ist die Fläche eine Rotationsfläche und α ihre Rotationsachse. Wenn also f keine Rotationsfläche ist, so sind die Kreisebenen K und K_1 nicht parallel; wir schliessen daher: Wenn auf eine Fläche II. O., die keine Rotationsfläche ist, Kreise liegen, so giebt es zwei Schaaren von Parallelebenen, welche die Fläche in Kreisen schneiden.



(M. 453.)

9. Ueber das Vorhandensein von Kreisen auf einer Fläche II. O. werden wir nun in der Weise entscheiden, dass wir die Bedingungen untersuchen, unter denen die Schnittcurve der Fläche f und einer Kugel S in zwei ebene Curven zerfällt. Wir werden die Untersuchung für die einzelnen Flächenarten der Reihe nach durchführen. Vorerst bemerken wir noch, dass beim hyperbolischen Cylinder, beim parabolischen Cylinder und beim hyperbolischen Paraboloide von Kreisschnitten nicht die Rede sein kann. Denn jede Ebene schneidet einen hyperbolischen Cylinder sowie ein hyperbolisches Paraboloid in einer Curve, welche Punkte im Unendlichfernen hat, nämlich die Punkte, die auf den Schnittgeraden der Ebene E mit den beiden Asymptotenebenen der Fläche gelegen sind. Jeder ebene Schnitt eines hyperbolischen Cylinders ist also eine Hyperbel oder besteht aus zwei parallelen Geraden, je nachdem die Schnittebene der Mantellinien nicht parallel oder parallel ist; und jeder ebene Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids ist eine Hyperbel oder eine Parabel, je nachdem die Ebene

der Achse nicht parallel oder parallel ist. Jeder ebene Schnitt eines parabolischen Cylinders ist eine Parabel oder besteht aus zwei Mantellinien.

10. Kreisschnitte des elliptischen Cylinders. Die Mittelpunkte aller ebenen Schnitte eines Cylinders liegen auf der Achse des Cylinders; wenn daher Kreise auf einem Cylinder liegen, so kann man jeden Punkt der Cylinderachse als Centrum einer Kugel wählen, die einen Kreisschnitt enthält. Soll die um den Nullpunkt mit dem Radius r beschriebene Kugel

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

den elliptischen Kegel

$$f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

in Kreisen schneiden, so muss für eine bestimmte Wahl des Faktors n die Differenz

1. $$f - n \cdot S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - n(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

in zwei reale lineare Faktoren zerfallen. Hierzu ist zunächst erforderlich, dass die Fläche $f - nS = 0$ unendlich viele Doppelpunkte habe, dass also für die Function $f - nS$ die Bedingungen gelten

$$\Delta = 0, \quad \Delta_1 = 0.$$

Nun ist in unserm Falle

$$\Delta = -\left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right) n \cdot (nr^2 - 1), \quad \Delta_1 \equiv -\left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right) \cdot n.$$

Die Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ haben die Wurzeln gemein

$$n = 0, \quad n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}.$$

Die erste Wurzel führt zu keiner Lösung unserer Aufgabe. Die Wurzeln $n = 1 : a^2$ und $n = 1 : b^2$ liefern

2. $$f - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \frac{1}{a^2} z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

3. $$f - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{1}{b^2} z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right).$$

Die Gleichungen

$$f - \frac{1}{a^2} S = 0 \quad \text{und} \quad f - \frac{1}{b^2} S = 0$$

sind die Gleichungen zweier Cylinder zweiten Grades, die durch die Schnittcurve von f und S gehen und deren Mantellinien parallel zur X-Achse, bez. zur Y-Achse sind. Diese beiden Cylinder zerfallen in zwei Ebenen, wenn $r^2 = a^2$, bez. $r^2 = b^2$. Man erhält unter diesen Voraussetzungen

4. $$\varphi \equiv f - \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \frac{1}{a^2} z^2,$$

5. $$\varphi_1 \equiv f - \frac{1}{b^2}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \frac{1}{b^2} z^2.$$

Ist nun $a > b$, so ist in φ der Coefficient von y^2 positiv, mithin ist $\varphi = 0$ die Gleichung des Vereins der beiden realen Ebenen

$$T \equiv \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot y - \frac{1}{a} z = 0 \quad \text{und} \quad T_1 \equiv \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \cdot y + \frac{1}{a} z = 0.$$

Die Gleichung $\varphi_1 = 0$ gehört hingegen zu zwei imaginären Ebenen, da der Coefficient von x^2 negativ ist.

Es giebt also beim elliptischen Cylinder zwei Systeme von Kreisschnitten;

dieselben sind parallel zu den Ebenen T und T_1. Die Kreisschnitte eines elliptischen Cylinders sind normal zu der Symmetrieebene, in welcher die kleine Achse des Cylinders liegt, und sind gegen einen Normalschnitt des Cylinders um den Winkel α geneigt, für welchen

$$tang\,\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} : \frac{1}{a} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

11. Kreisschnitte des Kegels zweiter Ordnung. Die Gleichung des Kegels sei

$$1. \qquad C \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

die Gleichung einer Kugel, deren Centrum die Coordinaten d, e, f und die den Radius r hat, ist

$$2. \qquad \varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2dx - 2ey - 2fz + p = 0,$$

wenn $p = d^2 + e^2 + f^2 - r^2$.

Die Determinanten Δ und Δ_1 der Function $C - n\varphi$ sind

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\ , & 0\ , & nd \\ 0\ , & \frac{1}{b^2} - n, & 0\ , & ne \\ 0\ , & 0\ , & -\frac{1}{c^2} - n, & nf \\ nd\ , & ne\ , & nf\ , & -np \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right)\left(-\frac{1}{c^2} - n\right).$$

Setzt man die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1 = 0$, nämlich die Werthe

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = -\frac{1}{c^2},$$

der Reihe nach in Δ ein, so erhält man

$$-\frac{d^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(-\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right); \text{ bez. } -\frac{e^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$
$$\text{bez. } -\frac{f^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Diese Werthe verschwinden nur, wenn $d = 0$, bez. $e = 0$, bez. $f = 0$. Unter diesen Voraussetzungen erhält man der Reihe nach

$$3. \quad C - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 + 2\frac{e}{a^2} y + 2\frac{f}{a^2} z - \frac{p}{a^2} = 0,$$

$$4. \quad C - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right) z^2 + 2\frac{d}{b^2} x + 2\frac{f}{b^2} z - \frac{p}{b^2} = 0,$$

$$5. \quad C + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) y^2 - 2\frac{d}{c^2} x - 2\frac{e}{c^2} y + \frac{p}{c^2} = 0.$$

Dies sind die Gleichungen der Cylinder, welche durch die Schnittcurve des Kegels C und der Kugel S gelegt werden können; die Mantellinien derselben sind der Reihe nach der X-Achse, der Y-Achse, der Z-Achse parallel. Nehmen wir nun an, es sei $a > b$, so ist

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0;$$

die Gleichungen 4. und 5. gehören dann zu elliptischen Cylindern; diese können für keine Wahl der unbestimmten Coordinaten des Kugelcentrums und des Radius r in zwei Ebenen ausarten; dies ist nur bei dem hyperbolischen Cylinder 3. möglich.

Zerfällt 3. in ein Ebenenpaar, so muss die Gleichung 3., als Gleichung

eines Kegelschnitts in der YZ-Ebene betrachtet, in ein Geradenpaar zerfallen, es muss also die Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}, & 0\ , & \frac{e}{a^2} \\ 0\ , & -\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}, & \frac{f}{a^2} \\ \frac{e}{a^2}\ , & \frac{f}{a^2}\ , & -\frac{p}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)p - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{f^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{e^2}{a^2}\right] = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung p durch $e^2 + f^2 - r^2$, so erhält man nach einfacher Reduction

$$6. \quad \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)e^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)f^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)r^2 = 0.$$

Sieht man r als gegeben, die Coordinaten e und f als unbestimmt an, so ergiebt sich hieraus der Satz: Die Kugeln mit gegebenem Radius r, die einen Kegel II. O. in Kreisen schneiden, haben ihre Centra auf einer Ellipse, die auf einem Hauptschnitte liegt.

Aus 3. ergiebt sich für den Winkel α, den die Kreisschnittebenen des Kegels mit der XY-Ebene bilden

$$7. \qquad tang\,\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)} = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

Die Kreisschnitte des Kegels II. O. sind rechtwinkelig zu dem Hauptschnitte des Kegels, dessen Mantellinien den kleineren Winkel mit der Kegelachse bilden, und bilden gleiche Winkel $(90° - \alpha)$ mit der Achse.

12. Kreisschnitte des Ellipsoids. Ist k ein Kreis auf einem Ellipsoide, so lege man eine Ebene parallel zu k durch das Centrum des Ellipsoids. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid ebenfalls in einem Kreise, und durch diesen Kreis kann man eine Kugel legen, deren Centrum in das Centrum des Ellipsoids fällt. Um also die Kreisschnitte des Ellipsoids zu finden, hat man die Kugeln aufzusuchen, die mit dem Ellipsoide concentrisch sind und dasselbe in zwei ebenen Curven schneiden. Die Gleichungen des Ellipsoids und der Kugel sind

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Die Determinanten Δ und Δ_1 der Function $f - nS$ sind

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\ , & 0\ , & 0 \\ 0\ , & \frac{1}{b^2} - n, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & 0\ , & \frac{1}{c^2} - n, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & -1 + nr^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & \frac{1}{b^2} - n, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & \frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix},$$

also ist

$$\Delta = \left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right)\left(\frac{1}{c^2} - n\right)\left(nr^2 - 1\right), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2} - n\right)\left(\frac{1}{b^2} - n\right)\left(\frac{1}{c^2} - n\right).$$

Die Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ haben die gemeinsamen Wurzeln

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = \frac{1}{c^2}.$$

Für diese erhält man

$$1.\qquad F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0\,,$$

$$2.\qquad F - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) = 0\,,$$

$$3.\qquad F - \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) y^2 - \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) = 0\,.$$

Dies sind die Gleichungen der drei Cylinder, die durch die Schnittcurve von F und S gehen, und deren Mantellinien der Reihe nach der X-, der Y-, der Z-Achse parallel sind. Setzen wir voraus, es sei $a > b > c$, so sind 1. und 3. elliptische Cylinder, während 2. ein hyperbolischer Cylinder ist; es kann daher nur dieser durch besondere Wahl des Kugelradius r in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn $r = b$, denn dann hat man

$$F - \frac{1}{b^2} S \equiv -\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0;$$

diese Gleichung zerfällt in das Produkt zweier Ebenengleichungen

$$F - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \cdot z + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cdot x\right)\left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \cdot z - \frac{\sqrt{a^2 - b_2}}{ab} \cdot x\right) = 0.$$

Diese beiden Ebenen gehen durch die Y-Achse und ihr Neigungswinkel gegen die XY-Ebene folgt aus

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\,.$$

Ein dreiachsiges Ellipsoid hat daher zwei Systeme von Kreisschnitten; die Ebenen derselben sind parallel zu der mittleren Achse (b) des Ellipsoids und gegen die grosse Achse gleich geneigt.

Die zwei Paar Gegenpunkte, in welchen das Ellipsoid von den vier Ebenen berührt wird, die den Kreisschnitten parallel sind, heissen die Kreispunkte des Ellipsoids.

13. Kreisschnitte des einschaligen Hyperboloids. Wenn es hier Kreisschnitte giebt, so giebt es auch Kreisschnitte, die das Centrum des Hyperboloids enthalten, und man kann daher auch diesmal die Kugel S mit dem Hyperboloide concentrisch annehmen. Aus den Gleichungen des Hyperboloids und der Kugel

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

ergeben sich für die Function $f - nS$ die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\;, & 0\;, & 0 \\ 0\;, & \frac{1}{b^2} - n, & 0\;, & 0 \\ 0\;, & 0\;, & -\frac{1}{c^2} - n, & 0 \\ 0\;, & 0\;, & 0, & -1 + nr^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\;, & 0 \\ 0\;, & \frac{1}{b^2} - n, & 0 \\ 0\;, & 0\;, & -\frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix}.$$

Die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ sind daher

$$n = \frac{1}{a^2}\,, \quad n = \frac{1}{b^2}\,, \quad n = -\frac{1}{c^2}\,.$$

Für dieselben hat man der Reihe nach

$$1.\qquad F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0\,,$$

$$2.\qquad F - \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right) z^2 - \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) = 0\,,$$

$$3.\qquad F + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) y^2 - \left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right) = 0\,.$$

Dies sind die Gleichungen der drei Cylinder II. O., welche durch die Schnittcurve von F und S gelegt werden können; ihre Mantellinien sind der Reihe nach den Coordinatenachsen parallel. Setzen wir voraus, dass $a > b$, so ist der erste Cylinder hyperbolisch, der zweite und dritte hingegen sind elliptisch. Es kann daher nur der erste in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn $r = a$; man erhält dann

$$F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung zerfällt in lineare Faktoren

$$F - \frac{1}{a^2} S \equiv \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cdot y + \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} \cdot z\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cdot y - \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} \cdot z\right) = 0,$$

sie stellt daher zwei Ebenen dar, die durch die X-Achse gehen, und deren Neigungswinkel gegen die XY-Ebene sich ergeben aus

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}\,.$$

Im einschaligen Hyperboloide giebt es zwei Systeme von Kreisschnitten; die Ebenen derselben sind normal zu dem hyperbolischen Hauptschnitte, der die kleinere Hauptachse hat und sind gegen den elliptischen Hauptschnitt gleich geneigt.

14. Kreisschnitte des zweischaligen Hyperboloids. Da die durch das Centrum gehenden Ebenen, welche die Fläche treffen, dieselbe in einer Hyperbel schneiden, so geht kein realer Kreisschnitt durch das Centrum, wir haben daher die Kugel S in allgemeiner Lage vorauszusetzen. Die Gleichungen des Hyperboloids und der Kugel seien

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,,$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2fy - 2gz + p = 0\,, \quad p = e^2 + f^2 + g^2 - r^2.$$

Für die Function $F - nS$ hat man die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\;, & 0\;, & en \\ 0\;, & -\frac{1}{b^2} - n, & 0\;, & fn \\ 0\;, & 0\;, & -\frac{1}{c^2} - n, & gn \\ en\;, & fn\;, & gn\;, & -1 - pn \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n, & 0\;, & 0 \\ 0\;, & -\frac{1}{b^2} - n, & 0 \\ 0\;, & 0\;, & -\frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix}.$$

Die Wurzeln der Gleichungen $\Delta_1 = 0$ sind

$$n = \frac{1}{a^2}\,, \quad n = -\frac{1}{b^2}\,, \quad n = -\frac{1}{c^2}\,.$$

Für diese Werthe von n geht die Determinante Δ über in

$$-\frac{e^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right), \quad \text{bez.} \quad \frac{f^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

$$\text{bez.} \quad -\frac{g^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Soll einer dieser drei Werthe verschwinden, so muss entweder $e = 0$, oder $F = 0$, oder $g = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen hat man die Gleichungen:

$$1.\quad F - \frac{1}{a^2} S \equiv -\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 + 2\frac{f}{a^2} y + 2\frac{g}{a^2} z - \frac{p}{a^2} = 0\,,$$

2. $F + \frac{1}{b^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 - 2\frac{e}{b^2} x - 2\frac{g}{b^2} z + \frac{p}{b^2} = 0,$

3. $F + \frac{1}{c^2} S \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) y^2 - 2\frac{e}{c^2} x - 2\frac{f}{c^2} y + \frac{p}{c^2} = 0.$

Setzen wir voraus, dass $b > c$, so sind 1. und 3. elliptische Cylinder, während 2. ein hyperbolischer Cylinder ist. Nur dieser kann in den Verein zweier Ebenen ausarten; dies tritt ein, wenn die Gleichung 2., als Gleichung einer Curve II. O. in der XZ-Ebene betrachtet, in zwei Gerade zerfällt, also wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, & 0, & -\frac{e}{b^2} \\ 0, & -\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}, & -\frac{g}{b^2} \\ -\frac{e}{b^2}, & -\frac{g}{b^2}, & \frac{p}{b^2} \end{vmatrix} \equiv \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) \cdot \frac{p}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{g^2}{b^4} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{e^2}{b^4} = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung p durch $e^2 + g^2 - r^2$, so erhält man

4. $\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) e^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) g^2 - r^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0.$

Ist r gegeben, so ist dies die Gleichung einer bestimmten Ellipse. Wir haben daher: Die Centra der Kugeln mit gegebenem Radius, die ein zweischaliges Hyperboloid in zwei Kreisen schneiden, liegen auf einer Ellipse, die auf dem hyperbolischen Hauptschnitte liegt, der die kleinere Nebenachse hat.

Wählt man e, g und r so, dass sie der Gleichung 4. genügen, so zerfällt der Cylinder 2. in zwei Ebenen, die parallel der Y-Achse sind und deren Neigungswinkel mit der XY-Ebene sich aus der Formel ergeben

$$tang\,\alpha = \pm \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Wir schliessen daher: Ein zweischaliges Hyperboloid enthält zwei Systeme von Kreisschnitten; dieselben sind normal zu dem hyperbolischen Hauptschnitte, der die kleinere Nebenachse hat und sind gegen die Ebene des andern hyperbolischen Hauptschnitts unter gleichen Winkeln geneigt.

15. Kreisschnitte des elliptischen Paraboloids. Wir haben hier wieder die Kugel S in allgemeiner Lage vorauszusetzen, haben also von den Gleichungen des Paraboloids und der Kugel auszugehen:

$$F \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0, \qquad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2fy - 2gz + p = 0.$$

Für die Function $F - nS$ hat man diesmal die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} - n, & 0, & 0, & en \\ 0, & \frac{1}{b} - n, & 0, & fn \\ 0, & 0, & -n, & -1 + gn \\ en, & fn, & -1 + gn, & -pn \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} - n, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{b} - n, & 0 \\ 0, & 0, & -n \end{vmatrix}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1 = 0$ sind

$$n = \frac{1}{a}, \quad n = \frac{1}{b}, \quad n = 0.$$

Für die Wurzel $n = 0$ reducirt sich $F - nS$ auf F allein, also wird durch diese Wurzel das Problem nicht gelöst. Für $n = 1 : a$ und $n = 1 : b$ erhält Δ die Werthe

$$\frac{e^2}{a^3}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \quad \text{und} \quad \frac{f^2}{b^3}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Damit $1 : a$ oder $1 : b$ gemeinsame Wurzel der Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ ist, muss also $e = 0$ oder $f = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen ist

1. $F - \frac{1}{a} S \equiv \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) y^2 - \frac{1}{a} z^2 + 2\frac{f}{a} y - 2\left(1 - \frac{g}{a}\right) z - \frac{p}{a} = 0,$

2. $F - \frac{1}{b} S \equiv \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) x^2 - \frac{1}{b} z^2 + 2\frac{e}{b} x - 2\left(1 - \frac{g}{b}\right) z - \frac{p}{b} = 0.$

Diese Gleichungen sind die Gleichungen von Cylindern, deren Achsen parallel der X-Achse, bez. der Y-Achse sind; setzt man $a > b$ voraus, so ist 1. ein hyperbolischer, 2. ein elliptischer Cylinder. Nur der erstere kann für besondere Werthe von f, g und r in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, & 0, & \frac{f}{a} \\ 0, & -\frac{1}{a}, & -\left(1 - \frac{g}{a}\right) \\ \frac{f}{a}, & -\left(1 - \frac{g}{a}\right), & -\frac{p}{a} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung giebt entwickelt

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) p - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{g}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^3} f^2 = 0.$$

Hieraus erhält man nach einfacher Umrechnung die Gleichung

3. $$f^2 + 2(a - b)\left(g - \frac{r^2 + a^2}{a}\right) = 0.$$

Für einen gegebenen Werth r ist dies die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Z-Achse zusammenfällt, die sich in der Richtung der negativen Z-Achse erstreckt, deren Parameter gleich der Differenz $(a - b)$ ist und deren Scheitel die Ordinate hat $z = (r^2 + a^2) : a$.

Wählt man nun f, g und r der Gleichung 3. gemäss, so zerfällt der Cylinder 1. in zwei Ebenen, die der X-Achse parallel sind, und für deren Winkel α mit der XY-Ebene

$$tang\,\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) : \frac{1}{a}} = \pm \sqrt{\frac{a - b}{b}}.$$

Im elliptischen Paraboloide giebt es also ebenfalls zwei Systeme von Kreisschnitten; dieselben sind normal zu dem parabolischen Hauptschnitte, der den kleineren Parameter enthält, und sind gegen die XY-Ebene gleich geneigt.

§ 10. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen zweiter Klasse umschrieben ist. Gemeinsame Tangentenebenen dreier Flächen zweiter Klasse. Umschriebene Rotationskegel.

1. Die Coordinaten der Ebenen, welche zwei Flächen II. Kl.

1. $\varphi \equiv Au^2 + 2Buv + \ldots + 2Jw + K = 0,$

2. $\psi \equiv A_1 u^2 + 2B_1 uv + \ldots + 2J_1 w + K_1 = 0$

zugleich berühren, genügen den beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$.

Eliminirt man z. B. w aus 1. und 2., so erhält man eine Gleichung vierten Grades in u und v; betrachtet man diese Gleichung als die eines Gebildes in der XY-Ebene, so erkennt man: Die Spuren der Ebenen, die zwei Flächen II. Kl. berühren, umhüllen in jeder Coordinatenebene eine Curve vierter Klasse. Oder: Die Spuren der Fläche, welche von den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. umhüllt wird, sind Curven vierter Klasse.

Die Anzahl Tangentenebenen dieser Fläche, die durch einen gegebenen Punkt

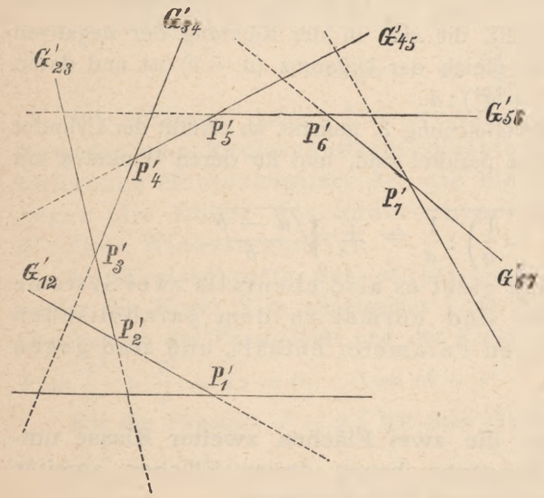
3. $$P = Lu + Mv + Nw + Q = 0$$

gehen, wird durch Auflösung des Systems erhalten

$$\varphi = 0\,, \quad \psi = 0\,, \quad P = 0\,.$$

Aus der dritten Gleichung berechnet man z. B. w und setzt die Werthe in die beiden ersten ein; man erhält dann zwei quadratische Gleichungen in u und v. Diese ergeben vier Wurzelpaare, und zu jedem folgt der zugehörige Werth w aus der Gleichung $P = 0$. Wir schliessen daher: Von der Fläche, welche die gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. umhüllen, gehen vier Tangentenebenen durch einen gegebenen Punkt. Die genannte Fläche wird aus diesem Grunde als Fläche vierter Klasse, und zwar zum Unterschiede von andern Flächen vierter Klasse, als Fläche vierter Klasse, erster Species, bezeichnet.

2. Um eine Vorstellung vom Baue dieser Fläche zu geben, bemerken wir Folgendes: Es sei T_1 eine Ebene, deren Coordinaten u_1, v_1, w_1 den beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ genügen. Aendert man u_1 um einen kleinen endlichen Betrag, in dem man es durch den nur wenig davon verschiedenen Werth u_2 ersetzt, so folgen aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ zwei dazu gehörige Werthe v_2 und w_2, die um so weniger von v_1 und w_1 abweichen, je näher u_2 an u_1 liegt. Die zu u_2, v_2, w_2 gehörige Ebene sei T_2; dieselbe schneidet T_1 in einer Geraden G_{12}*). Hierauf ersetze man u durch einen nicht viel von u_2 verschiedenen Werth u_3, und bestimme aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die zugehörigen Werthe v_3 und w_3; man erhält damit eine dritte Ebene T_3, welche T_2 in einer Geraden G_{23} schneidet. Die beiden Geraden G_{12} und G_{23} liegen auf einer Ebene T_2 und haben daher einen Punkt P_2 mit einander gemein.



(M. 454.)

Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe von Ebenen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ...., die den Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ genügen; jede T_i wird von der folgenden T_{i+1} in einer Geraden $G_{i,\,i+1}$ geschnitten, auf jeder Ebene liegen zwei solche Gerade, die sich in einem Punkte P_i schneiden. Jede Gerade, $G_{i-1,\,i}$ wird von der folgenden Geraden $G_{i,\,i+1}$ in einem Punkte P_i geschnitten, auf jeder Geraden $G_{i,\,i+1}$ liegen zwei solche Punkte, nämlich P_i und P_{i+1}. Diese Punkte sind die Ecken und die zwischen ihnen liegenden Strecken sind die Seiten eines unebenen Polygons R.

Durchläuft man R in der Richtung P_1, P_2, P_3 ..., bestimmt durch diese

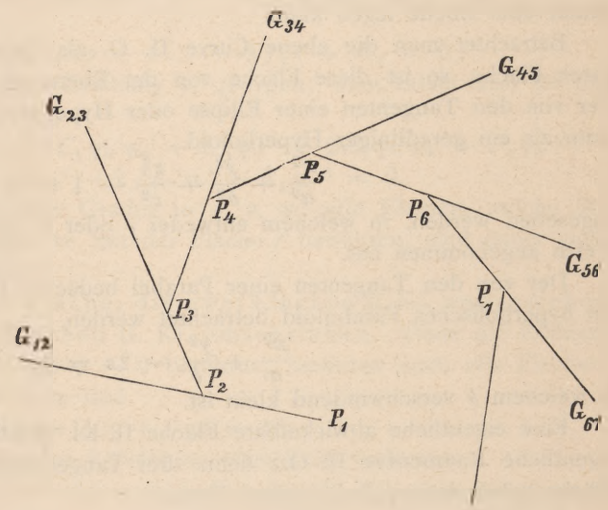
*) Die Figur ist als Grundriss gedacht; daher die Bezeichnungen G_{12}', P_1' u. s. w.

Bewegung den positiven Sinn aller Seiten des Polygons, und lässt von jeder Ebene nur den von zwei positiven Schenkeln eingeschlossenen Winkel sowie seinen Scheitelwinkel stehen, während man die beiden Scheitelwinkel wegnimmt, deren Schenkel vom Scheitel aus gerechnet ungleichsinnig sind, so erhält man die von den Ebenen gebildete Fläche.

Die Projection der Fläche auf eine geeignet gewählte Ebene ist von dem Polygone P_1', P_2', P_3', P_4' ... begrenzt, so dass der von dem Polygone ausgeschlossene Theil der Projectionsebene von der Projection der Fläche bedeckt wird, während die innerhalb P_1', P_2' ... liegenden Punkte nicht Projectionen von Punkten der Fläche sind.

Sind die auf einander folgenden Werthe u_1, u_2, u_3, u_4 ... nur wenig von einander verschieden, so unterscheiden sich auch die Stellungen der Ebenen T_1, T_2, T_3, T_4 .. nur wenig von einander. Gewisse Ausnahmestellen abgerechnet, ist daher der Flächenwinkel, der an dem positiven Theile der von P_i sich erstreckenden Geraden $G_{i-1,\,i}$ liegt, sowie dessen Scheitelwinkel, der an dem von P_{i-1} sich erstreckenden negativen Theile derselben Geraden liegt, nicht viel von einem gestreckten Winkel verschieden; dagegen ist der Flächenwinkel, der an der Kante $P_{i-1}\,P_i$ liegt, als Supplement eines nahezu gestreckten Winkels, ein sehr kleiner Winkel; das Polygon P_1, P_2, P_3 ... erscheint daher als eine scharfe Kante der Fläche.

Denkt man sich die Fläche entlang des Polygons P_1, P_2, P_3 ... zerschnitten, so zerfällt die Fläche in zwei getrennte Mäntel, die gleich und ähnlich sind; zu jedem Mantel gehört von jeder Ebene nur noch ein Winkelfeld. Zerschneidet man einen solchen Mantel entlang einer Geraden, z. B. G_{12}, so kann man die auf T_2 folgende Ebene T_3 um G_{23} drehen, bis sie mit T_2 zusammenfällt und die vorhandenen Winkelfelder von T_2 und T_3 nicht auf einander liegen. Verfährt man ebenso mit jeder folgenden Ebene, erst mit T_4, dann mit T_5 u. s. w., so wird dadurch der ganze Mantel der Fläche in eine Ebene ausgebreitet.



(M. 455.)

Lässt man u nun alle realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, so geht das unebene Polygon P_1, P_2, P_3 ... in eine Raumcurve über; die Geraden der Fläche werden zu Tangenten dieser Curve, da sie zwei unendlich nahe Punkte der Curve verbinden; die Winkel unter denen die beiden Mäntel entlang der Curve R sich treffen, werden verschwindend klein; die Eigenschaft beider Mäntel, sich in eine Ebene abwickeln (ausbreiten) zu lassen, bleibt bestehen.

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass jede in eine Ebene abwickelbare Fläche von dem eben beschriebenen Typus ist; denn eine solche Fläche ist nothwendig geradlinig, und jede Gerade der Fläche wird von den nächstfolgenden geschnitten.

Die Curve R, längs deren die beiden Mäntel einer abwickelbaren Fläche sich berühren, bezeichnet man als Cuspidalkante der Fläche.

3. Doppelt gekrümmte Curven und abwickelbare Flächen stehen im engsten Zusammenhange.

Jede doppelt gekrümmte Curve kann man als Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche betrachten; die Geraden der Fläche sind die Tangenten der Curve, die Ebenen der Fläche sind die Ebenen, welche durch je zwei auf einander folgende Tangenten bestimmt sind. Da eine Curventangente zwei benachbarte Punkte einer Curve enthält, so liegen auf der von zwei benachbarten Tangenten der Curve bestimmten Ebene drei benachbarte Curvenpunkte. Eine solche Ebene heisst eine Schmiegungsebene (Osculationsebene) der Curve. Die Schmiegungsebenen einer Raumcurve sind also die umhüllenden Ebenen der abwickelbaren Fläche, die von den Tangenten der Raumcurve beschrieben wird.

4. Der Kegel II. O. ist die einzige abwickelbare Fläche zweiten Grades (den Cylinder kann man als Kegel mit unendlich ferner Spitze betrachten); da aber die Cuspidalkante hier zu einem Punkte, der Spitze des Kegels, eingeschrumpft ist, so kann der Kegel nur als Ausartung einer abwickelbaren Fläche bezeichnet werden.

Eine unebene Curve II. O., d. i. eine Curve, die eine Ebene nur in zwei Punkten trifft, kann es nicht geben, da man durch drei Punkte einer Curve immer eine Ebene legen kann.

Betrachtet man die ebene Curve II. O. als Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche, so ist diese Fläche von der Ebene der Curve nicht verschieden. Der von den Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel bedeckte Theil der Ebene kann als ein geradliniges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

angesehen werden, in welchem entweder c oder b einen verschwindend kleinen Werth angenommen hat.

Der von den Tangenten einer Parabel bedeckte Theil einer Ebene kann als ein hyperbolisches Paraboloid betrachtet werden,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

in welchem b verschwindend klein ist.

Eine eigentliche abwickelbare Fläche II. Kl. giebt es ebensowenig, wie eine eigentliche Raumcurve II. O.; denn drei Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche gehen immer durch einen Punkt.

5. Die zwei Flächen II. O. gemeinsame abwickelbare Fläche (d. i. die von ihren gemeinsamen Tangentenebenen gebildete abwickelbare Fläche) berührt jede der beiden Flächen längs einer Raumcurve IV. O. 1. Sp.

Die Ebene, welche die Fläche

$$f \equiv A\xi^2 + 2B\xi\eta + \ldots + 2J\zeta + K = 0$$

im Punkte x, y, z berührt, hat die Gleichung

$$T \equiv f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta + f_p' = 0,$$

wobei $f_x' \equiv Ax + By + Cz + G, \quad f_y' \equiv Bx + Dy + Ez + H,$

$f_z' \equiv Cx + Ey + Fz + J, \quad f_p' \equiv Gx + Hy + Jz + K.$

Die Coordinaten der Ebene T sind hiernach

1. $$u = -f_x' : f_p', \quad v = -f_y' : f_p', \quad w = -f_z' : f_p'.$$

Soll nun die Ebene T noch eine andere Fläche zweiten Grades berühren, deren Gleichung in Ebenencoordinaten ist

2. $$\varphi \equiv A_1 u^2 + 2B_1 uv + \ldots + 2J_1 w + K_1 = 0,$$

so müsse die Werthe 1. der Gleichung 2. genügen; setzt man diese Werthe ein, so erhält man

3. $$\begin{aligned} &A_1 f_x'^2 + 2B_1 f_x' f_y' + 2C_1 f_x' f_z' + D_1 f_y'^2 + E_1 f_y' f_z' + F_1 f_z'^2 \\ &\quad - 2G_1 f_x' f_p' - 2H_1 f_y' f_p' - 2J_1 f_z' f_p' + K_1 f_p'^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades in Bezug auf die Coordinaten x, y, z; die Punkte, in denen die gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ die erstere berühren, liegen also noch auf der durch die Gleichung 3. charakterisirten Fläche II. O. Ebenso beweist man den analogen Satz: Die Tangential-Ebenen einer Fläche II. O. längs einer auf ihr liegenden Raumcurve IV. O. 1. Sp., berühren noch eine Fläche II. O.; denn der Punkt P, in welchem die Fläche

$$\varphi \equiv A\mathfrak{u}^2 + 2B\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \ldots + 2J\mathfrak{w} + K = 0$$

von der Ebene u, v, w berührt wird, hat die Gleichung

$$P \equiv \varphi_u' \cdot \mathfrak{u} + \varphi_v' \cdot \mathfrak{v} + \varphi_w' \cdot \mathfrak{w} + \varphi_r' = 0,$$

wobei $\varphi_u' \equiv Au + Bv + Cw + G, \quad \varphi_v' \equiv Bu + Dv + Ew + H,$

$\varphi_w' \equiv Cu + Ev + Fw + J, \quad \varphi_r' \equiv Gu + Hv + Jw + K.$

Die Coordinaten von P sind hiernach

4. $$x = -\varphi_u' : \varphi_r', \quad y = -\varphi_v' : \varphi_r', \quad z = \varphi_w' : \varphi_r'.$$

Wenn nun durch diesen Punkt noch eine zweite gegebene Fläche zweiten Grades geht

5. $$f \equiv A_1 x^2 + 2B_1 xy + \ldots + 2J_1 z + K_1 = 0,$$

so müssen die Werthe 4. der Gleichung 5. genügen; man erhält also für die u, v, w die Bedingungsgleichung

6. $$\begin{aligned} &A_1 \varphi_u'^2 + 2B_1 \varphi_u' \varphi_v' + 2C_1 \varphi_u' \varphi_w' + D_1 \varphi_v'^2 + 2E_1 \varphi_v' \varphi_w' + F_1 \varphi_w'^2 \\ &\quad - 2G_1 \varphi_u' \varphi_r' - 2H_1 \varphi_v' \varphi_r' - 2J \varphi_w' \varphi_r' + K_1 \varphi_r'^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades in u, v, w; alle Ebenen, welche die Fläche φ längs ihrer Schnittcurve mit der Fläche f bewähren, sind daher auch Tangentenebenen der Fläche 6.

6. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen II. Kl. umschrieben ist, ist unzählig vielen Flächen II. Kl. umschrieben. Denn die Ebenen, welche die Flächen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ berühren, berühren auch alle Flächen, deren Gleichungen von der Form sind

$$\chi \equiv \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi = 0,$$

wobei λ_1 und λ_2 zwei Zahlen von beliebigem Verhältniss bedeuten.

Wir schliessen daher: Auf einer zwei Flächen II. Kl. umschriebenen abwickelbaren Fläche giebt es unzählig viele Raumcurven IV. O. 1. Sp. Und dem entsprechend: Durch die Punkte einer Raumcurve IV. O. 1. Sp. gehen unzählig viele abwickelbare Flächen IV. Kl. 1. Sp.

7. Wenn die Fläche

1. $$Au^2 + 2Buv + 2Cuw + \ldots + 2Hv + 2Jw + K = 0$$

von acht gegebenen Ebenen $T_1, T_2 \ldots T_8$ berührt wird, so ist

2. $Au_1^2 + 2Bu_1v_1 + 2Cu_1w_1 + Dv_1^2 + 2Ev_1w_1 + Fw_1^2 + 2Gu_1 + 2Hv_1 + 2Jw_1 + K = 0,$

3. $Au_2^2 + 2Bu_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + 2Jw_2 + K = 0,$

4. $Au_3^2 + 2Bu_3v_3 + \ldots\ldots\ldots + 2Jw_3 + K = 0,$

. . . .

9. $Au_8^2 + 2Bu_8v_8 + \ldots\ldots\ldots + 2Jw_8 + K = 0.$

Fügt man zu den Gleichungen 2. 3. 9. die Gleichung 1., so folgt aus dem Verein dieser neun Gleichungen

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 & u & v & Jw + K \\ u_1^2 & u_1v_1 & u_1w_1 & v_1^2 & v_1w_1 & w_1^2 & u_1 & v_1 & Jw_1 + K \\ u_2^2 & u_2v_2 & u_2w_2 & v_2^2 & v_2w_2 & w_2^2 & u_2 & v_2 & Jw_2 + K \\ u_3^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Jw_3 + K \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_8^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Jw_8 + K \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist das Resultat der Elimination der acht Coefficienten $A, B, \ldots H$ aus den Gleichungen 1. . . . 9.; sie ist daher die Gleichung einer den acht gegebenen Tangentenebenen eingeschriebenen Fläche II. Kl. Die Determinante φ zerfällt in die Summe zweier Determinanten

10. $$\varphi \equiv J \cdot \psi + K \cdot \chi,$$

wobei ψ und χ aus φ hervorgehen, wenn man die letzte Colonne durch $w, w_1, w_2 \ldots w_8$ bez. durch $1, 1, \ldots 1$ ersetzt.

Die Gleichung $\varphi \equiv J\psi + K\chi = 0$ enthält die beiden willkürlichen Zahlen J und K; ändert man deren Verhältniss in jeder Weise ab, so erhält man die Gleichungen der unendlich vielen Flächen II. Kl., die von den gegebenen acht Ebenen berührt werden.

Die Tangentenebenen, für deren Coordinaten die Functionen ψ und χ verschwinden, erfüllen auch die Gleichung $\varphi = 0$; wir schliessen daher: Alle Flächen zweiter Klasse, die von acht gegebenen Ebenen berührt werden, sind einer abwickelbaren Fläche IV. Kl. 1. Sp. eingeschrieben. Eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. ist durch acht berührende Ebenen bestimmt.

8. Die Coordinaten der Ebenen, welche drei gegebene Flächen zweiter Klasse $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ berühren, sind die Wurzeln der drei Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0.$$

Wie die Theorie der Gleichungen lehrt, haben diese drei Gleichungen zweiten Grades acht gemeinsame Wurzelsysteme. Es giebt daher acht Ebenen, welche drei Flächen II. Kl. berühren.

9. Wird die Fläche

1. $$Au^2 + 2Buv + 2Cuw + \ldots + 2Hv + 2Jw + K = 0$$

von sieben gegebenen Ebenen $T_1, \ldots T_7$ berührt, so bestehen die Gleichungen 2. . . . 7. in No. 7; aus dem Verein dieser sieben Gleichungen und der Gleichung 1 kann man die sieben Unbekannten A, B, C, D, E, F, G eliminiren; man erhält

2. $$\varphi \equiv \begin{vmatrix} u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 & u & Hv + Jw + K \\ u_1^2 & u_1v_1 & u_1w_1 & v_1^2 & v_1w_1 & w_1^2 & u_1 & Hv_1 + Jw_1 + K \\ u_2^2 & u_2v_2 & u_2w_2 & v_2^2 & v_2w_2 & w_2^2 & u_2 & Hv_2 + Jw_2 + K \\ u_3^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Hv_3 + Jw_3 + K \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_7^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Hv_7 + Jw_7 + K \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe zerfällt in die Summen dreier Determinanten

3. $$\varphi \equiv H\psi + J\chi + K\omega;$$

wenn mit ψ, χ, ω die Functionen bezeichnet werden, die aus φ hervorgehen, wenn man die letzte Colonne durch $v, v_1, \ldots v_7$ bez. $w, w_1, \ldots w_7$, bez. $1, \ldots 1$ ersetzt.

In der Function φ treten drei unbestimmte Zahlen H, J, K auf; für jeden Werth dieser Zahlen stellt die Gleichung 3. eine Fläche II. O. dar, die von den gegebenen sieben Ebenen berührt wird.

Die drei Gleichungen $\psi = 0$, $\chi = 0$, $\omega = 0$ werden, wie man sieht, von den Coordinaten der gegebenen Ebenen erfüllt. Ausser diesen sieben Ebenen haben diese drei Flächen (nach No. 8) noch eine durch den Verein der Gleichungen $\varphi = \chi = \omega = 0$ bestimmte achte Tangentenebene gemein; wir schliessen daher: Alle Flächen II. Kl., die von sieben gegebenen Ebenen berührt werden, haben noch eine achte gemeinsame Tangentenebene, die durch die gegebenen sieben Ebenen eindeutig bestimmt ist.

Zugleich bemerkt man: Durch acht Ebenen ist eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. nur dann bestimmt, wenn dieselben nicht ein System gemeinsamer Tangentenebenen dreier Flächen II. O. bilden.

10. Wenn zwei Flächen II. Kl. einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, so wähle man ein Coordinatensystem, in welchem die Z-Achse durch die Spitze dieses Kegels geht. Ist nun $w = w_0$ die Gleichung der Kegelspitze, so müssen die Gleichungen, welche aus den Gleichungen der beiden Flächen

1. $$\varphi \equiv Au^2 + 2Buv + \ldots + 2Jw + K = 0,$$

2. $$\varphi_1 \equiv A_1u^2 + 2Bu_1v_1 + \ldots + 2J_1w + K_1 = 0$$

durch die Substitution $w = w_0$ hervorgehen, geometrisch gleich bedeutend sein, denn sie stellen den den Flächen von der Spitze $w = w_0$ aus umschriebenen Kegel II. O. dar. Für eine bestimmte Zahl m gilt also die Identität

$$Au^2 + 2Buv + 2Cuw_0 + Dv^2 + 2Evw_0 + Fw_0^2 + 2Gu + 2Hv + 2Jw_0 + K$$

3. $$\equiv m(A_1u^2 + 2B_1uv + 2C_1uw_0 + D_1v^2 + 2E_1vw_0 + F_1w_0^2 + 2G_1u + 2H_1v + 2J_1w_0 + K_1).$$

Aus dieser Identität folgen die Gleichungen

4. $$A = mA_1, \quad B = mB_1, \quad D = mD_1,$$

5. $$Cw_0 + G = mC_1w_0 + mG_1, \quad Ew_0 + H = mE_1w_0 + H_1, \\ Fw_0^2 + 2Jw_0 + K = mF_1w_0^2 + m \cdot 2J_1w_0 + mK_1.$$

Aus 5. ergiebt sich

6. $$(G - mG_1) = -(C - mC_1)w_0, \quad H - mH_1 = -(E - mE_1)w_0, \\ K - mK_1 = -(F - mF_1)w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0.$$

Bildet man nun die Function $\varphi - m\varphi_1$, so erhält man in Rücksicht auf 4. und 6.

$$\varphi - m\varphi_1 \equiv 2(C - mC_1)uw + 2(E - mE_1)vw + (F - mF_1)w^2 - 2(C - mC_1)w_0u \\ - 2(E - mE_1)w_0v + 2(J - mJ_1)w - (F - mF_1)w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0 \\ \equiv (w - w_0)[2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + (J - mJ_1)].$$

Hieraus ist ersichtlich, dass für alle Ebenen, welche zugleich die Fläche φ und φ_1 berühren, entweder $w = w_0$ oder

$$P \equiv 2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + J - mJ_1 = 0$$

ist; und dass, umgekehrt, alle Ebenen, die den Gleichungen $P = 0$ und $\varphi = 0$ genügen, auch die Gleichung $\varphi_1 = 0$ erfüllen. Dies lehrt, dass die beiden Flächen φ und φ_1 noch einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, dessen Spitze die Gleichung $P = 0$ hat. Wenn also zwei Flächen II. Kl. $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, so sind sie noch einem zweiten Kegel II. O. eingeschrieben; es giebt dann eine bestimmte Zahl m, für welche die Differenz $\varphi - m\psi$ in das Produkt zweier linearen Functionen zerfällt, die einzeln gleich Null gesetzt die Gleichungen der beiden Kegelspitzen ergeben.

11. Die Schnittpunkte einer Geraden, die durch einen Punkt P_0 unter den Winkeln α, β, γ gegen die Achsen gelegt ist, mit der Fläche II. O.

$$f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + \ldots + 2Jz + K = 0$$

sind bekanntlich durch die Gleichung bestimmt

$$f_0 + 2(f_{x_0}'\cos\alpha + f_{y_0}'\cos\beta + f_{z_0}'\cos\gamma)r + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma$$
$$+ D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)r^2 = 0.$$

Die Gerade tangirt die Fläche, wenn diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln für r liefert, also unter der Bedingung

$$f_0(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)$$
$$- (f_{x_0}'\cos\alpha + f_{y_0}'\cos\beta + f_{z_0}'\cos\gamma)^2 = 0.$$

Führen wir statt der Winkel α, β, γ die Coordinaten x, y, z des auf einer Tangente liegenden Punktes P ein, um so die Gleichung der Kegelfläche zu erhalten, die von den Tangenten gebildet wird, so geschieht dies durch

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0).$$

Wir erhalten

1. $$f_0[A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + 2C(x-x_0)(z-z_0) + D(y-y_0)^2$$
$$+ 2E(y-y_0)(z-z_0) + F(z-z_0)^2] - [f_{x_0}'(x-x_0) + f_{y_0}'(y-y_0) + f_{z_0}'(z-z_0)]^2$$
$$= 0.$$

Setzt man abkürzend

$$T \equiv f_{x_0}'x + f_{y_0}'y + f_{z_0}'z + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K,$$

so hat man (§ 5, No. 3, 6)

$$f_{x_0}'(x - x_0) + f_{y_0}'(y - y_0) + f_{z_0}'(z - z_0) \equiv T - f_0;$$

ferner ergiebt sich leicht

$$A(x - x_0)^2 + \ldots + F(z - z_0)^2 \equiv f + f_0 - 2T.$$

Daher wird aus Gleichung 1.

$$f_0(f + f_0 - 2T) - (T - f_0)^2 = 0.$$

Löst man die Klammern auf, so erhält man schliesslich

2. $$f_0 \cdot f - T^2 = 0.$$

Diese Gleichung lehrt: Die Tangenten einer Fläche II. O., die durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, sind die Mantellinien eines Kegels II. O., der die Gleichung hat

3. $$f_0 f - T^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen dieser Kegel die Fläche $f = 0$ berührt, genügen der Gleichung 3. und der Gleichung $f = 0$, mithin genügen sie auch der linearen Gleichung $T = 0$. Liegt daher ein Punkt P_0 nicht auf der Fläche $f = 0$ so ist $T = 0$ die Gleichung der Ebene, welche die Berührungspunkte der von P_0 an $f = 0$ gelegten Tangenten enthält.

12. Die Gleichung der centralen Flächen II. O. ist von der allgemeinen Form

$$f \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0.$$

Die Gleichung des von P_0 aus an diese Fläche gelegten Tangentenkegels ist demnach

1. $$f_0 f - (\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z - 1)^2 = 0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind

2. $$A \equiv \alpha \cdot f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B \equiv -\alpha\beta x_0 y_0, \quad C \equiv -\alpha\gamma x_0 z_0,$$
$$D \equiv \beta \cdot f_0 - \beta^2 y_0^2, \quad E \equiv -\beta\gamma y_0 z_0, \quad F \equiv \gamma \cdot f_0 - \gamma^2 z_0^2.$$

Ist der Kegel 1. Rotationskegel, so sind die Bedingungen erfüllt (§ 7, No. 12).

3. $$\frac{AE - BC}{E} = \frac{DC - BE}{C} = \frac{FB - CE}{B}.$$

Aus den Formeln 2. ergiebt sich

4. $$A - \frac{BC}{E} = \alpha f_0, \quad D - \frac{BE}{C} = \beta f_0, \quad F - \frac{CE}{B} = \gamma f_0.$$

Die Gleichungen 3. sind unabhängig von P_0 erfüllt, sobald $\alpha = \beta = \gamma$, d. i. wenn die Fläche f eine Kugel ist.

Ist f keine Kugel, so kann den Gleichungen 3. genügt werden, wenn $f = 0$ ist; in diesem Falle geht der Tangentenkegel in die Berührungsebene der Fläche f im Punkte P_0 über, und diese kann man in der That als eine Rotationsfläche ansehen. Abgesehen hiervon kann den Gleichungen 3. nur dadurch genügt werden, dass zwei von den drei Coefficienten B, C, E verschwinden und der dritte von Null verschieden ist. Nehmen wir zunächst

$$B = C = 0, \quad E \gtrless 0, \quad \text{also } x_0 = 0.$$

Nach § 7 No. 13 ist alsdann 1. eine Rotationsfläche, wenn $(D-A):E = E:(F-A)$; setzt man $x_0 = 0$ in 2. ein, so erhält man aus dieser Proportion

$$[(\beta - \alpha)f_0 - \beta^2 y_0^2][(\gamma - \alpha)f_0 - \gamma^2 z_0^2)] - \beta^2\gamma^2 y_0^2 z_0^2 = 0.$$

Rechnet man die linke Seite aus und unterdrückt den Faktor f_0, so ergiebt sich

5. $$\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} y_0^2 + \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \gamma} z_0^2 - 1 = 0.$$

Die Annahmen $B = E = 0$, bez. $C = E = 0$ führen in derselben Weise für die Spitzen der umschriebenen Rotationskegel auf die Gleichungen

6. $$y_0 = 0, \quad \frac{\beta\alpha}{\beta - \alpha} x_0^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta - \gamma} z_0^2 - 1 = 0,$$

7. $$z_0 = 0, \quad \frac{\gamma\alpha}{\gamma - \alpha} x_0^2 + \frac{\gamma\beta}{\gamma - \beta} y_0^2 - 1 = 0.$$

Dies sind die Gleichungen dreier in den Coordinatenebenen liegenden der Fläche $f = 0$ zugeordneten Kegelschnitte; man bezeichnet sie als die Focalkegelschnitte der Fläche f.

13. Wir stellen nun die Gleichungen der Focalkegelschnitte des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide der Reihe nach auf und entscheiden über die Realität der von ihren Punkten aus der Fläche umschriebenen Rotationskegel.

A. Für das Ellipsoid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = 1 : b^2$, $\gamma = 1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Setzen wir $a > b > c$ voraus, so sind dies der Reihe nach die Gleichungen einer imaginären Ellipse, einer realen Hyperbel und einer realen Ellipse. Die letztere liegt ganz im Innern des Ellipsoids, daher können von ihren Punkten aus reale Kegel nicht um die Fläche gelegt werden. Der Ort der Spitzen der einem dreiachsigen Ellipsoide umschriebenen realen Rotationskegels ist der Theil der in der Ebene der grössten und kleinsten Achse enthaltenen Focalhyperbel, der ausserhalb des Ellipsoids liegt. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel und des Ellipsoids sind die Kreispunkte des letzteren.

B. Für das einschalige Hyperboloid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = 1 : b^2$, $\gamma = -1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} - \frac{z^2}{c^2 + a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 + b^2} - 1 = 0.$$
$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} - 1 = 0.$$

Ist $a > b$, so ist die erste Curve imaginär, die zweite ist eine Hyperbel, die ganz im Innern des Hyperboloids liegt, die letzte eine ganz ausserhalb der Fläche gelegene Ellipse. Der Ort der Spitzen der einem einschaligen Hyperboloide umschriebenen Rotationskegel wird von der realen Focalellipse und der realen Focalhyperbel gebildet.

C. Für das zweischalige Hyperboloid ist $\alpha = 1 : a^2$, $\beta = -1 : b^2$, $\gamma = -1 : c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind

$$\frac{y^2}{b^2 + a^2} + \frac{z^2}{c^2 + a^2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Die erste Curve ist imaginär; ist $b > c$, so ist die zweite eine Ellipse, die dritte eine Hyperbel, die ganz im Innern des Hyperboloids liegt. Der Ort der Spitzen der einem zweischaligen Hyperboloide umschriebenen Rotationskegel ist die reale Focalellipse; dieselbe liegt auf dem Hauptschnitte, der die kleinere Nebenachse enthält. Die Schnittpunkte dieser Focalellipse und der Fläche sind die Kreispunkte der letzteren.

14. Man kann eine Ellipse als Ellipsoid und eine Hyperbel als zweischaliges Hyperboloid mit verschwindend kleiner c-Achse betrachten, und findet somit: Die Spitzen der Rotationskegel, die eine gegebene Ellipse enthalten, liegen auf einer Hyperbel, deren Scheitel mit den Brennpunkten der Ellipse zusammenfallen, und deren Ebene normal zur Ebene der Ellipse ist. Die Spitzen der Rotationskegel, die eine gegebene Hyperbel enthalten, liegen auf einer Ellipse, deren Scheitel mit den Brennpunkten der Hyperbel zusammenfallen, und deren Ebene normal zur Ebene der Hyperbel ist.

15. Die Gleichungen der beiden Paraboloide haben die Form

$$f = \alpha x^2 + \beta y^2 - 2z = 0.$$

Hier ist $f_x' = \alpha x, \quad f_y' = \beta y, \quad f_z' = -1, \quad f_p' = -z,$

daher ist die Gleichung des von P_0 aus der Fläche umschriebenen Tangentenkegels

1. $$f_0(\alpha x^2 + \beta y^2 - 2z) - (\alpha x_0 x + \beta y_0 y - z + z_0)^2 = 0.$$

Hiernach ist

$$A = \alpha f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B = -\alpha\beta x_0 y_0, \quad C = \alpha x_0,$$
$$D = \beta f_0 - \beta^2 y_0^2, \quad E = \beta y_0, \quad F = -1;$$
$$A - \frac{BC}{E} = \alpha f_0, \quad D - \frac{BE}{C} = \beta f_0, \quad F - \frac{CE}{B} = 0.$$

Lösungen des Problems erhalten wir daher nur, wenn zwei von den Grössen B, C und E verschwinden. Ist $B = C = 0$, so folgt $x_0 = 0$. Die Proportion $(D - A) : E = E : (F - A)$ ergiebt alsdann

$$[(\beta - \alpha)f_0 - \beta^2 y_0^2][1 + \alpha f_0] + \beta^2 y_0^2 = 0.$$

Rechnet man die linke Seite aus und unterdrückt den Faktor f_0, so erhält man

2. $$y_0^2 = 2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2\alpha}\right).$$

Die Voraussetzung $B = E = 0$ führt auf

3. $$y_0 = 0, \quad x_0^2 = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2\beta}\right).$$

Die Voraussetzung $C = E = 0$ führt auf $x_0 = y_0 = 0$, also ist auch $B = 0$; soll nun 1. Rotationskegel sein, so muss $A = D = F$ sein; diese Bedingung ist für keinen Punkt der Z-Achse erfüllbar.

Die Parabeln 2. und 3. werden als die Focalparabeln des Paraboloids $f = 0$ bezeichnet.

16. Für ein elliptisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = 1 : b$; folglich sind die Focalparabeln

$$y^2 = 2(b - a)(z - \tfrac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a - b)(z - \tfrac{1}{2}b).$$

Wie man sieht, geht jede dieser Parabeln durch den Brennpunkt des auf der Ebene der andern liegenden Hauptschnitts des Paraboloids; der Scheitel jeder dieser Parabeln ist der Brennpunkt der anderen. Ist $a > b$, so liegt die zweite Parabel ganz auf der concaven Seite des Paraboloids, während die erste das Paraboloid in zwei realen Punkten schneidet. Dies ergiebt: Der Ort der Spitzen der einem elliptischen Paraboloide umschriebenen realen Rotationskegel ist der auf der convexen Seite liegende Theil der Focalparabel, die auf der Ebene des Hauptschnitts liegt, der den kleinsten Parameter hat.

Für ein hyperbolisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = -1 : b$; folglich sind die Focalparabeln

$$y^2 = -2(a + b)(z - \tfrac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a + b)(z + \tfrac{1}{2}b).$$

Jede der beiden Parabeln geht durch den Brennpunkt der andern, und ihre Scheitel sind die Brennpunkte des in der Ebene der andern Focalparabel liegenden Hauptschnitts; keine der beiden Curven schneidet das Paraboloid. Wir erhalten daher: Es giebt zwei Systeme Rotationskegel, die einem hyperbolischen Paraboloide umschrieben sind; die Spitzen des einen Systems liegen auf der einen, die des andern auf der andern Focalparabel.

17. Eine Parabel kann man als ein elliptisches Paraboloid ansehen, für welches $b = 0$ ist. Die Rotationskegel, die eine gegebene Parabel enthalten, haben daher ihre Spitzen auf einer congruenten Parabel, deren Ebene normal zur Ebene der gegebenen Parabel ist, und die zum Scheitel den Brennpunkt derselben und den Scheitel der gegebenen Parabel zum Brennpunkte hat.

18. Für die Lage der Achsen der einer Fläche II. O. umschriebenen Rotationskegel ergiebt sich noch ein bemerkenswerther Satz.

Bei centralen Rotationsflächen besteht unter der Annahme $C = E = 0$ für die Stellungswinkel der Symmetrieebenen, welche durch die Rotationsachse gehen, die Gleichung (§ 7 No. 13)

1. $$(A - F)\cos\alpha + B\cos\beta = 0;$$

ferner ist

2. $$(A - F) : B = B : (D - F).$$

Nun ist für einen der Fläche $f = 0$ umgeschriebenen Rotationskegel unter der gemachten Voraussetzung, und wenn f central ist (No. 12, 2)

$$A - F = (\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B = -\alpha\beta x_0 y_0, \quad z_0 = 0.$$

Aus der Proportion 2. und der von P_0 erfüllten Gleichung des auf der XY-Ebene liegenden Focalkegelschnitts No. 12, 7 folgt

$$(\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2 = \frac{\beta^2(\alpha - \gamma)}{\beta - \gamma} \cdot y_0^2;$$

daher erhält man aus 1.

$$\frac{\beta}{\beta-\gamma}\cdot y_0\cdot cos\,\alpha - \frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\,x_0\cdot cos\beta = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass alle ihr genügenden Symmetrieebenen zu der Ebene normal sind, für deren Stellungswinkel φ, ψ, χ

$$cos\varphi : cos\psi = \frac{\beta y_0}{\beta-\gamma} : -\frac{\alpha x_0}{\alpha-\gamma},\quad cos\chi = 0.$$

Die Gerade, welche durch x_0, y_0 geht und diese Winkel φ, ψ, χ mit den Achsen bildet, ist daher die Rotationsachse.

Die Gleichung der Tangente des Focalkegelschnitts

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma-\alpha}x^2 + \frac{\gamma\beta}{\gamma-\beta}y^2 - 1 = 0$$

im Punkte x_0, y_0 ist

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot x_0 x + \frac{\gamma\beta}{\gamma-\beta}\cdot y_0 y - 1 = 0.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1 welche diese Tangente mit den positiven Seiten der X- und der Y-Achse bildet, ergeben sich daher aus

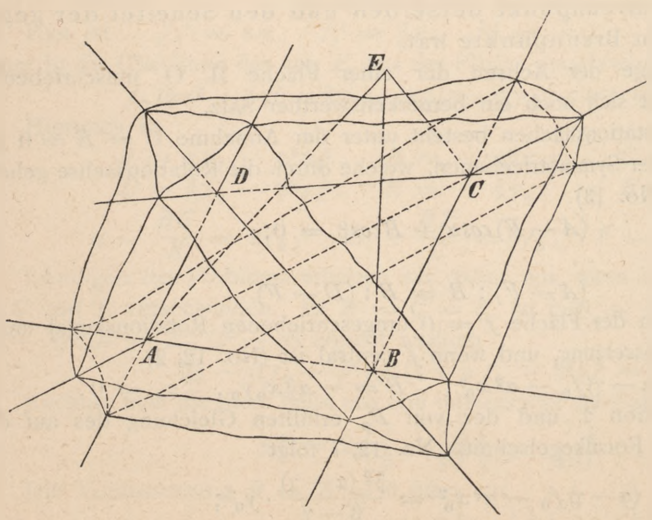
$$cos\varphi_1 : cos\psi_1 = \frac{\beta}{\beta-\gamma}y_0 : -\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}x_0.$$

Daher findet man $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$. Aehnliche Schlüsse ergeben sich auch für die Rotationsachsen der den Paraboloiden umgeschriebenen Kegel. Man erhält daher den Satz: Jede Tangente eines Focalkegelschnitts ist die Achse des Rotationskegels, dessen Spitze in dem Berührungspunkte der Tangente liegt.

§ 11. Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene. Gleichung der Ebene und des Punktes.

1. Bevor wir homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene einführen, haben wir einige Bemerkungen über Tetraedersummen vorauszuschicken, die sich an die Erörterungen über das Vorzeichen von Tetraedern anschliessen, die wir in § 3, No. 7 mitgetheilt haben.

Vier Ebenen, die keinen gemeinsamen Punkt haben, theilen den Raum in 15 getrennte Gebiete; eins derselben, nämlich das von den vier Ebenen eingeschlossene Tetraeder $ABCD$ ist von endlicher Grösse, die übrigen sind unendlich gross; vier Gebiete sind dreiseitige Ecken, nämlich die Gegenecken der Tetraederecken; vier sind die von je drei dreiseitigen Ecken gebildeten Raumfiguren, die von je einer der dreiseitigen Ecken



(M. 456.)

des Tetraeders übrig bleiben, wenn man von derselben das Tetraeder abschneidet; sechs sind keilförmige, von je zwei dreiseitigen Ecken gebildete an den Kanten des Tetraeders aussen anliegende Figuren.

Liegt ein fünfter Punkt auf keiner der Ebenen des Tetraeders, so kann er zunächst im Innern des Tetraeders oder an einer der an den Tetraederecken aussen anliegenden dreiseitigen Ecken liegen; in jedem Falle liegt dann einer der fünf Punkte $ABCDE$ im Innern des von den vier andern bestimmten Tetraeders. Denn nimmt man z. B. E im Innern der an A gelegenen Ecke an, so liegt A im Innern des Tetraeders $BCDE$. Befindet sich hingegen E in einem der vier dreieckigen, an den Tetraederflächen oder in einem der sechs zweieckigen, an den Tetraederkanten aussen anliegenden Gebiete, so liegt immer einer der fünf Punkte in dem an einem Dreiecke des von den vier andern bestimmten Tetraeders aussen anliegenden Raumtheile; denn ist E z. B. in dem an DC liegenden keilförmigen Gebiete, so liegt offenbar D in Bezug auf das Tetraeder $ABCE$ in dem an EAB aussen anliegenden Gebiete.

Wir beweisen nun folgenden Satz: Für je fünf Punkte A, B, C, D, E des Raumes ist

1. $$EABC - EBCD + ECDA - EDAB = DABC,$$

oder, in anderer Anordnung

2. $$ABCD + BCDE + CDEA + DEAB + EABC = 0.$$

Nimmt man zunächst an, einer von den fünf Punkten liege im Innern des Tetraeders der vier andern, und bezeichnet diesen mit E, die andern mit A, B, C, D, so ist ersichtlich, dass die vier Dreiecke

$$ABC,\quad BAD,\quad CBD,\quad CDA$$

von E aus gesehen in gleicher Drehrichtung erscheinen, und zwar in derselben, wie ABC von D aus. Daher haben die fünf Tetraeder

$$EABC,\quad EBAD,\quad ECBD,\quad ECDA,\quad DABC$$

gleiche Vorzeichen.

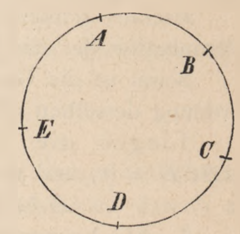
Nun ist, abgesehen noch vom Vorzeichen, die Summe der vier Tetraeder, welche die Seiten eines Tetraeders $ABCD$ zu Basen und einen Punkt im Innern desselben zur gemeinsamen Spitze haben, gleich dem Tetraeder $ABCD$; man hat daher die nun auch in Bezug auf die Vorzeichen genaue Gleichung

3. $EABC + EBAD + ECBD + ECDA = DABC.$

Da nun $EBAD$ und $EDAB$, sowie $ECBD$ und $EBCD$ Permutationen ungleicher Klasse sind, so ist

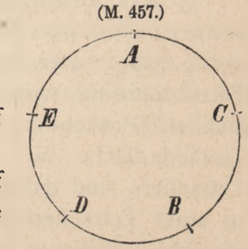
$$EBAD = -EDAB,\quad ECBD = -EBCD;$$

indem man dies in 3. einführt, erhält man 1. und durch geeignete Permutationen hieraus 2.



(M. 457.)

Um die richtige Aufeinanderfolge der Buchstaben in 2. sicher und leicht zu treffen, kann man die fünf Buchstaben in der Reihenfolge $ABCDE$ hinter einander an die Peripherie eines Kreises schreiben.



(M. 458.)

Man hat nun, von jedem der fünf Punkte anfangend, und immer in derselben Richtung fortschreitend, je vier auf einander folgende Punkte aufzuschreiben.

Vertauscht man irgend zwei benachbarte der fünf Buchstaben, z. B. B und C, so erhält man die beistehende Hülfsfigur, und daher für die Summe 2. die Tetraeder

$$ACBD,\quad CBDE,\quad BDEA,\quad DEAC,\quad EACB.$$

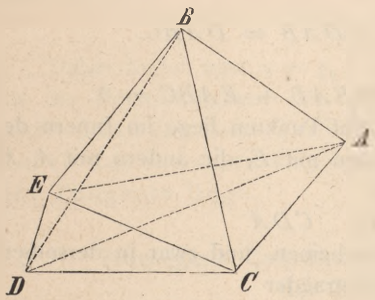
Da nun $ACBD = -ABCD$, $CBDE = -BCDE$,
$BDEA = -DEAB$, $DEAC = -CDEA$, $EACB = -EABC$,
so folgt aus 2., dass auch

$$ABCD + CBDA + BDCA + DEAC + EACB = 0\,.$$

Durch fortgesetzte Vertauschung zweier benachbarter Elemente kann aus $ABCDE$ jede Permutation dieser fünf Buchstaben abgeleitet werden. Wenn daher einer der fünf Punkte A, B, C, D, E im Tetraeder der vier andern liegt, so gilt die Gleichung 2., gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die fünf Punkte mit den Buchstaben A, B, C, D, E bezeichnet hat.

Es bleibt nun noch übrig, den Beweis für den Fall zu führen, dass keiner der fünf Punkte im Tetraeder der vier andern liegt.

Bezeichnet man zunächst den Punkt mit E, der in Bezug auf das Tetraeder der vier andern $ABCD$ in dem an einer Seite anliegenden dreieckigen Gebiete liegt, und mit BCD diese Seite, so dass also E und A auf verschiedenen Seiten von BCD liegen und EA die Ebene BCD in einem im Innern des Dreiecks BCD gelegnen Punkte schneidet, so werden die Dreiecke ABC, BCD, CDA, DBA, von E aus unter derselben Drehrichtung gesehen, und zwar unter der entgegengesetzten Drehrichtung, wie BCD vom Punkte A aus. Daher haben die Tetraeder $EABC$, $EBCD$, $ECDA$, $EDBA$, $ACBD$ dasselbe Zeichen.



(M. 459.)

Nun giebt rücksichtlich der absoluten Werthe die Summe der Tetraeder, welche die in an A liegenden Seiten des Tetraeders zu Basen und E zur gemeinsamen Spitze haben, vermindert um das Tetraeder, welches E zur Spitze und die A gegenüberliegende Seite zur Basis hat, das Tetraeder der vier Punkte A, B, C, D. Daher gilt auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

4. $$EABC + EDBA + ECDA - EBCD = ACBD\,.$$

Da nun $ACBD = -ABCD$, $EBCD = -BCDE$, $ECDA = CDEA$, $EDBA = DEAB$, so folgt aus 4. die Gleichung 2.

Hieraus schliesst man wie im vorigen Falle, dass die Gleichung 2. für jede Permutation der fünf Punkte A, B, C, D, E gilt.

Somit ist die Gleichung 2. für jede Lage der fünf Punkte und für jede Anordnung derselben gültig.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so ist $ABCD = 0$, und man erhält daher aus 1.

5. $$EABC - EBCD + ECDA - EDAB = 0\,.$$

2. Als homogene Coordinaten des Punktes P verwenden wir die senkrechten Abstände des Punktes von den Ebenen eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Der Abstand des Punktes P von der A_i gegenüberliegenden Tetraederfläche wird mit x_i bezeichnet, und x_i wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem P und A_i auf derselben Seite der A_i gegenüberliegenden Tetraederfläche sich befinden oder nicht. Für einen Punkt im Innern des Tetraeders sind daher alle vier Coordinaten positiv. Für einen Punkt in einem an einer Tetraederfläche aussen anliegenden Gebiete ist die auf dieser Fläche normale Coordinate negativ, die andern sind positiv. Für einen Punkt in einem an einer Kante aussen anliegenden Gebiete sind die Coordinaten negativ, die normal zu den diese Kante enthaltenden Tetraederebenen sind, die andern beiden positiv. Für einen in einer Gegenecke einer Tetraederecke gelegenen Punkt sind die drei Coordinaten negativ, die auf den Seiten dieser Ecke normal sind, die vierte Coordinate ist positiv. Für keinen Punkt des Raumes sind alle vier Coordinaten negativ.

Bezeichnet man die Höhen des Achsentetraeders $A_1A_2A_3A_4$ mit h_1, h_2, h_3, h_4, und zwar mit h_i die von A_i auf die gegenüberliegende Fläche gefällte Normale, so sind die Coordinaten

$$\begin{array}{lcccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \text{von } A_1: & h_1 & 0 & 0 & 0\,, \\ \text{,,}\ \ A_2: & 0 & h_2 & 0 & 0\,, \\ \text{,,}\ \ A_3: & 0 & 0 & h_3 & 0\,, \\ \text{,,}\ \ A_4: & 0 & 0 & 0 & h_4\,. \end{array}$$

Für jeden Punkt einer Tetraederkante sind zwei Coordinaten Null; z. B. für jeden auf A_1A_2 gelegenen Punkt ist $x_3 = x_4 = 0$. Für jeden Punkt einer Tetraederfläche ist eine Coordinate gleich Null; z. B. für die auf $A_1A_2A_3$ liegenden Punkte ist $x_4 = 0$.

3. Für jede Lage des Punktes P gilt die Gleichung (No. 1, 1)

$$PA_2A_3A_4 - PA_3A_4A_1 + PA_4A_1A_2 - PA_1A_2A_3 = A_1A_2A_3A_4\,.$$

Hieraus folgt

1. $$\frac{PA_2A_3A_4}{A_1A_2A_3A_4} + \frac{PA_3A_4A_1}{A_2A_3A_4A_1} + \frac{PA_4A_1A_2}{A_3A_4A_1A_2} + \frac{PA_1A_2A_3}{A_4A_1A_2A_3} = 1\,.$$

Das Verhältniss der Tetraeder $PA_kA_lA_m : A_iA_kA_lA_m$ ist numerisch gleich dem Verhältniss der von P und A_i auf die Ebene $A_iA_kA_l$ gefällten Normalen, also dem absoluten Werthe nach gleich dem Verhältnisse $x_i : h_i$.

Liegen nun P und A_i auf derselben Seite von $A_kA_lA_m$, so ist sowol $PA_kA_lA_m : A_iA_kA_lA_m$ als auch $x_i : h_i$ positiv; und liegen P und A_i auf verschiedenen Seiten von $A_kA_lA_m$, so sind beide Verhältnisse negativ. Es gilt also auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

2. $$PA_kA_lA_m : A_iA_kA_lA_m = x_i : h_i\,.$$

Hiernach folgt aus 1.

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1\,.$$

Die vier homogenen Coordinaten eines Punktes genügen also der Gleichung

3. $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1\,.$$

Umgekehrt schliesst man leicht: Wenn vier Strecken dieser Gleichung genügen so sind sie die homogenen Coordinaten eines durch sie eindeutig bestimmten Punktes.

4. Als homogene Coordinaten einer Ebene T verwenden wir die Quotienten aus den Abständen der Ebene T von den Eckpunkten des Achsendreiecks und dem Abstande von einem beliebig gewählten festen Punkte C. Sind die Abstände der Ebene T von A_i und von C bez. v_i und ρ, so sind die Coordinaten von T die Zahlen

$$u_1 = \frac{v_1}{\rho}\,, \quad u_2 = \frac{v_2}{\rho}\,, \quad u_3 = \frac{v_3}{\rho}\,, \quad u_4 = \frac{v_4}{\rho}\,.$$

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Spuren von T auf den Geraden A_1C, A_2C, A_3C, A_4C, so sind daher die Coordinaten von T den Verhältnissen gleich

$$u_1 = \frac{A_1 S_1}{CS_1}, \quad u_2 = \frac{A_2 S_2}{CS_2}, \quad u_3 = \frac{A_3 S_3}{CS_3}, \quad u_4 = \frac{A_4 S_4}{CS_4}.$$

Sind ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 die homogenen Coordinaten von C, und bezeichnet G_i die dem Eckpunkte A_i gegenüberliegende Tetraëderfläche, so sind die Coordinaten

	u_1	u_2	u_3	u_4
von G_1:	$h_1 : \rho_1$,	0,	0,	0,
„ G_2:	0,	$h_2 : \rho_2$,	0,	0,
„ G_3:	0,	0,	$h_3 : \rho_3$,	0,
„ G_4:	0,	0,	0,	$h_4 : \rho_4$.

Für jede durch eine Ecke A_i des Achsentetraëders gehende Ebene ist eine Coordinate u_i gleich Null; für jede durch eine Kante $A_i A_k$ gehende Ebene sind zwei Coordinaten u_i und u_k gleich Null.

5. Wenn drei Gerade α, β, γ durch einen Punkt O gehen und von zwei Ebenen T_1 und T_2 der Reihe nach in den Punkten A_1, B_1, C_1, bez. A_2, B_2, C_2 geschnitten werden, so gilt auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

1. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} = \frac{OA_1}{OA_2} \cdot \frac{OB_1}{OB_2} \cdot \frac{OC_1}{OC_2}.$$

In der analytischen Planimetrie ist bewiesen worden, dass

2. $$\frac{OA_1B_1}{OA_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} \cdot \frac{OB_1}{OB_2}.$$

Nun ist dem absoluten Werthe nach das Verhältniss $OC_1 : OC_2$ dem Verhältnisse der Abstände der Punkte C_1 und C_2 von den Ebenen OA_1B_1 und OA_2B_2 gleich. Folglich ist zunächst für die absoluten Werthe

3. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} = \frac{OA_1B_1}{OA_2B_2} \cdot \frac{OC_1}{OC_2}.$$

Liegen nun C_1 und C_2 auf derselben Seite von O, so ist das Verhältniss $OC_1 : OC_2$ positiv, und die Verhältnisse

4. $$\frac{OA_1B_1C_1}{OA_2B_2C_2} \quad \text{und} \quad \frac{OA_1B_1}{OA_2B_2}$$

haben dasselbe Vorzeichen. Werden hingegen C_1 und C_2 durch O getrennt, so ist das Verhältniss OC_1 und OC_2 negativ, und die Verhältnisse 4. haben ungleiche Vorzeichen; daher gilt die Gleichung 3. auch rücksichtlich der Vorzeichen. Berücksichtigt man nun die Gleichung 2., so erhält man aus 3. die behauptete Gleichung 1.

6. Aus der Gleichung No. 1, 5 folgt

1. $$CS_1S_2S_3 - CS_2S_3S_4 + CS_3S_4S_1 - CS_4S_1S_2 = 0.$$

Nach No. 5 hat man

$$CS_iS_kS_l = CA_iA_kA_l \cdot \frac{CS_i \cdot CS_k \cdot CS_l}{CA_i \cdot CA_k \cdot CA_l}.$$

Setzt man dies in 1. ein, so erhält man

$$CA_1A_2A_3 \cdot \frac{CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3}{CA_1 \cdot CA_2 \cdot CA_3} - CA_2A_3A_4 \cdot \frac{CS_2 \cdot CS_3 \cdot CS_4}{CA_2 \cdot CA_3 \cdot CA_4}$$
$$+ CA_3A_4A_1 \cdot \frac{CS_3 \cdot CS_4 \cdot CS_1}{CA_3 \cdot CA_4 \cdot CA_1} - CA_4A_1A_2 \cdot \frac{CS_4 \cdot CS_1 \cdot CS_2}{CA_4 \cdot CA_1 \cdot CA_2} = 0.$$

Multiplicirt man alle Glieder dieser Gleichung mit

$$\frac{CA_1 \cdot CA_2 \cdot CA_3 \cdot CA_4}{CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3 \cdot CS_4},$$

so erhält man die einfachere Gleichung

2. $$CA_1A_2A_3 \cdot \frac{CA_4}{CS_4} - CA_2A_3A_4 \cdot \frac{CA_1}{CS_1} + CA_3A_4A_1 \cdot \frac{CA_2}{CS_2} - CA_4A_1A_2 \cdot \frac{CA_3}{CS_3} = 0.$$

Nun ist $\dfrac{CA_i}{CS_i} = \dfrac{CS_i - A_iS_i}{CS_i} = 1 - \dfrac{A_iS_i}{CS_i} = 1 - u_i$, daher erhält man aus 2.

$$CA_1A_2A_3(1-u_4) - CA_2A_3A_4(1-u_1) + CA_3A_4A_1(1-u_2) - CA_4A_1A_2(1-u_3) = 0.$$

Löst man die Klammern auf und berücksichtigt, dass nach No. 1, 1

$$CA_1A_2A_3 - CA_2A_3A_4 + CA_3A_4A_1 - CA_4A_1A_2 = A_4A_1A_2A_3,$$

so erhält man zunächst

$$CA_1A_2A_3 \cdot u_4 - CA_2A_3A_4 \cdot u_1 + CA_3A_4A_1 \cdot u_2 - CA_4A_1A_2 \cdot u_3 = A_1A_2A_3A_4.$$

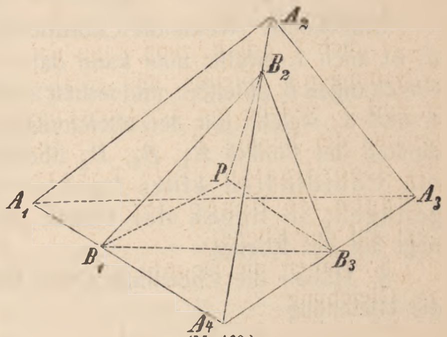
Da nun (No. 3, 2) $CA_kA_lA_m : A_iA_kA_lA_m = \rho_i : h_i$, so folgt schliesslich

$$\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 + \frac{\rho_4}{h_4} u_4 = 1.$$

Wir haben daher den Satz: Die vier homogenen Coordinaten jeder Ebene T erfüllen die Gleichung

3. $$\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 + \frac{\rho_4}{h_4} u_4 = 1.$$

Umgekehrt schliesst man: Wenn vier Zahlen u_1, u_2, u_3, u_4 dieser Gleichung genügen, so sind sie die Coordinaten einer eindeutig bestimmten Ebene.



(M. 460.)

7. Sind B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte einer Ebene T mit den Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 des Coordinatentetraëders, und theilt ein Punkt P der Ebene T das Dreieck $B_1B_2B_3$ im Verhältnisse $n_1 : n_2 : n_3$, sind ferner ξ_{1m}, ξ_{2m}, ξ_{3m}, ξ_{4m} die Coordinaten von B_m, so sind die Coordinaten von P (§ 2, No. 28)

1. $$x_k = \frac{n_1 \xi_{k1} + n_2 \xi_{k2} + n_3 \xi_{k3}}{n_1 + n_2 + n_3}; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Nun gilt für die Coordinaten von B_m, wenn k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3 ist

2. $$\xi_{km} = \xi_{lm} = 0, \quad \xi_{4m} : h_4 = A_mB_m : A_mA_4, \quad \xi_{mm} : h_m = A_4B_m : A_4A_m.$$

Da nun $B_mA_m : B_mA_4 = v_m : v_4 = u_m : u_4$, so ist

$$A_mB_m : A_mA_4 = A_mB_m : (A_mB_m + B_mA_4) = 1 : \left(1 - \frac{u_4}{u_m}\right),$$

$$A_4B_m : A_4A_m = A_4B_m : (A_4B_m + B_mA_m) = 1 : \left(1 - \frac{u_m}{u_4}\right).$$

Daher gewinnt man aus 2.

$$\xi_{4m} = \frac{u_m}{u_m - u_4} \cdot h_4, \quad \xi_{mm} = \frac{u_4}{u_4 - u_m} \cdot h_m.$$

Folglich sind die Coordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3

$$\xi_{11} = \frac{u_4}{u_4 - u_1} h_1, \quad \xi_{21} = 0, \quad \xi_{31} = 0, \quad \xi_{41} = \frac{u_1}{u_1 - u_4} h_4;$$

3. $$\xi_{12} = 0, \quad \xi_{22} = \frac{u_4}{u_4 - u_2} h_2, \quad \xi_{32} = 0, \quad \xi_{42} = \frac{u_2}{u_2 - u_4} h_4;$$

$$\xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0, \quad \xi_{33} = \frac{u_4}{u_4 - u_3} h_3, \quad \xi_{43} = \frac{u_3}{u_3 - u_4} h_4.$$

Führt man diese Werthe in die vier Formeln 1. ein, so erhält man für die Coordinaten von P, wenn man $n_1 + n_2 + n_3 = n$ setzt

4. $x_1 = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{u_4}{u_4 - u_1} \cdot h_1, \quad x_2 = \frac{n_2}{n} \cdot \frac{u_4}{u_4 - u_2} \cdot h_2, \quad x_3 = \frac{n_3}{n} \cdot \frac{u_4}{u_4 - u_3} \cdot h_3,$

5. $-x_4 = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{u_1}{u_4 - u_1} \cdot h_4 + \frac{n_2}{n} \cdot \frac{u_2}{u_4 - u_2} \cdot h_4 + \frac{n_3}{n} \cdot \frac{u_3}{u_4 - u_3} \cdot h_4 .$

Aus 4. folgt

6. $\frac{n_1}{n} \cdot \frac{1}{u_4 - u_1} = \frac{x_1}{h_1 u_4}, \quad \frac{n_2}{n} \cdot \frac{1}{u_4 - u_2} = \frac{x_2}{h_2 u_4}, \quad \frac{n_3}{n} \cdot \frac{1}{u_4 - u_3} = \frac{x_3}{h_3 u_4};$

setzt man diese Werthe in 5. ein, so erhält man zunächst

7. $$-\frac{x_4}{h_4} = \frac{u_1 x_1}{u_4 h_1} + \frac{u_2 x_2}{u_4 h_2} + \frac{u_3 x_3}{u_4 h_3}.$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 + \frac{1}{h_4} u_4 x_4 = 0 .$$

Wenn also der Punkt P auf der Ebene T liegt, so erfüllen die Coordinaten des Punktes P und der Ebene T die für beide Reihen von Coordinaten lineare Gleichung

8. $$\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_3} u_3 x_3 + \frac{1}{h_4} u_4 x_4 = 0 .$$

Umgekehrt: Wenn die Coordinaten von P und T dieser Gleichung genügen, so ist auch 7. erfüllt; man kann daher drei Zahlen $n_1 : n$, $n_2 : n$, $n_3 : n$ aus den Gleichungen 6. ableiten, und erhält somit für die Coordinaten von P die Formeln 4. und 5., welche mit den Gleichungen 1. für die angegebenen Werthe der Coordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3 übereinstimmen; hieraus schliesst man: *Wenn die Coordinaten eines Punktes und einer Ebene der Gleichung 8. genügen, so liegen der Punkt und die Ebene vereint* (d. i. der Punkt liegt auf der Ebene).

8. Haben die Coordinaten der Ebene T gegebene Werthe $u_i = a_i$, so ist die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} a_1 x_1 + \frac{1}{h_2} a_2 x_2 + \frac{1}{h_3} a_3 x_3 + \frac{1}{h_4} a_4 x_4 = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, welche auf der Ebene T liegen, ist also *die Gleichung dieser Ebene* in Punktcoordinaten; haben hingegen die Coordinaten des Punktes P gegebene Werthe $x_i = \alpha_i$, so ist

$$\frac{1}{h_1} \alpha_1 u_1 + \frac{1}{h_2} \alpha_2 u_2 + \frac{1}{h_3} \alpha_3 u_3 + \frac{1}{h_4} \alpha_4 u_4 = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Ebenen, welche durch P gehen, ist also *die Gleichung dieses Punktes* in Ebenencoordinaten.

Jede homogene lineare Gleichung in Punktcoordinaten ist die Gleichung einer durch die Verhältnisse der Coefficienten eindeutig bestimmten Ebene. Sind a_1, a_2, a_3, a_4 beliebige Zahlen, so ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

die Gleichung der Ebene, deren Coordinaten der Proportion genügen

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = h_1 a_1 : h_2 a_2 : h_3 a_3 : h_4 a_4 ,$$

also die Werthe haben

$$u_1 = k a_1 h_1 , \quad u_2 = k a_2 h_2 , \quad u_3 = k a_3 h_3 , \quad u_4 = k a_4 h_4 ,$$
$$\text{wobei } k = 1 : (\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3 + \rho_4 a_4) .$$

Jede homogene lineare Gleichung in Ebenencoordinaten ist die

Gleichung eines durch die Verhältnisse der Coefficienten eindeutig bestimmten Punktes. Sind α_1, α_2, α_3, α_4 beliebige Zahlen, so ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung des Punktes, dessen Coordinaten sich aus der Proportion ergeben

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = h_1 \alpha_1 : h_2 \alpha_2 : h_3 \alpha_3 : h_4 \alpha_4 ;$$

also hat man

$$x_1 = k \alpha_1 h_1 , \quad x_2 = k \alpha_2 h_2 , \quad x_3 = k \alpha_3 h_3 , \quad x_4 = k \alpha_4 h_4 ,$$
$$\text{wobei } k = 1 : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) .$$

9. Die homogene lineare Gleichung

1. $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 0$$

ist die Gleichung einer Ebene, deren Coordinaten nach No. 8 die Werthe haben $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$. Diese Ebene theilt die Strecken $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$, $A_4 C$ aussen im Verhältniss 1., ist also *unendlich fern*.

Wenn in der homogenen linearen Gleichung in Punktcoordinaten

2. $$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Summe der Coefficienten verschwindet

3. $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

so wird der Gleichung durch die Werthe genügt

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1 ,$$

der Punkt P liegt daher auf der unendlich fernen Ebene und ist somit selbst *unendlich fern*.

10. *Die Gleichung der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene* erhält man durch Elimination der Constanten a_1, a_2, a_3, a_4 aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0 , \\
a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + a_3 x_{31} + a_4 x_{41} &= 0 , \\
a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + a_3 x_{32} + a_4 x_{42} &= 0 , \\
a_0 x_{13} + a_2 x_{23} + a_3 x_{33} + a_4 x_{43} &= 0 ,
\end{aligned}$$

wenn mit x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i} die Coordinaten des Punktes P_i bezeichnet werden. Aus desen vier Gleichungen ergiebt sich die gesuchte Gleichung in Determinantenform

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Gleichung des den Ebenen T_1, T_2, T_3 gemeinsamen Punktes P ergiebt sich durch Elimination der Coefficienten aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 &= 0 , \\
\alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} + \alpha_4 u_{41} &= 0 , \\
\alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} + \alpha_4 u_{42} &= 0 , \\
\alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 u_{33} + \alpha_4 u_{43} &= 0 .
\end{aligned}$$

Man erhält

$$P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} \end{vmatrix} = 0 .$$

11. *Die Coordinaten des Schnittpunkts der Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$* sind die Lösungen des Systems

$$T_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0,$$
$$T_3 \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x + c_4 x_4 = 0,$$
$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Die Coordinaten der Ebene, welche durch die Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ bestimmt ist, ergeben sich aus dem Systeme

$$P_1 \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0,$$
$$P_2 \equiv \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 = 0,$$
$$P_3 \equiv \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \gamma_4 u_4 = 0,$$
$$\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 + \frac{\rho_4}{h_4} u_4 = 1.$$

12. Der Abstand eines Punktes P von der Ebene T kann aus den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes und der Gleichung der Ebene

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

in folgender Weise bestimmt werden:

Der Punkt Π, in welchem die Ebene T von der Geraden PA_4 geschnitten wird, theile die Strecke PA_4 im Verhältnisse $n_2 : n_1$; aus den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes P und 0, 0, 0, h_4 des Punktes A_4 ergeben sich hiernach die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 von Π zu

$$\xi_1 = \frac{n_1 x_1}{n_1 + n_2}, \quad \xi_2 = \frac{n_1 x_2}{n_1 + n_2}, \quad \xi_3 = \frac{n_1 x_3}{n_1 + n_2}, \quad \xi_4 = \frac{n_1 x_4 + n_2 h_4}{n_1 + n_2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Ebene ein, so erhält man

$$n_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) + n_2 a_4 h_4 = 0,$$

daher folgt

1. $$n_2 : n_1 = - T : a_4 h_4.$$

Das Verhältniss der Abstände der Punkte P und A_4 von der Ebene T stimmt numerisch mit dem Verhältnisse überein, in welchem die Strecke PA_4 von Π getheilt wird; geben wir den Abständen zweier Punkte von einer Ebene gleiche oder ungleiche Vorzeichen, je nachdem die Punkte auf derselben Seite der Ebene liegen oder nicht, so haben die beiden Verhältnisse ungleiche Vorzeichen. Bezeichnet daher p den Abstand des Punktes P von der Ebene T, so ist

2. $$p : v_4 = - n_2 : n_1,$$

daher folgt aus 1.

3. $$p : v_4 = T : a_4 h_4.$$

Nun ist $v_4 = u_4 \rho$ und (No. 8.) $a_4 h_4 = (\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3 + \rho_4 a_4) \cdot u_4$.

Wird der Werth, welchen die Function T annimmt, wenn man darin die x_k durch die Coordinaten ρ_k des Punktes C ersetzt, mit τ bezeichnet, so erhät man aus 2.

4. $$p = \frac{\rho}{\tau} \cdot T.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene $T = 0$ ist dem Werthe proportional, den die Funtion T für die Coordinaten des Punktes P annimmt.

13. Um den Faktor $\rho : \tau$ zu bestimmen, mit dem man die Function T multipliciren muss, damit man den Abstand des Punktes P von $T = 0$ erhält, entwickeln wir zunächst die Gleichung, durch welche die Abstinde v_1, v_2, v_3, v_4 der Ecken eines Tetraeders von einer Ebene mit einander verbunden werden.

Es seien α_i, β_i, γ_i die Stellungswinkel der dem Eckpunkte A_i gegenüberliegenden Tetraëderebene in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Nullpunkt im Innern des Tetraëders liegt, α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene T und d ihr Abstand vom Nullpunkte, also die Gleichung von T in Normalform

$$T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0;$$

ferner seien x_i, y_i, z_i die Coordinaten von A_i; alsdann ist

$$\cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot y_1 + \cos\gamma \cdot z_1 - d = - v_1,$$
$$\cos\alpha \cdot x_2 + \cos\beta \cdot y_2 + \cos\gamma \cdot z_2 - d = - v_2,$$
$$\cos\alpha \cdot x_3 + \cos\beta \cdot y_3 + \cos\gamma \cdot z_3 - d = - v_3,$$
$$\cos\alpha \cdot x_4 + \cos\beta \cdot y_4 + \cos\gamma \cdot z_4 - d = - v_4.$$

Löst man dieses System linearer Gleichungen zunächst in Bezug auf $\cos\alpha$ auf, so erhält man

2. $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cos\alpha = - \begin{vmatrix} v_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ v_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ v_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ v_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{vmatrix} = 2 A_i A_k A_l \cos\alpha_m,$$

wenn i, k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3, 4 ist; ferner ist der Faktor von $\cos\alpha$ dem sechsfachen Tetraëdervolumen entgegengesetzt gleich (§ 3, 7). Daher hat man aus 2.

$$- 3 \cdot A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot \cos\alpha = A_2 A_3 A_4 \cdot \cos\alpha_1 \cdot v_1 + A_4 A_3 A_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot v_2$$
$$+ A_1 A_2 A_4 \cdot \cos\alpha_3 \cdot v_3 + A_1 A_3 A_2 \cdot \cos\alpha_4 \cdot v_4.$$

Dividirt man durch 3. $A_1 A_2 A_3 A_4$, so erhält man

3. $$\cos\alpha = \frac{v_1}{h_1} \cos\alpha_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\alpha_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\alpha_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\alpha_4.$$

Ebenso erhält man die beiden entsprechenden Gleichungen

4. $$\cos\beta = \frac{v_1}{h_1} \cos\beta_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\beta_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\beta_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\beta_4,$$

5. $$\cos\gamma = \frac{v_1}{h_1} \cos\gamma_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos\gamma_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos\gamma_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos\gamma_4.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie dann, und berücksichtigt, dass, wenn man mit ε_{ik} den Winkel der den Ecken A_i, A_k gegenüberliegenden Tetraëderflächen bezeichnet, die Gleichungen gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1,$$
$$\cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k = - \cos\varepsilon_{ik},$$

so erhält man schliesslich die gesuchte Gleichung:

6. $$\left(\frac{v_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{v_4}{h_4}\right)^2 - 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_2}{h^2} \cos\varepsilon_{12} - 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cdot \cos\varepsilon_{13}$$
$$- 2\frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cdot \cos\varepsilon_{14} - 2\frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cos\varepsilon_{23} - 2\frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cos\varepsilon_{24} - 2\frac{v_3}{h_3} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cdot \cos\varepsilon_{34} = 1.$$

14. Um nun in der Gleichung (No. 12, 4)

$$p = k \cdot T, \quad k = \rho : \tau,$$

den Faktor k als Function der Coefficienten von T und der Dimensionen des Tetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu bestimmen, setzen wir für den Punkt P nach einander die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Dadurch erhalten wir

$$v_1 = k\cdot a_1 h_1,\quad v_2 = k\cdot a_2 h_2,\quad v_3 = k\cdot a_3 h_3,\quad v_4 = k\cdot a_4 h_4 .$$

Führen wir diese Werthe in No. 13, 6 ein, so erhalten wir den gesuchten Werth k aus

$$k^2 = 1 : [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_2\cos\varepsilon_{12} - 2a_1a_3\cos\varepsilon_{13} - 2a_1a_4\cos\varepsilon_{14} - 2a_2a_3\cos\varepsilon_{23} - 2a_2a_4\cos\varepsilon_{24} - 2a_3a_4\cos\varepsilon_{34}].$$

Ueber das Vorzeichen von k kann so verfügt werden, dass für die auf einer bestimmten Seite von T gelegenen Punkte die Abstände positiv, mithin für die auf der andern Seite liegenden Punkte negativ ausfallen.

15. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Abstände eines Punktes von den Ebenen eines Tetraëders $B_1B_2B_3B_4$ und ist die Gleichung der B_i gegenüberliegenden Ebene T_i dieses Tetraëders

$$T_i \equiv a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 = 0;$$

ist ferner k_i der in voriger Nummer bestimmte Faktor für die Ebene T_i, und sein Vorzeichen so gewählt, dass der Punkt B_i einen positiven Abstand von der gegenüberliegenden Fläche hat, so ergeben sich die Coordinaten ξ_i von P in Bezug auf das Tetraëder $B_1B_2B_3B_4$ aus den Gleichungen:

1. $$\begin{aligned} \xi_1 &= k_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x3 + a_{41}x_4),\\ \xi_2 &= k_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4),\\ \xi_3 &= k_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4),\\ \xi_4 &= k_4(a_{14}x_1 + a_{24}x_4 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4). \end{aligned}$$

Werden die Determinante dieses Systems mit R und die zu $k_i\cdot a_{ij}$ gehörige Subdeterminante mit $\mathfrak{a}_{ij}$ bezeichnet, so erhält man hieraus

2. $$\begin{aligned} R\cdot x_1 &= \mathfrak{a}_{11}\xi_1 + \mathfrak{a}_{12}\xi_2 + \mathfrak{a}_{13}\xi_3 + \mathfrak{a}_{14}\xi_4,\\ R\cdot x_2 &= \mathfrak{a}_{21}\xi_1 + \mathfrak{a}_{22}\xi_2 + \mathfrak{a}_{23}\xi_3 + \mathfrak{a}_{24}\xi_4,\\ R\cdot x_3 &= \mathfrak{a}_{31}\xi_1 + \mathfrak{a}_{32}\xi_2 + \mathfrak{a}_{33}\xi_3 + \mathfrak{a}_{34}\xi_4,\\ R\cdot x_4 &= \mathfrak{a}_{41}\xi_1 + \mathfrak{a}_{42}\xi_2 + \mathfrak{a}_{43}\xi_3 + \mathfrak{a}_{44}\xi_4. \end{aligned}$$

Dies sind die Transformationsformeln in homogenen Punktcoordinaten zum Uebergange aus dem Systeme $A_1A_2A_3A_4$ zu dem neuen Systeme $B_1B_2B_3B_4$. Wie man sieht, erfolgt dieser Uebergang durch homogene lineare Substitutionen. Man überzeugt sich leicht, dass auch der Uebergang aus einem gewöhnlichen rechtwinkeligen Systeme in ein homogenes System durch homogene lineare Substitutionen erfolgt.

16. Aus der Gleichung eines Punktes

$$P \equiv \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 + \alpha_4u_4 = 0$$

und den Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 einer Ebene T kann man den Abstand der Ebene von P bestimmen. Denn die Gleichung der Ebene T ist

$$T \equiv \frac{u_1}{h_1}x_1 + \frac{u_2}{h_2}x_2 + \frac{u_3}{h_3}x_3 + \frac{u_4}{h_4}x_4 = 0,$$

und die Coordinaten von P sind (No. 8)

$$x_k = \frac{1}{\sigma}\alpha_k h_k,\quad \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 .$$

Der gesuchte Abstand p ist daher

1. $$p = \frac{r}{\sigma}\cdot(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 + \alpha_4u_4) = \frac{r}{\sigma}\cdot P,$$

wobei r den Werth des Coefficienten k (No. 14) bezeichnet, der entsteht, wenn man in k für a_1, a_2, a_3 die besonderen hier geltenden Werthe $u_1 : h_1$, $u_2 : h_2$, $u_3 : h_3$ einsetzt; man hat daher

$$r^2 = 1 : \left[\left(\frac{u_1}{h_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{u_4}{h_4}\right)^2 - 2\frac{u_1}{h_1}\cdot\frac{u_2}{h_2}\cos\varepsilon_{12} - \ldots - 2\frac{u_3}{h_3}\cdot\frac{u_4}{h_4}\cos\varepsilon_{34}\right].$$

Dividirt man diese Gleichung durch r^2 und vergleicht das Resultat mit No. 13, 6, so sieht man, dass r der Abstand des Punktes C von der Ebene T ist. Daher ist

2. $$u = \frac{p}{r} = \frac{1}{\sigma}P$$

die Coordinate von T in Bezug auf P, d. i. der Quotient aus den Abständen der Ebene T von P und von C.

17. Der soeben gefundene Werth für u führt auf die Transformationsformeln für Ebenencoordinaten.

Sind B_1, B_2, B_3, B_4 die Eckpunkte des neuen Coordinatentetraëders und ist die Gleichung von B_i

$$\alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \alpha_{3i}u_3 + \alpha_{4i}u_4 = 0,$$

und $$\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \alpha_{3i} + \alpha_{4i} = \sigma_i;$$

sind ferner U_1, U_2, U_3, U_4 die Coordinaten einer Ebene T in Bezug auf das Tetraëder B_1, B_2, B_3, B_4, so hat man die Gleichungen

1. $$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sigma_1}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3 + \alpha_{41}u_4),\\ U_2 &= \frac{1}{\sigma_2}(\alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{32}u_3 + \alpha_{42}u_4),\\ U_3 &= \frac{1}{\sigma_3}(\alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{43}u_4),\\ U_4 &= \frac{1}{\sigma_4}(\alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4). \end{aligned}$$

Die Auflösungen dieses Systems ergeben homogene lineare Functionen für die u_i; wir sehen daher: Der Uebergang von einem homogenen Coordinatensysteme zu einem andern erfolgt für Ebenencoordinaten ebenfalls durch homogene lineare Substitutionen.

18. Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41}\\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42}\\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43}\\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{vmatrix}$$

kann als der Werth betrachtet werden, den die Gleichung der durch je drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bestimmten Ebene (No. 10) annimmt, wenn man in derselben x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Coordinaten des vierten Punktes ersetzt. Werden daher die Höhen des Tetraëders P_1, P_2, P_3, P_4 mit H_1, H_2, H_3, H_4, und mit k_i der Faktor k für die lineare Function

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} & x_{4l}\\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} & x_{4m}\\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & x_{4n} \end{vmatrix}$$ (i, l, m, n eine Permutation gerader Klasse von 1, 2, 3, 4)

bezeichnet, so hat man

1. $$\Delta = k_1H_1 = k_2H_2 = k_3H_3 = k_4H_4 .$$

Andererseits ist, wenn mit V das Tetraëdervolumen $P_1P_2P_3P_4$ und mit G_1, G_2, G_3, G_4 die Flächenzahlen der Seiten dieses Tetraëders bezeichnet werden

2. $$3V = G_1H_1 = G_2H_2 = G_3H_3 = G_4H_4 .$$

Hieraus folgt die Proportion

$$k_1 : k_2 : k_3 : k_4 : \Delta = G_1 : G_2 : G_3 : G_4 : 3V.$$

Man kann daher setzen $G_i = \lambda k_i$, $3V = \lambda\Delta$.

Da G_i und k_i von den Coordinaten des Punktes P_i nicht abhängen, so ist auch λ von diesen Coordinaten unabhängig; folglich ist λ eine von den Coordinaten der Eckpunkte des Tetraëders $P_1P_2P_3P_4$ unabhängige Constante und kann durch jeden Specialfall bestimmt werden. Wendet man, um λ zu erhalten, die Gleichung $V = \lambda\Delta$ auf das Tetraëder $A_1A_2A_3A_4$ an, so erhält man

3. $$A_1A_2A_3A_4 = \lambda \cdot h_1h_2h_3h_4 .$$

Wird das Volumen des Achsentetraëders $A_1A_2A_3A_4$ mit t bezeichnet, so hat man daher die Gleichung

4. $$P_1P_2P_3P_4 = \pm \frac{t}{h_1h_2h_3h_4} \cdot \Delta .$$

Man überzeugt sich leicht, (vergl. § 3), dass die Determinante Δ und das Volumen $P_1P_2P_3P_4$ immer zugleich das Vorzeichen wechseln; also gilt in 4. nur eines der beiden Zeichen. Um zu entscheiden, welches gültig ist, kann man $P_1P_2P_3P_4$ mit den Ecken des Achsentetraëders vertauschen. Man erfährt dann, dass in 4. das positive Zeichen gilt, und hat sonach das Volumen eines Tetraëders aus den homogenen Coordinaten seiner Eckpunkte

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{t}{h_1h_2h_3h_4} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{vmatrix} .$$

§ 12. Polarebene und Pol für Flächen zweiter Ordnung.

1. Wenn in einer ganzen Function tetraëdrischer Punkt- oder Ebenencoordinaten der Grad eines Gliedes der Function um δ-Einheiten kleiner ist als der Grad n der Function, so kann man dieses Glied mit dem der Einheit gleichen Faktor (§ 11, No. 3, 3 und No. 6, 3)

$$\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4}\right)^\delta, \quad \text{bez. mit} \quad \left(\frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 + \frac{\rho_4}{h_4}u_4\right)^\delta,$$

multipliciren; dadurch gehen aus diesem Gliede eine Reihe von Gliedern hervor, die alle den Grad n haben. Führt man dies bei allen Gliedern der Function aus, deren Grad niedriger ist als n, so erhält man schliesslich eine Function, deren Glieder alle vom $n$ten Grade sind, die also homogen ist. Bei Benutzung homogener Coordinaten kann man sich daher auf die Betrachtung homogener Functionen beschränken.

2. A. Die allgemeine Form einer homogenen quadratischen Function tetraëdrischer Punktcoordinaten ist

1. $$f = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{14}x_1x_4 + A_{22}x_2^2 + 2A_{23}x_2x_3 \\ + 2A_{24}x_2x_4 + A_{33}x_3^2 + 2A_{34}x_3x_4 + A_{44}x_4^2 .$$

Geht die Fläche $f = 0$ durch den Eckpunkt A_i des Achsentetraëders, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $x_i = h_i$, $x_k = x_l = x_m = 0$ genügt; also ist $A_{ii} = 0$. Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche dem Achsentetraeder umschrieben ist, hat daher die Form

2. $$f = 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{14}x_1x_4 + 2A_{23}x_2x_3 + 2A_{24}x_2x_4 \\ + 2A_{34}x_3x_4 = 0 .$$

Wenn die Fläche $f = 0$ die Gerade A_iA_k enthält, so wird der Gleichung durch $x_l = x_m = 0$ unabhängig von x_i und x_k genügt, es ist daher

$$A_{ii} = A_{ik} = A_{kk} = 0 .$$

Enthält die Fläche alle Seiten des unebenen Vierecks $A_1A_2A_3A_4$, so ist daher

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = A_{12} = A_{23} = A_{34} = A_{14} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche reducirt sich auf

3. $$f = 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{24}x_2x_4 = 0 .$$

Diese Gleichung enthält nur noch eine verfügbare Constante, nämlich das Verhältniss $A_{13} : A_{24}$; sie bestätigt, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes unebenes Viereck und einen Punkt eindeutig bestimmt ist.

B. Die allgemeine Form einer homogenen quadratischen Function in tetraëdrischen Ebenencoordinaten ist

1. $$\varphi = B_{11}u_1^2 + 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{14}u_1u_4 + B_{22}u_2^2 + 2B_{23}u_2u_3 \\ + 2B_{24}u_2u_4 + B_{33}u_3^2 + 2B_{34}u_3u_4 + B_{44}x_4^2 .$$

Wenn die Fläche $\varphi = 0$ von der A_i gegenüberliegenden Tetraëderfläche berührt wird, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $u_k = u_l = u_m = 0$ genügt, also ist $A_{ii} = 0$. Die Gleichung einer dem Coordinatentetraëder eingeschriebenen Fläche zweiter Klasse ist demnach

2. $$\varphi = 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{14}u_1u_4 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{24}u_2u_4 + 2B_{34}u_3u_4 = 0.$$

Enthält die Fläche die Tetraëderkante A_iA_k, so wird der Gleichung $\varphi = 0$ durch $u_i = u_k = 0$ unabhängig von u_l und u_m genügt, also ist

$$B_{ll} = B_{lm} = B_{mm} = 0 .$$

Ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ auf der Fläche gelegen, so ist daher

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{44} = B_{12} = B_{23} = B_{34} = B_{44} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche reducirt sich auf

3. $$\varphi = 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{24}u_2u_4 = 0 .$$

Da diese Gleichung nur eine Constante enthält, nämlich das Verhältniss $B_{13} : B_{24}$, so folgt, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes unebenes Viereck und durch eine Tangentenebene eindeutig bestimmt ist.

3. Zur Vorbereitung der nächsten Untersuchungen schalten wir folgende Bemerkung ein: Die Coordinaten x_k des Punktes P, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, wobei $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sei, sind bekanntlich

1. $x_1 = \lambda_1x_{11} + \lambda_2x_{12}$, $x_2 = \lambda_1x_{21} + \lambda_2x_{22}$, $x_3 = \lambda_1x_{31} + \lambda_2x_{32}$, $x_4 = \lambda_1x_{41} + \lambda_2x_{42}$.

Die Ebene T, deren Coordinaten u_k aus den Coordinaten u_{k1} und u_{k2} nach den Formeln abgeleitet werden

2. $$u_k = \lambda_1u_{k1} + \lambda_2u_{k2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 ,$$

hat die Gleichung (§ 11, 8)

$$T = \Sigma \frac{1}{h_k}(\lambda_1u_{k1} + \lambda_2u_{k2})x_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Hierfür kann man setzen

3. $$T = \lambda_1 \cdot \Sigma \frac{1}{h_k}u_{k1}x_k + \lambda_2 \cdot \Sigma \frac{1}{h_k}u_{k2}x_k = 0 .$$

Setzt man nun

4. $$T_1 = \Sigma \frac{1}{h_k}u_{k1}x_k , \quad T_2 = \Sigma \frac{1}{h_k}u_{k2}x_k ,$$

so dass also $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Ebenen T_1 und T_2 sind, so hat man

5. $$T = \lambda_1T_1 + \lambda_2T_2 = 0 .$$

Die Faktoren k_1 und k_2 der Functionen T_1 und T_2 (§ 11) haben hier die Werthe r_1 und r_2, wenn man hiermit die Abstände der Ebenen T_1 und T_2 von C bezeichnet; setzt man nun

$$T = \frac{\lambda_1}{r_1}(r_1T_1) + \frac{\lambda_2}{r_2}(r_2T_2) = 0 ,$$

so ist ersichtlich, dass für jeden Punkt P der Ebene T die Gleichung besteht

$$\frac{\lambda_1}{r_1}(r_1 T_1) = -\frac{\lambda_2}{r_2}(r_2 T_2).$$

Nun sind aber $r_1 T_1$ und $r_2 T_2$ die Abstände p_1, p_2 des Punktes P von den Ebenen T_1 und T_2, und haben gleiches Zeichen mit r_1 und r_2; daher hat man für jeden Punkt der Ebene T

$$p_1 : p_2 = -\frac{\lambda_2}{r_2} : \frac{\lambda_1}{r_1}.$$

Hieraus schliessen wir: Die Ebene T, deren Coordinaten aus den Coordinaten der gegebenen Ebenen T_1 und T_2 durch die Formeln abgeleitet werden

$$u_k = \lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

theilt den Winkel der Ebenen T_1 und T_2 im Sinusverhältnisse

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} = -\frac{\lambda_2}{r_2} : \frac{\lambda_1}{r_1}.$$

Je nachdem $\lambda_1 : \lambda_2$ negativ oder positiv ist, geht T durch den Winkel, in welchem der Punkt C liegt, oder nicht.

4. Wir bestimmen nun die Verhältnisse, durch welche die Strecke zweier Punkte durch eine Fläche II. O. $f = 0$ getheilt wird, sowie die Sinusverhältnisse, in welchen der Winkel zweier Ebenen durch die Tangentenebenen einer Fläche II. O. $\varphi = 0$ getheilt wird, die durch den Schnitt der beiden gegebenen Ebenen gehen.

A. Sind P_1 und P_2 die beiden gegebenen Punkte und sind

$$x_k = \frac{\lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

die Coordinaten eines Punktes in welchem die $P_1 P_2$ von der Fläche

$$f = A_{11} x_1^2 + \ldots = 0$$

geschnitten wird, so hat man die Gleichung

$$A_{11}(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12})^2 + 2A_{12}(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12})(\lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22}) + \ldots = 0.$$

Löst man alle Klammern auf, so erhält man

1. $\lambda_1^2 \cdot f_1 + 2\lambda_1\lambda_2(f_{11}' x_{12} + f_{21}' x_{22} + f_{31}' x_{32} + f_{41}' x_{42}) + \lambda_2^2 \cdot f_2 = 0.$

Hierin bezeichnen f_1 und f_2 die Werthe, welche die Function f erhält, wenn man die Coordinaten x_k durch die Coordinaten x_{k1} des Punktes P_1, bez. durch die Coordinaten x_{k2} des Punktes P_2 ersetzt. Ferner bezeichnen f_1', f_2', f_3', f_4' die abgeleiteten linearen Functionen

2. $f_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4$, $f_2' = A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4$,
$f_3' = A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4$, $f_4' = A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4$,

und ein zweiter Index i deutet an, dass man statt der veränderlichen Coordinaten x_k die Coordinaten x_{ki} eines gegebenen Punktes P_i gesetzt hat.

Multiplicirt man die Functionen f_1', f_2', f_3', f_4' der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addirt, so erhält man die Identität

3. $$f_1' \cdot x_1 + f_2' \cdot x_2 + f_3' \cdot x_3 + f_4' \cdot x_4 = f.$$

Ersetzt man in den Formeln 2. die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, so erhält man die Functionen f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i}; multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k} und addirt, indem man die in jeder Verticalreihe stehenden Glieder vereint, so ergiebt sich die Identität

4. $f_{1i}' \cdot x_{1k} + f_{2i}' \cdot x_{2k} + f_{3i}' \cdot x_{3k} + f_{4i}' \cdot x_{4k} = f_{1k}' \cdot x_{1i} + f_{2k}' \cdot x_{2i} + f_{3k}' \cdot x_{3i} + f_{4k}' \cdot x_{4i}.$

B. Sind T_1 und T_2 die beiden gegebenen Ebenen und sind

$$u_k = \frac{\lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

die Coordinaten einer Ebene T, welche die Fläche $\varphi = B_{11} u_1^2 + \ldots = 0$ berührt, so ist die Gleichung erfüllt

$$B_{11}(\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12})^2 + 2B_{12}(\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12})(\lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{22}) + \ldots = 0.$$

Nach Auflösung der Klammern ergiebt sich hieraus

5. $\lambda_1^2 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \lambda_1 \lambda_2(\varphi_{11}' \cdot u_{12} + \varphi_{21}' \cdot u_{22} + \varphi_{31}' \cdot u_{32} + \varphi_{41}' \cdot u_{42}) + \lambda_2^2 \cdot \varphi_2 = 0.$

Hierin sind φ_1 und φ_2 die Werthe, welche die Function φ für die Coordinaten der Ebene T_1 und T_2 annimmt; ferner sind φ_1', φ_2', φ_3', φ_4' die abgeleiteten linearen Functionen

6. $$\begin{aligned} \varphi_1' &= B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + B_{13}u_3 + B_{14}u_4, \\ \varphi_2' &= B_{12}u_1 + B_{22}u_2 + B_{23}u_3 + B_{24}u_4, \\ \varphi_3' &= B_{13}u_1 + B_{23}u_2 + B_{33}u_3 + B_{34}u_4, \\ \varphi_4' &= B_{14}u_1 + B_{24}u_2 + B_{34}u_3 + B_{44}u_4. \end{aligned}$$

Diese Functionen erfüllen die Identitäten

7. $$\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = \varphi,$$

8. $$\begin{aligned} &\varphi_{1i}' u_{1k} + \varphi_{2i}' u_{2k} + \varphi_{3i}' u_{3k} + \varphi_{4i}' u_{4k} \\ &= \varphi_{1k}' u_{1i} + \varphi_{2k}' u_{2i} + \varphi_{3k}' u_{3i} + \varphi_{4k}' u_{4i}, \end{aligned}$$

wobei ein zweiter Index i andeutet, dass die veränderlichen Coordinaten durch die der Ebene T_i ersetzt worden sind.

5. A. Liegt der Punkt P_1 auf der Fläche $f = 0$, so ist $f_1 = 0$, und die Gleichung No. 4, 1 erhält somit die selbstverständliche Wurzel $\lambda_2 = 0$.

Soll auch der zweite Schnittpunkt der Geraden P_1 P_2 und der Fläche f mit P_1 zusammenfallen, soll also $P_1 P_2$ die Fläche in P_1 tangiren, so muss der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Unterdrücken wir die zweiten Indices bei den Coordinaten von P_2, so erhalten wir daher die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f = 0$ im Punkte P_1 desselben

1. $$T = f_{1i}' \cdot x_1 + f_{2i}' \cdot x_2 + f_{3i}' \cdot x_3 + f_{3i}' x_4 = 0.$$

B. Wird die Fläche $\varphi = 0$ von der Ebene T_1 berührt, so ist $\varphi_1 = 0$; die Gleichung No. 4, 4 hat alsdann eine Wurzel $\lambda_2 = 0$. Soll auch die zweite durch den Schnitt von $T_1 T_2$ gehende Tangentenebene der Fläche φ mit T_1 zusammenfallen, so muss die Gleichung noch eine Wurzel $\lambda_2 = 0$ haben, es muss also der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Lässt man den Index 2 bei den Coordinaten der Ebene T_2 weg, so erhält man für den Tangentialpunkt der die Fläche φ berührenden Ebene T_1 die Gleichung

2. $$P = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0.$$

6. A. Wenn es einen Punkt giebt, für dessen Coordinaten

1. $$f_1' = f_2' = f_3' = f_4' = 0,$$

so ist für diesen Punkt zufolge No. 4, 3 auch $f = 0$, der Punkt liegt also auf der Fläche. Für diesen Punkt verschwinden alle Coefficienten in der Gleichung der Tangentenebene (No. 5, 1), und die Gleichung No. 4, 1 hat unabhängig von der Lage des Punktes P_2 zwei Wurzeln $\lambda_2 = 0$; jede durch diesen Punkt gehende Gerade hat daher mit der Fläche zwei Punkte gemein. Der Punkt ist somit als Doppelpunkt der Fläche, die Fläche selbst als Kegelfläche II. O. gekennzeichnet.

Der Verein der Gleichungen 1. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ ist daher die Bedingung dafür, dass die Fläche $f = 0$ ein Kegel ist.

Die Verhältnisse der Coordinaten der Kegelspitze ergeben sich aus den linearen Gleichungen 1.; um die Coordinaten selbst zu erhalten, hat man noch die Gleichung § 11 No. 3, 3 zu benutzen.

B. Wenn es eine Ebene $\mathfrak{T}$ giebt, für deren Coordinaten

3. $$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi_4' = 0,$$

so erfüllen dieselben zufolge der Identität No. 5, 7 auch $\varphi = 0$, die Ebene $\mathfrak{T}$ berührt daher die Fläche φ. Für diese Ebene verschwinden in der Gleichung No. 4, 5 der Coefficient von λ_1^2 und der von $\lambda_1 \lambda_2$ unabhängig von der Ebene T_2, also gehen durch jede Gerade dieser Ebene zwei mit $\mathfrak{T}$ zusammenfallende Berührungsebenen der Fläche φ. Hierdurch ist $\mathfrak{T}$ als Doppelebene charakterisirt.

Der Verein der vier Gleichungen 3. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\nabla = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Unter der Bedingung $\nabla = 0$ hat die Fläche φ also eine Doppelebene; mithin ist die Fläche unter dieser Bedingung eine Grenzfläche II. O. Die Verhältnisse der Coordinaten der Doppelebene ergeben sich aus dem linearen Systeme 3.

7. A. Die Verhältnisse der Coordinaten u_k der Ebene, die eine Fläche II. O. $f = 0$ im Punkte P_1 derselben berührt, ergeben sich aus den Gleichungen

$$f_{11}' \equiv A_{11}x_{11} + A_{12}x_{21} + A_{13}x_{31} + A_{14}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_1}{h_1},$$

$$f_{21}' \equiv A_{12}x_{11} + A_{22}x_{21} + A_{23}x_{31} + A_{24}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_2}{h_2},$$

$$f_{31}' \equiv A_{13}x_{11} + A_{23}x_{21} + A_{33}x_{31} + A_{34}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_3}{h_3},$$

$$f_{41}' \equiv A_{14}x_{11} + A_{24}x_{21} + A_{34}x_{31} + A_{44}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_4}{h_4}.$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} x_{11} u_1 + \frac{1}{h_2} x_{21} u_2 + \frac{1}{h_3} x_{31} u_3 + \frac{1}{h_4} x_{41} u_4 = 0,$$

so ist die Bedingung für den Verein dieser fünf für $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ linearen Gleichungen

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingungen erfüllen die Coordinaten der Ebenen T, welche die Fläche $f = 0$ berühren; mithin ist $\varphi = 0$ die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten.

B. Die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes, in denen eine Fläche II. O. $\varphi = 0$ von der Ebene T_1 berührt wird, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\varphi_{11}' \equiv B_{11}u_{11} + B_{12}u_{21} + B_{13}u_{31} + B_{14}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_1}{h_1},$$

$$\varphi_{21}' \equiv B_{12}u_{11} + B_{22}u_{21} + B_{23}u_{31} + B_{24}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_2}{h_2},$$

$$\varphi_{31}' \equiv B_{13}u_{11} + B_{23}u_{21} + B_{33}u_{31} + B_{34}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_3}{h_3},$$

$$\varphi_{41}' \equiv B_{14}u_{11} + B_{24}u_{21} + B_{34}u_{31} + B_{44}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_4}{h_4}.$$

Nimmt man hierzu

$$\frac{1}{h_1} u_{11} x_1 + \frac{1}{h_2} u_{21} x_2 + \frac{1}{h_3} u_{31} x_3 + \frac{1}{h_4} u_{41} x_4 = 0,$$

so ergiebt sich für den Verein dieser in Bezug auf $u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}$ linearen Gleichungen

$$f \equiv \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & \frac{x_1}{h_1} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & \frac{x_2}{h_2} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} & \frac{x_3}{h_3} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} & \frac{x_4}{h_4} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & \frac{x_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten.

8. A. Liegt P_1 nicht auf der Fläche $f = 0$, so wird die Fläche $f = 0$ von der Geraden $P_1 P_2$ berührt, wenn die Gleichung No. 4, 1 zwei gleiche Wurzeln für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ ergiebt. Die Bedingung hierfür ist

$$f_1 \cdot f_2 - (f_{11}' \cdot x_{12} + f_{21}' \cdot x_{22} + f_{31}' \cdot x_{32} + f_{41}' \cdot x_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich P_1 als gegeben und P_2 als veränderlich, und unterdrückt man demgemäss bei den Coordinaten des letzteren Punktes den Index 2, so erhält man als Gleichung des der Fläche f vom Punkte P_1 aus umschriebenen Kegels

1. $$f_1 \cdot f - (f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4)^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen dieser Kegel die Fläche f berührt, erfüllen ausser der Gleichung 1. noch die Gleichung $f = 0$, folglich erfüllen sie auch die Gleichung

2. $$T \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0.$$

Dies ist daher die Gleichung der Ebene der Berührungspunkte; sie ist real, auch wenn der Kegel ausser der Spitze keinen realen Punkt hat.

B. Berührt T die Fläche $\varphi = 0$ nicht, so wird die Fläche von der Geraden $T_1 T_2$ berührt, wenn die Gleichung No. 4, 5 für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ gleiche Wurzeln ergiebt, also wenn

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 - (\varphi_{11}' \cdot u_{12} + \varphi_{21}' \cdot u_{22} + \varphi_{31} \cdot u_{32} + \varphi_{41} \cdot u_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich T_1 gegeben und ersetzt T_2 durch T, so erhält man

3. $$\varphi_1 \cdot \varphi - (\varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4)^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird von allen Ebenen T erfüllt, welche die Ebene T_1 in einer Tangente der Fläche φ schneiden; sie stellt daher die der Fläche φ eingeschriebene Grenzfläche dar, welche die Ebene T_1 zur Doppelebene hat, d. i. die Gleichung des Kegelschnittes in Ebenencoordinaten, in welchem φ von T_1 geschnitten wird.

Die Tangentialebenen, welche diese Grenzfläche mit der Fläche $\varphi = 0$ gemein hat, genügen ausser der Gleichung 3. auch der Gleichung $\varphi = 0$, mithin erfüllen sie die lineare Gleichung

$$P = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0 .$$

Die Ebenen, welche eine Fläche II. O. entlang einer ebenen Curve berühren, gehen also durch einen Punkt, und umhüllen somit einen Kegel II. O., der diesen Punkt zur Spitze hat. Der Punkt P ist auch dann noch real, wenn in der Ebene T_1 keine realen Tangenten der Fläche φ liegen.

9. Wir nehmen auch für die folgenden Untersuchungen den Punkt P_1 und die Ebene T_1 in No. 4, 1 und No. 4, 5 als gegeben an, hingegen den Punkt P_2 und die Ebene T_2 als veränderlich und lassen dem entsprechend den Index 2 hinweg.

A. Wir fragen nun, unter welcher Bedingung die Fläche $f = 0$ die Strecke $P_1 P$ in einem Punktpaare schneidet, das zu $P_1 P$ harmonisch ist.

Sollen die beiden Punkte, in welchen $P_1 P$ von f geschnitten wird, zu $P_1 P$ harmonisch liegen, so müssen die beiden Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$, in welchen sie die Strecke $P_1 P$ theilen, entgegengesetzt gleich sein. Diese Theilverhältnisse sind die Wurzeln der Gleichung No. 4, 1. Folglich muss diese Gleichung rein quadratisch sein. Wir erhalten somit als die gesuchte Bedingung

1. $$T = f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0 .$$

Dies ergiebt: Der Ort der Punkte P, welche auf den durch einen Punkt P_1 gehenden Strahlen zu den Schnittpunkten jedes Strahles mit einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ und zu P_1 harmonisch zugeordnet sind, ist die Ebene

$$T = f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0 .$$

Diese Ebene heisst die Polarebene des Punktes P_1 in Bezug auf die Fläche f.

In Rücksicht auf No. 8 haben wir: Die Polarebene eines Punktes P in Bezug auf eine Fläche II. O. ist die Ebene der Berührungspunkte des der Fläche f von der Spitze P aus umschriebenen (realen oder imaginären) Kegels.

B. Wir fragen weiter nach der Bedingung, unter welcher die durch den Schnitt $T_1 T$ der Ebenen T_1 und T gehenden Berührungsebenen einer Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ den Ebenen $T_1 T$ harmonisch zugeordnet sind.

Sollen diese Ebenen den Ebenen $T_1 T$ harmonisch conjugirt sein, so müssen die Sinusverhältnisse, unter welchen sie den Winkel $T_1 T$ theilen, entgegengesetzt gleich sein; dies ist der Fall, wenn die beiden Werthe des Verhältnisses $\lambda_2 : \lambda_1$, welche der Gleichung No. 4, 5 entspringen, entgegengesetzt gleich sind, wenn also die Gleichung selbst rein quadratisch ist. Die gesuchte Bedingung ist daher

$$P = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0 .$$

Hieraus folgt: Legt man durch die Geraden einer Ebene T_1 Tangentenebenen an eine Fläche II. O. $\varphi = 0$, und bestimmt die vierten harmonischen Ebenen zu jedem solchen Paar von Tangentenebenen und zu T_1, so gehen dieselben durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der Pol der Ebene T_1 in Bezug auf die Fläche φ.

Wie aus No. 8, B hervorgeht, ist der Pol einer Ebene T in Bezug auf eine Fläche II. O. φ die Spitze des (realen oder imaginären) Kegels, welcher die Fläche längs ihres Schnittes mit der Ebene T berührt.

10. Aus der letzteren Bemerkung folgt: Ist P der Pol einer Ebene T in Bezug auf eine Fläche II. O. so ist auch T die Polarebene von P.

Wir geben für diesen Satz noch einen direkten algebraischen Beweis. Hierfür machen wir zunächst auf einige bei diesem Beweise zu verwendende Identitäten aufmerksam.

Mit α_{ik} mag das Produkt der Determinante, die aus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{24} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix}$$

durch Unterdrückung der $i$ten Horizontalreihe und der $k$ten Verticalreihe hervorgeht, mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ bezeichnet werden. Dann ist bekanntlich

1. $$A_{1i} \cdot \alpha_{1k} + A_{2i} \cdot \alpha_{2k} + A_{3i} \cdot \alpha_{3k} + A_{4i} \cdot \alpha_{4k} = \Delta \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $i = k$, oder i von k verschieden ist, wenn wir dabei A_{ik} und A_{ki} als gleichbedeutende Symbole gelten lassen. Nun ist

2. $$\begin{aligned} \alpha_{1k} f_1' + \alpha_{2k} f_2' + \alpha_{3k} f_3' + \alpha_{4k} f_4' = \\ (A_{11}\alpha_{1k} + A_{21}\alpha_{2k} + A_{31}\alpha_{3k} + A_{41}\alpha_{4k})\, x_1 \\ + (A_{12}\alpha_{1k} + A_{22}\alpha_{2k} + A_{32}\alpha_{3k} + A_{42}\alpha_{4k})\, x_2 \\ + (A_{13}\alpha_{2k} + A_{23}\alpha_{2k} + A_{33}\alpha_{3k} + A_{43}\alpha_{4k})\, x_3 \\ + (A_{14}\alpha_{1k} + A_{24}\alpha_{2k} + A_{34}\alpha_{3k} + A_{44}\alpha_{4k})\, x_4 . \end{aligned}$$

In Rücksicht auf 1. ergiebt sich hieraus

3. $$\alpha_{1k} f_1' + \alpha_{2k} f_2' + \alpha_{3k} f_3' + \alpha_{4k} f_4' = \Delta \cdot x_k .$$

Sind nun u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41} die Coordinaten der Polarebene des Punktes P_1, so haben wir in Rücksicht auf die Gleichung der Polarebene die Proportion

4. $$\frac{1}{h_1} u_{11} : \frac{1}{h_2} u_{21} : \frac{1}{h_3} u_{31} : \frac{1}{h_4} u_{41} = f_{11}' : f_{21}' : f_{31}' : f_{41}' .$$

Das Verhältniss der Polynome

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_{11} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{12} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{13} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{14} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{21} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{22} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{23} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{24} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{31} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{32} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{33} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{34} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{41} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{42} \frac{u_{21}}{h_1} + \alpha_{43} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{44} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \end{aligned}$$

bleibt daher ungeändert, wenn wir darin $u_{k1} : h_k$ durch f_{k1}' ersetzen. In Rücksicht auf die vier in 3. enthaltenen Identitäten erhalten wir

5. $$\begin{aligned} x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = &\left(\alpha_{11} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{12} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{13} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{14} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{21} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{22} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{23} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{24} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{31} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{32} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{33} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{34} \frac{u_{41}}{h_4}\right) \\ :&\left(\alpha_{41} \frac{u_{11}}{h_1} + \alpha_{42} \frac{u_{21}}{h_2} + \alpha_{43} \frac{u_{31}}{h_3} + \alpha_{44} \frac{u_{41}}{h_4}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Fläche f in Ebenencoordinaten ist (No. 7, A)

$$\varphi = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante φ nach den Gliedern der letzten Zeile, so erhält man

$$\varphi = \frac{u_1}{h_1}\left(\alpha_{11}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{21}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{31}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{41}\frac{u_4}{h_4}\right) + \frac{u_2}{h_2}\left(\alpha_{21}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{32}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{42}\frac{n_4}{h_4}\right)$$
$$+ \frac{u_3}{h_3}\left(\alpha_{31}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{43}\frac{u_4}{h_4}\right) + \frac{u_4}{h_4}\left(\alpha_{41}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{43}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_4}{h_4}\right).$$

Da die Determinante Δ symmetrisch ist, d. h. da $A_{ik} = A_{ki}$ ist, so ist auch $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ und die Function φ ist daher

6.
$$\varphi = \frac{\alpha_{11}}{h_1^2} u_1^2 + 2\frac{\alpha_{12}}{h_1 h_2} u_1 u_2 + 2\frac{\alpha_{13}}{h_1 h_3} u_1 u_3 + 2\frac{\alpha_{14}}{h_1 h_4} u_1 u_4 + \frac{\alpha_{22}}{h_2^2} u_2^2$$
$$+ 2\frac{\alpha_{23}}{h_2 h_3} u_2 u_3 + 2\frac{\alpha_{24}}{h_2 h_4} u_2 u_4 + \frac{\alpha_{33}}{h_3^2} u_3^2 + 2\frac{\alpha_{34}}{h_3 h_4} u_3 u_4 + \frac{\alpha_{44}}{h_4^2} u_4^2.$$

Die abgeleiteten Functionen φ_i' von φ sind

7.
$$\varphi_1' \equiv \frac{1}{h_1}\left(\alpha_{11}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{12}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{13}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{14}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_2' \equiv \frac{1}{h_2}\left(\alpha_{21}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{22}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{23}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{24}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_3' \equiv \frac{1}{h_3}\left(\alpha_{31}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{32}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{33}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{34}\frac{u_4}{h_4}\right),$$
$$\varphi_4' \equiv \frac{1}{h_4}\left(\alpha_{41}\frac{u_1}{h_1} + \alpha_{42}\frac{u_2}{h_2} + \alpha_{43}\frac{u_3}{h_3} + \alpha_{44}\frac{u_4}{h_4}\right).$$

Die Gleichung des Poles Π_1 der Ebene T_1 ist

$$\Pi_1 \equiv \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0;$$

die Coordinaten ξ_{11}, ξ_{21}, ξ_{31}, ξ_{41} desselben folgen daher aus der Proportion

8. $$\xi_{11} : \xi_{21} : \xi_{31} : \xi_{41} = h_1\varphi_{11}' : h_2\varphi_{21}' : h_3\varphi_{31}' : h_4\varphi_{41}'.$$

Setzt man hier die Werthe aus 7. ein, und vergleicht dann die Proportion mit 5., so ist ersichtlich, dass

$$x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = \xi_{11} : \xi_{21} : \xi_{31} : \xi_{41}.$$

Hieraus folgt, dass die Punkte P_1 und Π_1 identisch sind, w. z. b. w.

11. Aus der Definition der Polarebene und des Poles, sowie aus den Identitäten No. 4, 4 und 8 folgt sofort: Wenn P_k auf der Polarebene des Punktes P_i liegt, so liegt auch P_i auf der Polarebene des Punktes P_k. Wenn die Ebene T_k durch den Pol der Ebene T_i geht, so geht auch T_i durch den Pol der Ebene T_k.

Ferner: Die Polarebenen aller Punkte einer Ebene gehen durch den Pol dieser Ebene. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Ebenen liegen auf einer Ebene, der Polarebene des Punktes.

Legt man durch eine Gerade γ zwei Ebenen T_1 und T_2, bestimmt deren

Pole P_1 und P_2, und bestimmt ferner die Polarebene T eines Punktes Q der Geraden γ, so geht T durch P_1 und durch P_2, weil Q auf T_1 und auf T_2 liegt. Wir erhalten somit: Die Polarebenen aller Punkte einer Geraden γ gehen durch eine Gerade γ' (P_1P_2).

Legt man durch P_1P_2 zwei Ebenen $T_1'T_2'$, so liegen deren Pole auf der Geraden γ, da diese Pole sowol auf T_1 als auf T_2 liegen müssen. Hieraus folgt, dass auch die Polarebenen aller Punkte der Geraden γ' durch die Gerade γ gehen.

Zu jeder Geraden γ giebt es also eine in Bezug auf eine Fläche II. O. conjugirte Gerade derart, dass jede der beiden Geraden die Pole der Ebenen enthält, die durch die andere Gerade gehen. Die Geraden, die den Geraden einer Ebene conjugirt sind, gehen durch den Pol der Ebene; die Geraden, die den durch einen Punkt gehenden Geraden conjugirt sind, liegen auf der Polarebene des Punktes.

12. Der Punkt P_0, der die Strecke P_1P_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat die Coordinaten

$$x_{k0} = \lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2},$$

wenn man voraussetzt, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ist. Da man nun offenbar hat

$$f_{k0}' \equiv \lambda_1 f_{k1}' + \lambda_2 f_{k2}',$$

so hat die Polarebene von P_0 die Gleichung

1. $$T_0 \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0,$$

wobei

$$T_1 \equiv f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0,$$
$$T_2 \equiv f_{12}' \cdot x_1 + f_{22}' \cdot x_2 + f_{32}' \cdot x_3 + f_{42}' \cdot x_4 = 0$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_1 und P_2 sind.

Die Gleichung 1. bestätigt, dass die Polarebene von P_0 durch die Schnittgerade der Polarebenen von P_1 und P_2 geht, dass also die Polarebenen der Punkte der Geraden P_1P_2 ein Büschel bilden; sie lehrt aber zugleich, dass die Punkte einer Geraden mit dem Büschel ihrer Polarebenen projectiv sind.

Durch die Polarebenen der Punkte der Geraden P_1P_2 wird auf dieser Geraden eine Punktreihe ausgeschnitten, die mit der auf P_1P_2 liegenden Reihe der P_0 projectiv ist. Die Beziehung der Punkte beider Reihen ist wechselseitig; denn wenn Π auf der Polarebene von P_0 liegt, so liegt auch P_0 auf der Polarebene von Π. Folglich fallen die Gegenpunkte beider Reihen zusammen, da sie demselben Punkte der Geraden, nämlich dem unendlich fernen, entsprechen. Hieraus folgt weiter, dass die beiden projectiven Punktreihen eine Involution bilden.

13. Die Gleichung der Polarebene eines Punktes P_1 in Bezug auf $f = 0$, und die Gleichung des Poles einer Ebene T_1 in Bezug auf $\varphi = 0$ können zufolge der Identitäten No. 4, 4 und 8 auch geschrieben werden

1. $$T_1 \equiv f_1' \cdot x_{11} + f_2' \cdot x_{21} + f_3' \cdot x_{31} + f_4' \cdot x_{41} = 0,$$
2. $$P_1 \equiv \varphi_1' \cdot u_{11} + \varphi_2' \cdot u_{21} + \varphi_3' \cdot u_{31} + \varphi_4' \cdot u_{41} = 0.$$

Hieraus erhält man leicht die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Achsentetraeders; nämlich für die

Polarebene von A_1: $f_1' \equiv A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = 0,$
" " " A_2: $f_2' \equiv A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = 0,$
" " " A_3: $f_3' \equiv A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = 0,$
" " " A_4: $f_4' \equiv A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_3 + A_{44}x_4 = 0.$

Aus Gleichung 2. ergeben sich die Gleichungen der Pole der Ebenen des Achsentetraeders; man erhält für den

Pol der Ebene $A_2A_3A_4$: $\varphi_1' \equiv B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + B_{13}u_3 + B_{14}u_4 = 0$,
„ „ „ $A_1A_3A_4$: $\varphi_2' \equiv B_{12}u_1 + B_{22}u_2 + B_{23}u_3 + B_{24}u_4 = 0$,
„ „ „ $A_1A_2A_4$: $\varphi_3' \equiv B_{13}u_1 + B_{23}u_2 + B_{33}u_3 + B_{34}u_4 = 0$,
„ „ „ $A_1A_2A_3$: $\varphi_4' \equiv B_{14}u_1 + B_{24}u_2 + B_{34}u_3 + B_{44}u_4 = 0$.

Hierdurch ist die geometrische Bedeutung der abgeleiteten linearen Functionen f_k' und φ_k' gegeben.

14. Die Gleichung des Pols der unendlich fernen Ebene ergiebt sich aus der Gleichung No. 13, 2, wenn man darin die Coordinaten der unendlich fernen Ebene $u_{11} = u_{21} = u_{31} = u_{41} = 1$ einsetzt. Man erhält

$$1.\quad M \equiv \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4'$$
$$\equiv (B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14})u_1 + (B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{24})u_2$$
$$+ (B_{13} + B_{23} + B_{33} + B_{34})u_3 + (B_{14} + B_{24} + B_{34} + B_{44})u_4 = 0.$$

Dieser Punkt M ist auf jeder durch ihn gehenden Sehne den beiden Endpunkten der Sehne und ihrem unendlich fernen Punkte harmonisch conjugirt; folglich sind in M die Mitten aller durch M gehenden Sehnen vereint; M ist daher der Mittelpunkt der Fläche $\varphi = 0$. Aus der Gleichung des Mittelpunkts ergiebt sich für die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 desselben die Proportion

$$2.\quad \frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3} : \frac{\xi_4}{h_4} = (B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14}) : (B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{24})$$
$$: (B_{13} + B_{23} + B_{33} + B_{34}) : (B_{14} + B_{24} + B_{34} + B_{44}).$$

Der Mittelpunkt der Fläche $\varphi = 0$ ist unendlich fern, wenn die Coefficienten der Bedingung genügen (§ 11, No. 9)

$$3.\quad B_{11} + 2B_{12} + 2B_{13} + 2B_{14} + B_{22} + 2B_{23} + 2B_{24} + B_{33} + 2B_{34} + B_{44} = 0.$$

Unter dieser Bedingung wird, wie man sieht, der Gleichung $\varphi = 0$ durch die Coordinaten $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ genügt, also wird die Fläche φ von der unendlich fernen Ebene berührt. Durch diese Eigenschaften sind die beiden Paraboloide charakterisirt.

Die Gleichung einer Fläche II. O., die das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ enthält, haben wir gefunden (No. 2, 3)

$$\varphi \equiv 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{24}u_2u_4 = 0.$$

Soll diese Fläche ein Paraboloid sein, so muss nach 2. die Bedingung gelten

$$2B_{13} + 2B_{24} = 0.$$

Die Gleichung des das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ enthaltenden hyperbolischen Paraboloids ist daher

$$u_1u_3 - u_2u_4 = 0, \quad \text{oder} \quad u_1 : u_2 = u_4 : u_3.$$

Dieser Gleichung genügt jede Ebene, die A_1A_2 in demselben Verhältnisse theilt wie A_4A_3. Hieraus folgt: Die Ebenen, welche zwei Gerade (A_1A_2 und A_4A_3) in entsprechenden Punkten zweier ähnlichen Punktreihen treffen, umhüllen ein hyperbolisches Paraboloid, das die Träger der beiden Punktreihen enthält (§ 8, No. 3)

Ist die Summe $B_{13} + B_{24}$ von Null verschieden, so ist

$$B_{13}u_1u_3 + B_{24}u_2u_4 = 0$$

die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids. Für die Coordinaten des Centrums M dieses Hyperboloids hat man die Proportion

$$\frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3} : \frac{\xi_4}{h_4} = B_{13} : B_{24} : B_{13} : B_{24}.$$

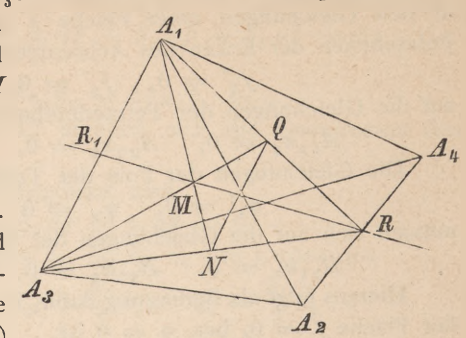
Daher hat man insbesondere

$$\xi_1 : h_1 = \xi_3 : h_3, \quad \xi_2 : h_2 = \xi_4 : h_4.$$

Legt man eine Ebene durch A_1A_3M und ist R der Schnittpunkt dieser Ebene mit der A_1A_3 gegenüberliegenden Tetraederkante A_2A_4, sind ferner N und Q die Schnittpunkte der Geraden A_1M und A_3M mit A_3R und A_1R, so ist

$$\xi_1 : h_1 = MN : A_1N;$$
$$\xi_3 : h_3 = MQ : A_3Q;$$

folglich ist auch $MN : A_1N = MQ : A_3Q$.



(M. 461.)

Hieraus folgt weiter, dass NQ und A_1A_3 parallel sind, sowie dass die Gerade RM durch die Mitte R_1 der Seite A_1A_3 des Dreieckes A_1RA_3 geht;*) folglich liegt das Centrum des Hyperboloids auf der Ebene, welche durch A_2A_4 und die Mitte der gegenüberliegenden Kante A_1A_3 geht.

Ebenso schliessen wir aus der Gleichung $\xi_2 : h_2 = \xi_4 : h_4$, dass M auf der Ebene liegt, welche die Kante A_1A_3 mit der Mitte der gegenüberliegenden Kante A_2A_4 verbindet.

Wir gewinnen so den Satz: Die Centren aller Flächen II. O., die ein gegebenes unebenes Viereck enthalten, liegen auf der Geraden, welche die Mitten der Diagonalen dieses Vierecks verbindet.

15. Construirt man zu einem Punkte A_1 die Polarebene T_1 in Bezug auf eine Fläche II. O., wählt einen Punkt A_2 auf T_1 und construirt die Polarebene desselben T_2, so geht T_2 durch A_1; wählt man auf der Schnittgeraden von T_1 und T_2 einen dritten Punkt A_3 und bestimmt dessen Polarebene T_3, so geht diese durch A_1 und A_2. Der Punkt A_4, den T_1, T_2 und T_3 gemein haben, hat eine Polarebene, die durch A_1, A_2 und A_3 geht, also ist diese die Ebene $A_1A_2A_3$.

Man erhält so ein Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, dessen Seitenflächen die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken sind; ein solches Tetraeder wird als Polartetraeder der Fläche f bezeichnet.

Wie man sieht, giebt es unzählig viele Polartetraeder einer Fläche f; einen Eckpunkt (A_1) kann man beliebig im Raume wählen; den zweiten Eckpunkt (A_2) kann man beliebig auf der Polarebene von A_1 wählen; den dritten Eckpunkt kann man beliebig auf einer Geraden, dem Schnitte der Polarebenen von T_1 und T_2, wählen; der vierte ist durch diese drei bestimmt.

Oder man wählt eine Ebene (T_1) beliebig im Raume; die zweite Ebene (T_2) kann man unter den durch einen Punkt (den Pol von T_1) gehenden Ebenen beliebig wählen; die dritte kann man unter den durch eine Gerade (die die Pole von T_1 und T_2 verbindet) gehenden beliebig wählen; die vierte ist durch diese drei bestimmt.

---

*) Den Beweis dafür, dass MR die Seite A_1A_3 halbirt, kann man dem Satze (analyt. Planimetrie § 5, No. 13) entnehmen: Theilt man die Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 eines Dreiecks der Reihe nach in den Verhältnissen $n_1 : n_2$, $n_2 : n_3$, $n_3 : n_1$, und verbindet die Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese drei Geraden durch einen Punkt. Theilt man also A_3R im Verhältnisse $m : n = A_3N : NR$ und RA_1 im Verhältnisse $RQ : QA_1 = RN : NA_3 = n : m$, so wird A_1A_3 von RM im Verhältnisse $m : m$ getheilt, folglich ist $A_1R_1 = R_1A_3$.

Wählt man ein Polartetraëder zum Achsentetraëder, so müssen sich in den Gleichungen einer Fläche $f = 0$, bez. $\varphi = 0$ die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Achsentetraeders

$$f_1' = 0, \quad f_2' = 0, \quad f_3' = 0, \quad f_4' = 0$$

auf die Gleichungen der Tetraëderebenen reduciren

$$A_{11}x_1 = 0, \quad A_{22}x_2 = 0, \quad A_{33}x_3 = 0, \quad A_{44}x_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Pole der Tetraëderebenen

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \quad \varphi_4' = 0$$

müssen sich auf die Gleichungen der Ecken des Tetraëders reduciren

$$B_{11}u_1 = 0, \quad B_{22}u_2 = 0, \quad B_{33}u_3 = 0, \quad B_{44}u_4 = 0.$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass das Achsentetraëder ein Polartetraëder der Fläche $f = 0$, bez. $\varphi = 0$ ist,

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{34} = 0,$$

bez. $$B_{12} = B_{13} = B_{14} = B_{23} = B_{24} = B_{34} = 0.$$

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf ein Polartetraeder ist daher

in Punktcoordinaten: $A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 = 0$,

in Ebenencoordinaten: $B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + B_{44}u_4^2 = 0$.

A. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 = 0$$

sind $\quad f_1' = A_{11}x_1, \quad f_2' = A_{22}x_2, \quad f_3' = A_{33}x_3, \quad f_4' = A_{44}x_4.$

Die Gleichung der Tangentenebene des Punktes P_1 (bez. der Polarebene desselben) ist daher

1. $$T = A_{11}x_{11}\cdot x_1 + A_{22}x_{21}\cdot x_2 + A_{33}x_{31}\cdot x_3 + A_{44}x_{41}\cdot x_4 = 0.$$

Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten der Tangentenebene, so hat man die Proportion

2. $$A_{11}x_{11} : A_{22}x_{21} : A_{33}x_{31} : A_{44}x_{41} = \frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} : \frac{u_4}{h_4}.$$

Hieraus folgt

3. $$x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} = \frac{u_1}{A_{11}h_1} : \frac{u_2}{A_{22}h_2} : \frac{u_3}{A_{33}h_3} : \frac{u_4}{A_{44}h_4}.$$

Setzt man für die Coordinaten x_{k1} die proportionalen Werthe $u_k : A_{kk}h_k$ in die Gleichung ein

$$\frac{1}{h_1}x_{11}u_1 + \frac{1}{h_2}x_{21}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{31}u_3 + \frac{1}{h_4}x_{41}u_4 = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten

4. $$\frac{1}{A_{11}h_1^2}\cdot u_1^2 + \frac{1}{A_{22}h_2^2}\cdot u_2^2 + \frac{1}{A_{33}h_3^2}\cdot u_3^2 + \frac{1}{A_{44}h_4^2}\cdot u_4^2 = 0.$$

B. Die abgeleiteten Functionen von

$$\varphi = B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + B_{44}u_4^2$$

sind $\quad \varphi_1' = B_{11}u_1, \quad \varphi_2' = B_{22}u_2, \quad \varphi_3' = B_{33}u_3, \quad \varphi_4' = B_{44}u_4.$

Die Gleichung des Tangentialpunktes der Ebene T_1 (bez. des Poles derselben) ist

5. $$P = B_{11}u_{11}\cdot u_1 + B_{22}u_{21}\cdot u_2 + B_{33}u_{31}\cdot u_3 + B_{44}u_{41}\cdot u_4 = 0.$$

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ergiebt sich zu

6. $$\frac{1}{B_{11}h_1^2}x_1^2 + \frac{1}{B_{22}h_2^2}x_2^2 + \frac{1}{B_{33}h_3^2}x_3^2 + \frac{1}{B_{44}h_4^2}x_4^2 = 0.$$

Sind daher bezogen auf ein Polartetraëder die Gleichungen derselben Fläche II. O.

in Punktcoordinaten: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0$,

in Ebenencoordinaten: $\beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$,

so ist

7. $$h_1^2\alpha_1\beta_1 = h_2^2\alpha_2\beta_2 = h_3^2\alpha_3\beta_3 = h_4^2\alpha_4\beta_4 = 1.$$

16. Aus der Proportion 3. in No. 15 ergeben sich die Coordinaten des Centrums, wenn man $u_{k1} = 1$ setzt.

Wenn als Gleichung der Fläche vorausgesetzt wird

$$\varphi = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

so erhält man daher für die Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des Centrums

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{\beta}h_1, \quad \xi_2 = \frac{\beta_2}{\beta}h_2, \quad \xi_3 = \frac{\beta_3}{\beta}h_3, \quad \xi_4 = \frac{\beta_4}{\beta}h_4,$$

wenn man β abkürzungsweise für $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ setzt.

17. Wenn man durch Coordinatentransformation von der Gleichung einer Fläche II. O. in Bezug auf ein Polartetraeder zur Gleichung derselben Fläche in Bezug auf irgend ein anderes Polartetraeder übergeht, so bleibt sowol die Summe der Coefficienten in der Gleichung für Punktcoordinaten, als auch in der Gleichung für Liniencoordinaten ungeändert. Sind die Gleichungen im ursprünglichen Systeme

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0,$$
$$\beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

und im neuen Systeme

$$A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + A_4\xi_4^2 = 0,$$
$$B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 = 0,$$

so gelten die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Beweis. Da in unseren Gleichungen nur die Quadrate der Coordinaten vorkommen, so kann in den Transformationsformeln § 11, No. 15, 1 und. No 17, 1 über die Coefficienten immer so verfügt werden, dass

1. $$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = +1 \quad \text{und} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = +1.$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Transformationsformeln

$$\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4, \quad \xi_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4,$$
$$\xi_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4, \quad \xi_4 = a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4.$$

Setzt man dies in die Gleichung der Fläche

$$A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + A_4\xi_4^2 = 0,$$

so erhält man aus der Identität

2. $$A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + A_4\xi_4^2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2$$

zunächst folgende vier Gleichungen, welche aussagen, dass in der transformirten Gleichung die Coefficienten, welche Produkte von je zwei Coordinaten multipliciren, verschwinden

3. $$A_1 a_{i1}a_{k1} + A_2 a_{i2}a_{k2} + A_3 a_{i3}a_{k3} + A_4 a_{i4}a_{k4} = 0,$$

wobei man für i, k jede Combination zu zweien aus den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zu nehmen hat, so dass man sechs Gleichungen dieser Art erhält.

Ferner erhält man aus 2.

$$\alpha_i = A_1 a_{i1}^2 + A_2 a_{i2}^2 + A_3 a_{i3}^2 + A_4 a_{i4}^2,$$

daher ergiebt sich die Coefficientensumme

4. $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \Sigma A_k(a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Multiplicirt man nun jeden der sechs Ausdrücke 3. mit $2\cos\varepsilon_{ik}$ (§ 11, No. 13, 6) subtrahirt sie dann von der rechten Seite der Gleichung 5., und ordnet nach den neuen Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, so erhält man

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \Sigma A_k (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{1k}^2 + a_{4k}^2 - 2a_{1k}a_{2k}\cos\varepsilon_{12}$$

5. $$- 2a_{1k}a_{3k}\cos\varepsilon_{13} - 2a_{1k}a_{4k}\cos\varepsilon_{14} - 2a_{2k}a_{3k}\cos\varepsilon_{23} - 2a_{2k}a_{4k}\cos\varepsilon_{24}$$

$$- 2a_{3k}a_{4k}\cos\varepsilon_{34}).$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung (§ 11, No. 14)

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2 - 2a_{1k}a_{2k}\cos\varepsilon_{12} - \ldots - 2a_{3k}a_{4k}\cos\varepsilon_{34} = 1;$$

folglich erhält man aus 5. die erste der beiden behaupteten Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Um die Richtigkeit der zweiten nachzuweisen, führe man in

6. $$B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 = 0$$

die Coordinaten des ursprünglichen Systems u_1, u_2, u_3, u_4 mit Hülfe der Formeln § 11, No. 17 ein; unter der Voraussetzung 1. ist

$$w_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \alpha_{31}u_3 + \alpha_{41}u_4, \quad w_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{32}u_3 + \alpha_{42}u_4,$$

$$w_3 = \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{43}u_4, \quad w_4 = \alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 6. ein, so erhält man aus der Identität

7. $$B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2$$

zunächst die sechs Gleichungen

8. $$B_1 \alpha_{i1}\alpha_{k1} + B_2 \alpha_{i2}\alpha_{k2} + B_3 \alpha_{i3}\alpha_{k3} + B_4 \alpha_{i4}\alpha_{k4} = 0,$$

wo man wieder für i, k die sechs Paare aus den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zu setzen hat. Aus 7. folgt weiter

$$\beta_i = B_1 \alpha_{i1}^2 + B_2 \alpha_{i2}^2 + B_3 \alpha_{i3}^2 + B_4 \alpha_{i4}^2,$$

daher erhält man

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \Sigma B_k (\alpha_{1k}^2 + \alpha_{2k}^2 + \alpha_{3k}^2 + \alpha_{4k}^2), \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Addirt man in dieser Gleichung zu der rechten Seite die sechs Grössen 8., jede mit 2 multiplicirt, so erhält man

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \Sigma B_k (\alpha_{1k}^2 + \alpha_{2k}^2 + \alpha_{3k}^2 + \alpha_{4k}^2 + 2\alpha_{1k}\alpha_{2k} + 2\alpha_{1k}\alpha_{3k}$$

$$+ 2\alpha_{1k}\alpha_{4k} + 2\alpha_{2k}\alpha_{3k} + 2\alpha_{2k}\alpha_{4k} + 2\alpha_{3k}\alpha_{4k})$$

$$= \Sigma B_k (\alpha_{1k} + \alpha_{2k} + \alpha_{3k} + \alpha_{4k})^2 = \Sigma B_k \sigma_k^2.$$

Da nach der Voraussetzung $\sigma_k = 1$, so ergiebt sich hieraus die zweite der behaupteten Gleichungen

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

18. Um zu zeigen, wie man die Flächen II. O. nach den Coefficienten ihrer Gleichungen in Bezug auf ein Polartetraëder unterscheiden kann, schalten wir einen allgemeinen Satz über die Transformation quadratischer Functionen ein.

Wenn die quadratische Function

1. $$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \ldots + a_r y_r^2$$

durch die homogenen linearen Substitutionen

2. $$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}z_1 + c_{21}z_2 + \ldots + c_{r1}z_r, \\ y_2 &= c_{12}z_1 + c_{22}z_2 + \ldots + c_{r2}z_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= c_{1r}z_1 + c_{2r}z_2 + \ldots + c_{rr}z_r \end{aligned}$$

in die Function übergeht

3. $$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + b_3 z_3^2 + \ldots + b_r^2 z_r,$$

so ist die Anzahl der positiven Coefficienten unter den a gleich der Anzahl der positiven Coefficienten unter den b.

Beweis. Aus der Identität

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_r y_r^2 \equiv b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots + b_r z_r^2$$

folgt

4. $$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_r y_r^2 - b_1 z_1^2 - b_2 z_2^2 - \ldots - b_r z_r^2 \equiv 0.$$

Denken wir uns die Functionen

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots \quad \text{und} \quad b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots$$

so geordnet, dass erst alle Glieder mit positiven Coefficienten kommen, dann die mit negativen; es seien $a_1, a_2 \ldots a_m$ positiv, $a_{m+1} \ldots a_r$ negativ; sowie $b_1, b_2 \ldots b_n$ positiv, $b_{n+1} \ldots b_r$ negativ. Nimmt man nun zunächst an, es sei $n < m$, so wäre die Anzahl der negativen Glieder in dem Polynom 4.

$$r - m + n = r - (n - m),$$

also kleiner als r. Setzt man alle y, welche negative Coefficienten haben, gleich Null, also

5. $$y_{m+1} = y_{m+2} = \ldots = y_r = 0,$$

so kann man noch ausserdem über die z so verfügen, dass man alle in der Function $b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \ldots$ mit positiven Coefficienten versehenen z annullirt, also

6. $$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$$

annimmt. Denn die letzten $r - m$ der Formeln 2. gehen dann in $r - m$ homogene lineare Gleichungen der $r - n$ Grössen z_{n+2}, $z_{n+1} \ldots z_r$ über, enthalten also mehr unbestimmte Grössen, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, und sind daher auf mehr als eine Weise durch von Null verschiedene Werthe der Unbestimmten erfüllbar.

Durch die Substitutionen 5. und 6. verschwinden in 4. alle negativen Glieder; da nun eine Summe von positiven Grössen nicht verschwinden kann, so folgt, dass die Annahme falsch ist; also ist n nicht kleiner als m.

Nimmt man an, n sei grösser als m, so kann man, ohne auf widersprechende Bestimmungen zu stossen, alle y gleich Null setzen, welche in der Function 1. positive Coefficienten haben, und alle z, welche in 3. negative Coefficienten haben. Dann fallen in 4. alle positiven Grössen hinweg, im Widerspruche damit, dass die algebraische Summe aller in 4. stehenden Glieder identisch verschwindet.

Es ist nicht überflüssig, hervorzuheben, dass diese Schlussweise in dem Falle $m = n$ ihre Anwendbarkeit verliert; denn setzt man alle y, deren Coefficienten negativ, und alle z, deren Coefficienten positiv sind gleich Null, so erhält man aus den letzten $r - m$ Formeln der Gruppe 2. ebensoviele homogene lineare Gleichungen für die Grössen $z_{n+1} \ldots z_r$, die gerade so viel Unbestimmte enthalten, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, und daher im Allgemeinen nur durch verschwindende Werthe der Grössen $z_{m+1} \ldots z_r$ erfüllt werden können. Aus $z_{m+1} = z_{m+2} = \ldots z_r = 0$ folgt dann auf Grund der Gleichungen 2., dass auch die übrigen y verschwinden, so dass nun die Identität 4. erfüllbar ist, da alle Glieder derselben verschwinden.

19. Wenn in der Gleichung

$$\varphi \equiv \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$$

kein Coefficient Null oder unendlich gross ist und auch die Summe der Coefficienten nicht verschwindet, so ist die Fläche keine Grenzfläche, kein Kegel und kein Paraboloid; man kann dann die Gleichung durch die Summe aller Coefficienten dividiren. Man kann daher im Falle

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \gtrless 0$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1.$$

Geht man nun durch die Transformationsformeln zu irgend einem andern

Polartetraeder über, so ist auch in der neuen Gleichung (No. 17) die Summe der Coefficienten der positiven Einheit gleich; ferner enthält auf Grund des soeben bewiesenen Satzes die neue Gleichung ebensoviel positive Coefficienten, als die ursprüngliche.

Die Flächen ordnen sich daher in drei Arten, je nachdem A. ein positiver Coefficient und drei negative, oder B. drei positive Coefficienten und ein negativer, oder C. zwei positive und zwei negative vorhanden sind.

A. Sind unter den Coefficienten drei negative, so kann man die Gleichung schreiben

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 - b_2^2 u_2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0 .$$

Die Coordinaten ξ_i des Centrums sind

$$\xi_1 = b_1^2 h_1 , \quad \xi_2 = - b_2^2 h_2 , \quad \xi_3 = - b_3^2 h_3 , \quad \xi_4 = - b_4^2 h_4 ,$$

das Centrum liegt daher in jedem Polartetraeder in einer Gegenecke einer Tetraederecke.

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0 .$$

Setzt man hier die Coordinaten des Centrums ein, so erhält man

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 = 1,$$

nach der über die Coefficienten von φ gemachten Voraussetzung. Da nun für die Coordinaten A_1, A_2, A_3, A_4 des Coordinatentetraeders die Function f die Werthe erhält

$$1 : b_1^2 , \quad - 1 : b_2^2 , \quad - 1 : b_3^2 , \quad - 1 : b_4^2 ,$$

so folgt, dass das Centrum M und die Ecke A_1 auf derselben Seite der Fläche liegen, während A_2, A_3 und A_4 mit M nicht auf derselben Seite liegen.

Verbindet man das Centrum mit einem Punkte P_2 der Ebene $A_2 A_3 A_4$, so bestimmt sich das Verhältniss, in welchem die Strecke MP_2 von der Fläche getheilt wird, aus der Gleichung No. 4, 1, wenn man darin

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0 ,$$

für x_{kl} die Coordinaten ξ_k des Centrums, sowie $x_{12} = 0$ setzt, weil P_2 auf $A_2 A_3 A_4$ liegt. Demnach hat man

$$f_1 = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 1 ,$$

$$f_{11}' \cdot x_{12} + f_{21}' \cdot x_{22} + f_{31}' \cdot x_{32} + f_{41}' \cdot x_{42} = \frac{x_{22}}{h_2} + \frac{x_{32}}{h_3} + \frac{x_{42}}{h_4} = 1 .$$

Daher wird die Gleichung für $\lambda_1 : \lambda_2$

$$\lambda_1^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 \left(\frac{1}{b_2^2 h_2^2} \cdot x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} \cdot x_{32}^2 + \frac{1}{b_4^2 h_4^2} \cdot x_{42}^2 \right) = 0 .$$

Hieraus folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \sqrt{1 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2 + \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_{42}^2} ,$$

also wird der Gleichung unabhängig von der Wahl des Punktes P_2 durch zwei reale Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ genügt, jede durch das Centrum und durch einen Punkt der Ebene $A_2 A_3 A_4$ gelegte Gerade, d. i. jede Gerade durch das Centrum schneidet die Fläche in realen Punkten. Hieran wird die Fläche als Ellipsoid erkannt.

B. Sind drei Coefficienten positiv und einer negativ, so kann man setzen

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0 .$$

Die Coordinaten des Centrums sind

$$\xi_1 = b_1^2 h_1 , \quad \xi_2 = b_2^2 h_2 , \quad \xi_3 = b_3^2 h_3 , \quad \xi_4 = - b_4^2 h_4 .$$

Das Centrum liegt daher in einem an einer Tetraederfläche aussen anliegenden Raume.

Die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} \cdot x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} \cdot x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} \cdot x_4^2 = 0 .$$

Für die Coordinaten des Centrums nimmt f den Werth an

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 = 1 ;$$

für die Coordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 erhält f die Werthe

$$1 : b_1^2 , \quad 1 : b_2^2 , \quad 1 : b_3^2 , \quad - 1 : b_4^2 .$$

Daher liegen drei Ecken jedes Polartetraeders A_1, A_2, A_3 mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche, die vierte A_4 wird von M durch die Fläche getrennt.

Für das Verhältniss, in welchem die Strecke, die das Centrum mit einem Punkte P_2 der Ebene $A_1 A_2 A_3$ verbindet, von f geschnitten wird, ergiebt sich jetzt die Gleichung

$$\lambda_1^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \left(\frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2 \right) = 0 ,$$

aus welcher folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2} .$$

Der Radicand wird für unendlich grosse Werthe von x_{12}, x_{22}, x_{32} negativ unendlich. Wir sehen daher: Die Ebene, die durch das Centrum parallel der Ebene eines Polartetraeders gelegt wird, deren Ecken mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche liegen, hat mit der Fläche keinen realen Punkt gemein. Es giebt daher Ebenen durch das Centrum, die die Fläche nicht schneiden. Folglich ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid.

Setzt man in den Gleichungen des Ellipsoids und des zweischaligen Hyperboloids

$$b_1^2 x_1^2 - b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0$$

der Reihe nach $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$, so erhält man

$$- b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 = 0 .$$

Beiden Gleichungen kann durch reale Punkte nicht genügt werden. In jedem Polartetraeder eines Ellipsoids und eines zweischaligen Hyperboloids giebt es daher eine Ebene, welche die Fläche nicht schneidet. Hierdurch wird bestätigt, dass auf dem Ellipsoide und auf dem zweischaligen Hyperboloide keine Geraden liegen; denn von einer Geraden wird jede Ebene in einem realen Punkte getroffen.

C. Sind zwei Coefficienten der Function φ positiv, und zwei negativ, so kann man setzen

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 .$$

Die Coordinaten des Centrums sind jetzt

$$\xi_1 = b_1^2 h_1 , \quad \xi_2 = b_2^2 h_2 , \quad \xi_3 = - b_3^2 h_3 , \quad \xi_4 = - b_4^2 h_4$$

Die Gleichung in Punktencoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0 .$$

Für die Coordinaten des Centrums und der Ecken des Polartetraeders nimmt die Function f die Werthe an

$$1. \quad 1 : b_1^2 , \quad 1 : b_2^2 , \quad - 1 : b_3^2 , \quad - 1 : b_4^2 .$$

Daher liegen zwei Ecken A_1, A_2 jedes Polartetraëders mit dem Centrum auf derselben Seite der Fläche, die beiden andern A_3, A_4 werden durch die Fläche vom Centrum getrennt. Das Centrum liegt, da zwei Coordinaten positiv, die andern beiden negativ sind, in einem an einer Kante anliegenden zweieckigen Raume. Giebt man f die Form

$$f = \left(\frac{1}{b_1 h_1} x_1 + \frac{1}{b_3 h_3} x_3\right)\left(\frac{1}{b_1 h_1} x_1 - \frac{1}{b_3 h_3} x_3\right) + \left(\frac{1}{b_2 h_2} x_2 + \frac{1}{b_4 h_4} x_4\right)\left(\frac{1}{b_2 h_2} x_2 - \frac{1}{b_4 h_4} x_4\right) = 0,$$

und setzt

$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 + \frac{1}{b_3 h_3} x_3 = T_1, \quad \frac{1}{b_2 h_2} x_2 + \frac{1}{b_4 h_4} x_4 = T_1',$$
$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 - \frac{1}{b_3 h_3} x_3 = T_2', \quad \frac{1}{b_2 h_2} x_2 - \frac{1}{b_4 h_4} x_4 = - T_2,$$

so wird der Gleichung der Fläche durch die Punkte genügt, für welche bei willkürlicher Wahl des Verhältnisses $\mu_1 : \mu_2$ die beiden Gleichungen gelten

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2, \quad \mu_1 T_1' = \mu_2 T_2',$$

welche also den beiden Ebenen gemeinsam sind

$$T = \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 = 0, \quad T_1' = \mu_1 T_1' - \mu_2 T_2' = 0.$$

Diese Ebenen sind entsprechende Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, in denen T_1 und T_2 den Ebenen T_1' und T_2' entsprechen.

Dies charakterisirt die Fläche als einschaliges Hyperboloid.

20. Ist in der Gleichung

$$\varphi = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$$

kein Coefficient Null oder unendlich und die Summe der Coefficienten

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0,$$

so sind die Coordinaten des Centrums unendlich gross, und die Fläche ein Paraboloid (No. 14). Alsdann haben entweder drei, oder zwei Coefficienten gleiche Zeichen.

A. Haben drei Coefficienten dasselbe Zeichen, so kann man die Gleichung schreiben

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0.$$

Daher ist die Gleichung in Punktcoordinaten

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Setzt man in beiden Gleichungen der Reihe nach $u_4 = 0$, $x_4 = 0$, so ergiebt sich

$$b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3^2 u_3^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0.$$

Beiden Gleichungen kann durch reale Werthe des Coordinaten nicht genügt werden. Wir sehen daher: In jedem Polartetraëder giebt es eine Ecke, durch welche sich keine realen Tangentenebenen der Fläche legen lassen, und die dieser Ecke gegenüberliegende Seite des Tetraëders hat mit der Fläche keine realen Punkte gemein.

Hierdurch ist das elliptische Paraboloid charakterisirt; denn eine geradlinige Fläche wird von jeder Ebene in realen Punkten getroffen, und sendet durch jeden Punkt des Raumes reale Tangentenebenen.

Für die Coordinaten der Ecken des Achsentetraëders nimmt die Function f die Werthe an

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad 1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Hieraus folgt, dass die Ecken A_1, A_2, A_3 durch die Fläche f von A_4 getrennt sind. Die durch A_4 gehenden Kanten und Flächen des Tetraëders schneiden also die Fläche in realen Punkten, die andern nicht.

B. Haben nur zwei Coefficienten dasselbe Zeichen, so kann man die Gleichung schreiben

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0.$$

Die Gleichung in Punktcoordinaten ist daher

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 = 0.$$

Man überzeugt sich wie bei der Gleichung des einschaligen Hyperboloids No. 19, C. dass diese Fläche geradlinig ist; wir haben daher das hyperbolische Paraboloid vor uns.

Für die Coordinaten der Tetraëderecken erhält f die Werthe

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher werden A_1 und A_2, sowie A_3 und A_4 durch die Fläche nicht getrennt, während die Tetraëderkanten A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 von der Fläche geschnitten werden, und zwar, wie aus den Polareigenschaften folgt, so, dass innerhalb jeder Strecke nur ein Schnittpunkt liegt, — eine Bemerkung, die in Bezug auf jede Fläche II. O. von jeder Kante eines Polartetraëders gilt, die die Fläche in realen Punkten trifft.

21. Wir schliessen hieran die Frage nach den Punkten im Raume, welche in Bezug auf zwei Flächen II. O. dieselbe Polarebene haben.

Wir beziehen beide Flächen auf ein Polartetraëder einer der Flächen; die Gleichungen in Punktcoordinaten seien

$$F = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0,$$
$$f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{44} x_4^2 = 0.$$

Die Polarebenen eines Punktes P_0 bezüglich beider Flächen sind

$$T = b_1 x_{10} \cdot x_1 + b_2 x_{20} \cdot x_2 + b_3 x_{30} \cdot x_3 + b_4 x_{40} \cdot x_4 = 0,$$
$$T' = f_{10}' \cdot x_1 + f_{20}' \cdot x_2 + f_{30}' \cdot x_3 + f_{40}' \cdot x_4 = 0.$$

Sollen T und T' geometrisch gleichbedeutend sein, so muss die Function T durch Multiplication mit einer Zahl λ identisch mit T' werden. Man hat daher die Gleichungen

$$1. \quad \begin{aligned} a_{11} x_{10} + a_{12} x_{20} + a_{13} x_{30} + a_{14} x_{40} &= \lambda b_1 x_{10}, \\ a_{12} x_{10} + a_{22} x_{20} + a_{23} x_{30} + a_{24} x_{40} &= \lambda b_2 x_{20}, \\ a_{13} x_{10} + a_{23} x_{20} + a_{33} x_{30} + a_{34} x_{40} &= \lambda b_3 x_{30}, \\ a_{14} x_{10} + a_{24} x_{20} + a_{34} x_{30} + a_{44} x_{40} &= \lambda b_4 x_{40}. \end{aligned}$$

Reducirt man diese auf Null, so erhält man

$$2. \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda b_1) x_{10} + a_{12} x_{20} + a_{13} x_{30} + a_{14} x_{40} &= 0, \\ a_{12} x_{10} + (a_{22} - \lambda b_2) x_{20} + a_{23} x_{30} + a_{24} x_{40} &= 0, \\ a_{13} x_{10} + a_{23} x_{20} + (a_{33} - \lambda b_3) x_{30} + a_{34} x_{40} &= 0, \\ a_{14} x_{10} + a_{24} x_{20} + a_{34} x_{30} + (a_{44} - \lambda x_4) x_{40} &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser vier homogenen linearen Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$3. \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda b_3 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} - \lambda b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für λ. Hat man sie aufgelöst, so setzt man die Wurzeln der Reihe in das System 2. ein und erhält somit aus den vier Wurzeln der Gleichung 3. vier verschiedene Systeme zur Bestimmung der Coordinaten x_{k0}. Bezeichnet man mit α_{ik} den Coefficienten des k-Elements der i-ten Zeile von C, so hat man

4. $$x_{10} : x_{20} : x_{30} : x_{40} = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3} : \alpha_{i4}$$

wo nun die α_{ik} für die vier Wurzeln λ im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen Es *giebt somit vier Punkte im Raume, die für zwei Flächen II. O. dieselbe Polarebene haben.*

Ist Π_1 ein Punkt, der für F und f dieselbe Polarebene T_1 hat, und hat Π_2 für F und f dieselbe Polarebene T_2, so liegen Π_2 auf T_1 und Π_1 auf T_2. Denn angenommen, Π_2 läge nicht auf T_1, mithin auch Π_1 nicht auf T_2, so betrachte man auf der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ die beiden Involutionen (No. 12), deren Paare durch die Punkte dieser Geraden und durch die Schnittpunkte derselben mit den Polarebenen der Punkte in Bezug auf F bez. f gebildet werden. Diese beiden Involutionen haben zwei gemeinsame Paare, nämlich die, zu welchen Π_1 und Π_2 gehören. Wenn aber zwei Involutionen zwei gemeinsame Paare haben, so sind sie identisch. Folglich treffen die Polarebenen jedes Punktes Π der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ in Bezug auf F und f diese Gerade in demselben Punkte; da sie nun ausserdem beide durch den Schnitt von T_1 und T_2 gehen, so sind sie identisch. Es fallen also für alle Punkte der Geraden $\Pi_1 \Pi_2$ die Polarebenen bezüglich F und f zusammen. Dies widerspricht der Thatsache, dass die Gleichung $C = 0$ im Allgemeinen nicht durch unendlich viele Wurzeln λ erfüllt wird, sowie dass im Allgemeinen nicht für eine Wurzel λ der Gleichung $C = 0$ die vier Gleichungen des Systems 2. sich auf zwei Gleichungen reduciren, in welchem Falle allerdings alle Punkte auf dem Schnitte der durch die beiden übrig bleibenden Gleichungen dargestellten Ebenen zusammenfallende Polarebenen haben würden.*)

Hieraus folgt, dass im allgemeinen Falle, wenn nicht mehr als vier Punkte vorhanden sind, deren Polarebenen für f und F zusammenfallen, die Polarebene jedes der vier Punkte P_0 durch die drei andern geht.

Zwei Flächen II. O. haben also ein gemeinsames Polartetraëder. Hat die Gleichung $C = 0$ vier reale Wurzeln, so sind alle Ecken dieses Tetraëders real. Hat $C = 0$ ein Paar conjugirt complexe Wurzeln, so sind zwei Ecken des Tetraëders und die ihnen gegenüberliegenden Ebenen real; die Gerade der beiden realen Ecken und die Schnittlinie ihrer Polarebenen bilden zwei Gegenkanten des Polartetraëders und sind für beide Flächen f und F conjugirte

*) Von der Richtigkeit dieser Bemerkungen überzeugt man sich, indem man die Gleichungen zweier Flächen bildet, die ein gemeinsames Polartetraëder haben. Die Gleichungen in Bezug auf dieses Tetraëder seien

$$F = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0 \quad f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Die Gleichung $C = 0$ wird jetzt $(a_1 - \lambda b_1)(a_2 - \lambda b_1)(a_3 - \lambda b_3)(a_4 - \lambda_4 b) = 0$, und ergiebt für λ die vier Auflösungen $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$, $a_3 : b_3$, $a_4 : b_4$.

Aus den Gleichungen 2. ergeben sich, wenn die Verhältnisse der a von den Verhältnissen der entsprechenden b verschieden sind, die Ecken des Achsentetraëders als Lösungen der Aufgabe.

Nur dann, wenn zwei Coefficienten in f dasselbe Verhältniss haben, wie die entsprechenden in F, tritt eine Abweichung ein. Ist z. B. $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, und sind ξ_1, ξ_2 die Coordinaten eines auf $A_1 A_2$ liegenden Punktes P, so sind die Polarebenen von P

$$a_1 \xi_1 \cdot x_1 + a_2 \xi_2 \cdot x_2 = 0, \quad b_1 \xi_1 \cdot x_1 + b_2 \xi_2 \cdot x_2 = 0,$$

und diese sind identisch, da $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$.

Ist $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$, so haben alle auf $A_1 A_2 A_3$ liegenden Punkte dieselbe Polarebene für f und F.

Gerade. Hat $C = 0$ keine reale Wurzel, so sind die gleichbezifferten Coordinaten je zweier Punkte, welche einem Paare conjugirt complexer Wurzeln von μ zugehören, conjugirt complex; daher werden auch die Gleichungen der Polarebenen zweier solchen conjugirt complexen Punkte conjugirt complex.

Aehnlich, wie die Bemerkungen über conjugirt complexe Punkte und Geraden in der Ebene, leitet man die Sätze ab: *Zwei conjugirt complexe Punkte genügen den Gleichungen einer durch sie bestimmten realen Geraden. Zwei conjugirt complexe Ebenen haben eine reale Schnittgerade.*

Daher schliessen wir: *Zwei Flächen II. O. haben in jedem Falle ein Paar reale conjugirte Gerade gemein.*

Diese Untersuchung kann auch mit Hülfe der Gleichungen in Ebenencoordinaten durchgeführt werden.

Sind $$d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_3 u_3^2 + d_4 u_4^2 = 0$$
und $$c_{11} u_1^2 + 2 c_{12} u_1 u_2 + \ldots + c_{44} u_4^2 = 0$$

die Gleichungen von F und f in Ebenencoordinaten, so erhält man die Coordinaten der Ebenen, deren Pole für f und F zusammenfallen, aus drei Gleichungen des Systems

5. $$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda d_1) u_1 + c_{12} u_2 + c_{13} u_3 + c_{14} u_4 &= 0, \\ c_{12} u_1 + (c_{22} - \lambda d_2) u_2 + c_{23} u_3 + c_{24} u_4 &= 0, \\ c_{13} u_1 + c_{23} u_2 + (c_{33} - \lambda d_3) u_3 + c_{34} u_4 &= 0, \\ c_{14} u_1 + c_{24} u_2 + c_{34} u_3 + (c_{44} - \lambda d_4) u_4 &= 0, \end{aligned}$$

wobei λ eine Wurzel der Gleichung ist

6. $$\Gamma \equiv \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda d_1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda d_2 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - \lambda d_3 & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - \lambda d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen $C = 0$ und $\Gamma = 0$ haben daher immer die gleiche Anzahl reale Wurzeln.

22. Die soeben mitgetheilte Untersuchung hängt aufs Engste zusammen mit der Frage nach den *Kegeln II. O., die durch die Schnittcurve zweier Flächen II. O. gehen*, sowie mit der Frage nach den *Grenzflächen II. Kl., die den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. Kl. eingeschrieben sind*; oder allgemeiner: mit der Frage nach den Kegeln II. O., die zu einem Flächenbüschel II. O. gehören, bez. nach den Grenzflächen, die zu einer Schaar von Flächen II. Kl. gehören.

Sind f und F zwei quadratische Functionen in Punktcoordinaten

1. $$\begin{aligned} f &= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{44} x_4^2, \\ F &= b_{11} x_1^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + \ldots + b_{44} x_4^2, \end{aligned}$$

so versteht man unter einem *Flächenbüschel II. O. die Gesammtheit aller Flächen, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind*

2. $$\varphi = \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0.$$

Alle Punkte, für welche $f = 0$ und zugleich $F = 0$, genügen auch der Gleichung $\varphi = 0$. Jede Fläche des Büschels enthält also alle den Flächen $f = 0$ und $F = 0$ gemeinsamen (realen oder imaginären) Punkte.

Umgekehrt: Alle Flächen II. O., die durch eine gegebene Raumcurve IV. O. I. Sp. gehen, bilden ein Büschel. Denn es ist in § 9, No. 3 nachgewiesen worden, dass die Gleichung jeder dieser Flächen die Form 2. hat, wobei $f = 0$ und $F = 0$ die Gleichungen zweier bestimmten, die Raumcurve enthaltenden Flächen II. O. sind. Ferner folgt aus § 9, No. 2: Durch acht Punkte, die nicht ein Schnittpunktsystem dreier Flächen II. O. bilden, ist ein Büschel von Flächen II. O. bestimmt.

Sind $f = 0$ und $F = 0$ quadratische Functionen in Ebenencoordinaten

$$3. \quad \begin{aligned} f &\equiv c_{11}u_1^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \ldots + c_{44}u_4^2, \\ F &\equiv d_{11}u_1^2 + 2d_{12}u_1u_2 + \ldots + d_{44}u_4^2, \end{aligned}$$

so versteht man unter einer Schaar von Flächen II. Kl. die Gesammtheit aller der Flächen, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

$$4. \quad \varphi = \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0.$$

Jede Fläche der Schaar wird von allen gemeinsamen (realen oder imaginären) Tangentenebenen der Flächen $f = 0$ und $F = 0$ berührt. Alle Flächen II. Kl., die der abwickelbaren Fläche der den Flächen $f = 0$ und $F = 0$ gemeinsamen Tangentenebenen eingeschrieben sind, bilden eine Schaar; denn die Gleichung jeder solchen Fläche ist nach § 10, No. 7 von der Form 4.

Wir wählen ein Polartetraëder von $F = 0$ als Coordinatentetraëder, so dass also die Gleichungen dieser Fläche sind

in Punktcoordinaten: $b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2$,

in Ebenencoordinaten: $d_1u_1^2 + d_2u_2^2 + b_3u_3^2 + d_4u_4^2$.

Soll nun $\varphi = 0$ ein Kegel sein, so müssen λ_1 und λ_2 so gewählt werden, dass die Gleichung erfüllt wird (No. 6)

$$5. \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_1 & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{14} \\ \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 a_{23} & \lambda_1 a_{24} \\ \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{23} & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_3 & \lambda_1 a_{34} \\ \lambda_1 a_{14} & \lambda_1 a_{24} & \lambda_1 a_{34} & \lambda_1 a_{44} + \lambda_2 b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dividirt man jede Zeile dieser Determinante durch λ_1 und ersetzt dann $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $(-\lambda)$, so erhält man die Determinante C in No. 21.

Die Kegelspitzen sind die Lösungen des Systems

$$6. \quad \varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \quad \varphi_4' = 0,$$

wenn man für λ_1 und λ_2 Werthe eingeführt hat, die der Gleichung 5. genügen. Stellt man diese Gleichungen auf und ersetzt $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $(-\lambda)$, so werden dieselben mit dem System No. 21, 3 identisch. Die Ecken des zwei Flächen II. O. gemeinsamen Polartetraeders sind zugleich die Spitzen der Kegel, welche in dem durch die beiden Flächen bestimmten Büschel enthalten sind.

Soll die Fläche φ der durch f und F bestimmten Schaar eine Grenzfläche sein, so muss die Gleichung erfüllt sein (No. 6)

$$7. \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 d_1 & \lambda_1 c_{12} & \lambda_1 c_{13} & \lambda_1 c_{14} \\ \lambda_1 c_{12} & \lambda_1 c_{22} + \lambda_2 d_2 & \lambda_1 c_{23} & \lambda_1 c_{24} \\ \lambda_1 c_{13} & \lambda_1 c_{23} & \lambda_1 c_{33} + \lambda_2 d_3 & \lambda_1 c_{34} \\ \lambda_1 c_{14} & \lambda_1 c_{24} & \lambda_1 c_{34} & \lambda_1 c_{44} + \lambda_2 d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man $(-\lambda)$ an die Stelle von $\lambda_2 : \lambda_1$, so geht diese Gleichung in $\Gamma = 0$ (No. 21, 6) über; durch dieselbe Substitution gehen die Gleichungen

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \quad \varphi_4' = 0,$$

deren Verein von den Coordinaten der Doppelebene einer Grenzfläche erfüllt wird, in das System No. 21, 5 über. Die Ebenen des zwei Flächen II. O. gemeinsamen Polartetraeders sind daher die Doppelebenen, die in der von den beiden Flächen bestimmten Schaar enthalten sind.

23. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$$

in Punkt- oder in Ebenencoordinaten sind

$$\varphi_k' \equiv \lambda_1 f_k' + \lambda_2 F_k'.$$

A. Daher ist die Gleichung der Polarebene des Punktes P_0

$$T \equiv (\lambda_1 f_{10}' + \lambda_2 F_{10}')x_{10} + \ldots + (\lambda_1 f_{40}' + \lambda_2 F_{40}')x_{40} = 0,$$

oder

$$1. \quad T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0,$$

wobei

$$2. \quad \begin{aligned} T_1 &\equiv f_{10}'x_1 + f_{20}'x_2 + f_{30}'x_3 + f_{40}'x_4 = 0, \\ T_2 &\equiv F_{10}'x_1 + F_{20}'x_2 + F_{30}'x_3 + F_{40}'x_4 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_0 bezüglich der Flächen $f = 0$ und $F = 0$ sind. Hieraus folgt: Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels II. O. bilden ein Ebenenbüschel; die verschiedenen Punkten zugehörigen Büschel von Polarebenen sind projectiv.

Die der Geraden P_0P_1 in Bezug auf $\varphi = 0$ conjugirte Gerade ist der Schnitt der Polarebenen von P_0 und P_1 bezüglich $\varphi = 0$; diese beiden Polarebenen sind entsprechende Ebenen der beiden projectiven Polarebenenbüschel, die den Punkten P_0 und P_1 in Bezug auf die Flächen des Büschels zugehören. Daher folgt: Die Geraden, welche einer Geraden γ in Bezug auf alle Flächen eines Büschels conjugirt sind, bilden ein System von Geraden einer Regelfläche II. O.; die Geraden des andern Systems auf derselben Regelfläche sind die Träger der Polarenbüschel, welche den Punkten der Geraden γ in Bezug auf die Flächen des Büschels zugehören.

B. Die Gleichung des Poles einer Ebene T_0 für die Fläche einer Schaar $\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$ ist

$$P \equiv (\lambda_1 f_{10}' + \lambda_2 F_{10}')u_1 + \ldots (\lambda_1 f_{40}' + \lambda_2 F_{40}')u_4 = 0.$$

Daher hat man

$$3. \quad P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

wobei

$$4. \quad \begin{aligned} P_1 &\equiv f_{10}' \cdot u_1 + f_{20}' \cdot u_2 + f_{30}' \cdot u_3 + f_{40}' \cdot u_4 = 0, \\ P_2 &\equiv F_{10}' \cdot u_1 + F_{20}' \cdot u_2 + F_{30}' \cdot u_3 + F_{40}' \cdot u_4 = 0 \end{aligned}$$

die Pole von T_0 in Bezug auf $f = 0$ und $F = 0$ sind. Man schliesst hieraus: Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen einer Schaar liegen auf einer Geraden. Die geradlinigen Polreihen, welche irgend zwei Ebenen in Bezug auf die Flächen der Schaar zugehören, sind projectiv.

Die Pole zweier Ebenen T_0 und T_1 in Bezug auf die Fläche

$$\varphi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$$

sind entsprechende Punkte der beiden projectiven zu T_0 und T_1 gehörigen Polreihen; ihre Verbindungsgerade ist die dem Durchschnitt der Ebenen T_0 und T_1 in Bezug auf φ conjugirte Gerade. Daher folgt: Die Geraden, welche einer Geraden γ in Bezug auf die Flächen einer Schaar conjugirt sind, bilden die Geraden eines Systems einer Regelfläche II. O.; die Geraden des andern Systems derselben Regelfläche sind die Träger der Polreihen, welche den durch die Gerade γ gehenden Ebenen in Bezug auf die Flächen der Schaar zugehören.

Das Centrum einer Fläche II. O. ist der Pol der unendlich fernen Ebene; daher folgt: Die Centra aller Flächen einer Schaar liegen auf einer Geraden.

Wenn ein Paar Pol und Polarebene für beide Flächen f und F zusammengehören, so gehören sie auch für jede Fläche des durch f und F bestimmten

Büschel oder der durch beide Flächen bestimmten Schaar zusammen. Alle Flächen II. O., die ein Büschel oder eine Schaar bilden, haben also ein gemeinsames (reales oder imaginäres) Polartetraëder.

24. Bezieht man die Gleichungen der Flächen eines Büschels oder einer Schaar auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, welches eine gegebene Ebene zur XY-Ebene hat, und setzt in der Gleichung einer Fläche des Büschels bez. der Schaar $z = 0$, bez. $w = 0$, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts, in welchem φ von der XY-Ebene geschnitten, bez. in welchem φ von dem unendlich fernen Punkte der Z-Achse aus auf die XY-Ebene projicirt wird.

Bezeichnet man die linken Seiten der Gleichungen dieser Kegelschnitte dadurch, dass man die linke Seite der Gleichung der betreffenden Fläche in Klammer setzt, so hat man

$$(\varphi) \equiv \lambda_1(f) + \lambda_2(F) = 0 .$$

Hieraus folgt: Die Flächen eines Büschels werden von einer Ebene in Kegelschnitten eines Büschels geschnitten. Die Flächen einer Schaar werden von einem unendlich fernen (ebenso wie von einem endlich fernen) Punke aus in Kegelschnitten einer Schaar auf eine Ebene projicirt.

Dies ergiebt sofort: Die Flächen einer Schaar werden von einer Geraden in Punktpaaren einer quadratischen Involution geschnitten; die Involutionen auf allen Geraden sind projectiv, und zwar entsprechen sich je zwei derselben Fläche angehörige Paare von Schnittpunkten; ferner sind diese Involutionen den Punktreihen projectiv, in denen die Flächen des Büschels die Geraden schneiden, die durch einen gemeinsamen Punkt der Flächen des Büschels gehen.

Die Flächen einer Schaar werden von einer Geraden aus von Ebenenpaaren berührt, die eine quadratische Involution bilden; diese Involutionen sind projectiv, und zwar entsprechen sich die Paare, welche dieselbe Fläche berühren; sie sind ferner mit den Ebenenbüscheln projectiv, deren Ebenen die Flächen der Schaar berühren und deren Träger auf einer gemeinsamen Berührungsebene der Flächen der Schaar liegen.

25. Wenn f und F und φ drei von einander unabhängige quadratische Functionen in Punktcoordinaten sind, so kann man durch drei willkürliche Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 neue quadratische Functionen von der Form bilden

1. $$\psi \equiv \lambda_1 f + \lambda_2 F + \lambda_3 \varphi .$$

Die Gesammtheit der Flächen $\psi = 0$ bezeichnet man als ein Flächenbündel.

Die Gleichung $\psi = 0$ wird von den Gruppen von Coordinaten erfüllt, welche dem Vereine von Gleichungen

$$f = 0 , \quad F = 0 , \quad \varphi = 0$$

genügen. Hieraus folgt: Alle Flächen II. O. eines Bündels haben acht gemeinsame Punkte. Umgekehrt: Die Flächen II. O., die durch sieben gegebene Punkte gehen, bilden ein Bündel. Denn nach § 9, No. 6 hat jede solche Fläche eine Gleichung von der Form 1., wobei die Functionen f, F, φ durch die sieben gegebenen Punkte bestimmt sind. Durch die gegebenen sieben Punkte ist noch ein achter Punkt bestimmt, der allen Flächen des Bündels angehört.

Die Gleichung der Polarebene eines Punktes P_0 in Bezug auf die Fläche ψ eines Bündels ist

2. $$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0 ,$$

wobei

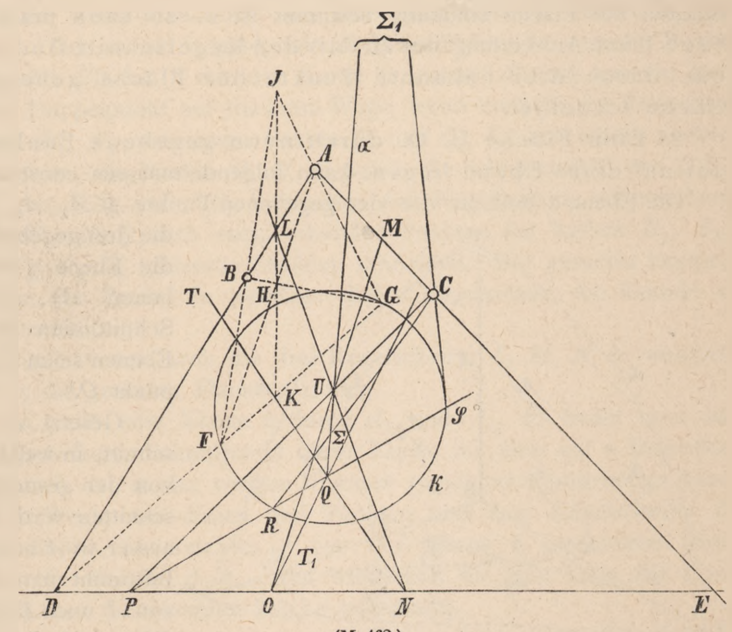
$$T_1 \equiv f_{10}' x_1 + f_{20}' x_2 + f_{30}' x_3 + f_{40}' x_4 = 0 ,$$
$$T_2 \equiv F_{10}' x_1 + F_{20}' x_2 + F_{30}' x_3 + F_{40}' x_4 = 0 ,$$
$$T_3 \equiv \varphi_{10}' x_1 + \varphi_{20}' x_2 + \varphi_{30}' x_3 + \varphi_{40}' x_4 = 0$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_0 in Bezug auf die Flächen f, F, φ sind. Dies lehrt: Die Polarebenen eines Punktes P_0 in Bezug auf die Fläche II O. eines Bündels gehen durch einen Punkt P_0'. Die Beziehung dieser Punkte ist reciprok (No. 11); sie werden als conjugirte Punkte des Flächenbündels bezeichnet.

§ 13. Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten.

1. Construction eines Kegels zweiter Ordnung, der einen gegebenen Kegelschnitt k enthält und durch drei gegebene Punkte geht.

Die Mantellinien des gesuchten Kegels, die durch die gegebenen Punkte A, B und C gehen, sind Mantellinien der drei Kegel γ_1, γ_2, γ_3, welche durch k gehen, und der Reihe nach A, B und C zu Spitzen haben; folglich ist die Spitze Σ des gesuchten Kegels ein gemeinsamer Punkt der drei Kegel γ_1, γ_2, γ_3. Je zwei dieser drei Kegel haben den Kegelschnitt k gemein und schneiden sich daher ausser dem noch in einer ebenen Curve (§ 9, No. 5). Ist D



(M. 462.)

die Spur der Geraden AB auf der Ebene k und legt man eine Gerade durch D, welche k in F und G trifft, so sind H und J zwei den Kegeln γ_1 und γ_2 gemeinsame Punkte; denn AF und AG sind Mantellinien von γ_1, und BF, BG sind Mantellinien von γ_2. Die Gerade HJ liegt auf der zweiten Schnittebene von γ_1 und γ_2; sie trifft DG in dem Punkte K, der zu F, G, D harmonisch ist, also in einem Punkte der Polaren T des Punktes D in Bezug auf k. Die Ebene, welche die Schnittpunkte von γ_1 und γ_2 enthält, die nicht auf k liegen, ist also durch die Polare T und durch den Punkt L bestimmt, der zu A, B und D harmonisch liegt.

Ebenso ist die Ebene, welche die Punkte enthält, die γ_1 und γ_3 ausserhalb

k noch gemein haben, durch die Polare T_1 der Spur E der Geraden AC in Bezug auf den Kegelschnitt k und durch den vierten harmonischen Punkt M zu A, C und E bestimmt.

Die Ebene ABC wird von der Ebene LT in LN, und von der Ebene MT_1 in MO geschnitten; mithin ist α die Schnittlinie von LT und MT_1. Die Gerade α trifft daher die Kegel γ_1, γ_2, γ_3 in den beiden Punkten, welche diese drei Kegel ausser k noch gemein haben. Diese beiden Punkte können als Schnittpunkte von α mit irgend einem der drei Kegel leicht gefunden werden.

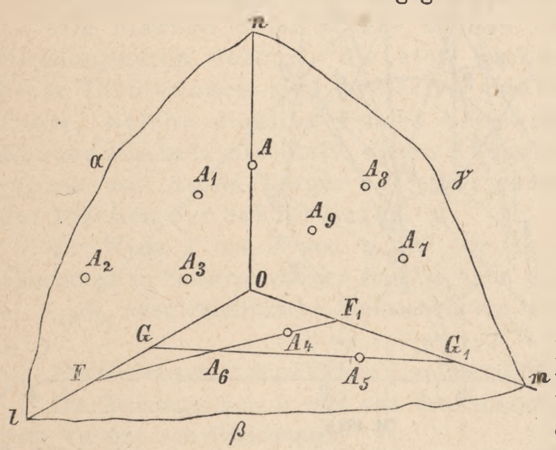
Bestimmt man z. B. die Spur P der Geraden CU, und schneidet k durch die Gerade PQ, so sind die Schnittpunkte Σ und Σ_1 der Geraden α mit CR und CS die gesuchten Spitzen der beiden durch k und A, B, C bestimmten Kegel.

Diese beiden Kegel haben ausser k noch einen Kegelschnitt gemein, der auf der Ebene A, B, C liegt; folglich ist die Projection von k auf die Ebene ABC von den Projectionscentren Σ und Σ_1 aus ein und derselbe Kegelschnitt k_1. Dieser Kegelschnitt k_1 ist allen Flächen II. O. gemein, die durch k und A, B, C gehen.

Sind daher ein ebener Schnitt einer Fläche II. O., und noch weitere vier Punkte der Fläche bekannt, die nicht in einer Ebene liegen — wodurch die Fläche eindeutig bestimmt ist — so kann man auf linearem Wege (ohne Anwendung des Zirkels) den Kegelschnitt finden, in welchem jede durch drei bekannte Punkte der Fläche gehende Ebene die Fläche schneidet.

2. Eine Fläche II. O. durch neun gegebene Punkte, von denen vier auf einer Ebene liegen, kann folgendermaassen construirt werden:

Die Ebene α enthalte die vier gegebenen Punkte A, A_1, A_2, A_3, die Ebene β die drei gegebenen A_4, A_5, A_6, die Ebene γ die beiden gegebenen A_7, A_8 und A; die Schnittlinien je zweier dieser Ebenen seien l, m, n, ihr Schnittpunkt O.



(M. 463.)

Gesetzt L sei der Kegelschnitt, in welchem die Ebene α von der gesuchten Fläche f geschnitten wird; n werde von L ausser in A noch in B getroffen. Bestimmt man die Schnittpunkte von l und L, und legt durch diese und durch A_4, A_5, A_6 einen Kegelschnitt M, so ist dieser auf f enthalten; ferner liegt auch der Kegelschnitt N auf f, der durch die Schnittpunkte von m und M, sowie durch A_7, A_8, A geht.

Der Punkt C, welchen N mit n ausser A noch gemein hat, muss mit B zusammenfallen.

Alle Kegelschnitte L_1, L_2, L_3 . . . des Büschels $AA_1A_2A_3$ treffen n (ausser in A) in einer Punktreihe B_1, B_2, B_3 und l in Punktpaaren einer quadratischen Involution λ_1, λ_2, λ_3 . . . Die Reihe B_1, B_2, B_3 . . . ist mit der Involution λ_1, λ_2, λ_3 . . . projectiv.

Die beiden Kegelschnitte M_1 und M_2, welche durch A_4, A_5, A_6 und ausserdem noch der Reihe nach durch die Punktpaare λ_1 und λ_2 gehen, haben noch einen vierten realen Schnittpunkt A' (ausser A_4, A_5, A_6). Ein Kegelschnitt M_i dieses Büschels $A_4A_5A_6A'$, der durch einen Punkt des Paares λ_i geht, enthält auch den andern, da die Kegelschnitte dieses Büschels die Gerade l in den Punktpaaren der durch die beiden Paare λ_1 und λ_2 bestimmten Involution treffen. Die Kegelschnitte M_1, M_2, M_3, M_4 . . . welche der Reihe nach durch die Paare λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 . . . und ausserdem alle durch die Punkte A_4, A_5, A_6 gehen, bilden daher ein Büschel, und treffen mithin die Kante m in Punktpaaren μ_1, μ_2, μ_3 . . einer Involution, die mit der Involution λ_1, λ_2, λ_3 . . . projectiv ist.

Die Kegelschnitte N_1, N_2, N_3, . . . , die durch die Paare μ_1, μ_2, μ_3, . . und ausserdem noch alle durch die drei Punkte A_7, A_8, A gehen, bilden ebenfalls ein Büschel, und treffen die Gerade n ausser in A in einer Punktreihe C_1, C_2, C_3 . . . , die mit der Involution μ_1, μ_2, μ_3 . . . projectiv ist.

Da die Reihe B_1, B_2 . . . mit der Involution λ_1, λ_2 . . ; da diese mit der Involution μ_1, μ_2 . . . ; und da letztere mit der Reihe C_1, C_2, . . . projectiv ist, so sind auch die Reihen B_1, B_2, B_3 . . . und C_1, C_2, C_3 . . . projectiv.

Diese beiden Reihen haben offenbar den Punkt O zum Doppelpunkte. Sie sind daher bestimmt, wenn man noch zwei Paar entsprechende Punkte B_1, C_1 und B_2, C_2 kennt. Der zweite Doppelpunkt B dieser Reihen ist nun der Punkt, welchen die gesuchte Fläche f mit der Kante m ausser A noch gemein hat. Man findet diesen Doppelpunkt auf linearem Wege, wenn man (in der Projection auf die Bildfläche) B_1, B_2 von einem Punkte D, und C_1, C_2 von einem andern Punkte E aus projicirt; die Punkte O, D, E, sowie die Schnittpunkte von DB_1 und EC_1, sowie von DB_2 und EC_2 bestimmen den Kegelschnitt, auf welchem sich je zwei von D und E nach entsprechenden Punkten der Reihen B_1, B_2, B_3 . . . und C_1, C_2, C_3 . . . gehende Strahlen schneiden. Der gesuchte Doppelpunkt P ist daher der Punkt, in welchem dieser Kegelschnitt die Gerade m (ausser in O) schneidet.

Hat man B, so hat man auch die drei Kegelschnitte L, M, N, in welchen die Ebenen α, β, γ die gesuchte Fläche f treffen.

Legt man nun z. B. eine Ebene δ durch A_1 und A_4, so findet man auf linearem Wege den weiteren Schnittpunkt dieser Ebene mit dem auf α liegenden Kegelschnitte L; nach der in der vorigen Nummer gegebenen Construction kann man (auf linearem Wege) aus diesen drei Punkten und dem Kegelschnitte N den Kegelschnitt finden, in welchem f von der Ebene δ geschnitten wird. Dreht man δ um die Gerade A_1A_4, und wiederholt für jede Lage die Construction, so erhält man die gesuchte Fläche vollständig.

3. Man kann diese Lösung so anordnen, dass alle dabei auftretenden Constructionen linear sind.

Man durchschneide die Kanten l und m mit den Geraden A_4A_6 und A_5A_6, und nehme als Kegelschnitte L_1 und L_2 die durch F und G gehenden des Büschels $AA_1A_2A_3$; die Punkte F' und G', in welchen L_1 und L_2 die Kante l noch schneiden, geben die beiden Paare FF' und GG'; dies sind die Paare λ_1 und λ_2 der auf der Kante l liegenden Involution.

Die Geraden FA_4 und $F'A_5$ bilden dann den Kegelschnitt M_1 und die Geraden GA_5 und $G'A_4$ den Kegelschnitt M_2.

Durchschneidet man die Kante m mit der Geraden $F'A_5$ in F_1' und mit $G'A_4$ in G_1', so ist F_1F_1' das Paar μ_1, und G_1G_1' das Paar μ_2 der auf m

liegenden Involution. Die Bestimmung von C_1 und C_2, sowie alles Weitere erfolgt auf linearem Wege.

4. Wir ersetzen A durch einen andern Punkt A' der Kante n und bestimmen auf gleiche Weise den Kegelschnitt N', in welchem die durch die neun Punkte $A' A_1 A_2 \ldots A_8$ gehende Fläche f' die Ebene γ schneidet. Jede Fläche II. O., die durch die acht Punkte $A_1 \ldots A_8$ geht, gehört zu dem durch die Flächen f und f' bestimmten Büschel, und schneidet daher die Ebene γ in einem Kegelschnitte, der zu dem durch N und N' bestimmten Büschel gehört.

Die durch die neun Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_9$ bestimmte Fläche II. O. F wird daher von der Ebene γ in dem Kegelschnitte $\mathfrak{N}$ des Büschels NN' geschnitten, der durch A_9 geht.

Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{N}$ kann linear gefunden werden, wenn man, von einem dritten Punkte A'' der Kante γ ausgehend, noch einen Kegelschnitt N'' des Büschels NN' ermittelt. Durchschneidet man mit der Geraden $A_8 A_9$ die Kegelschnitte des Büschels $N, N', N'' \ldots$ in den Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ und durch einen andern durch A_8 gehenden Strahl in den Punkten $P_1', P_2', P_3', \ldots$, so sind diese Punktreihen projectiv; construirt man aus den bekannten drei Paar entsprechenden Punkten P_1, P_2, P_3 und P_1', P_2', P_3' zu A_9 den entsprechenden Punkt A_9' der Reihe $P_1' P_2'$, so liegt A_9' auf dem durch A_9 gehenden Kegelschnitte des Büschels NN'. Ermittelt man in gleicher Weise den auf einem dritten durch A_8 gezogenen Strahl liegenden Punkt A_9'' des Kegelschnitts $\mathfrak{N}$, so sind nun von $\mathfrak{N}$ fünf Punkte bekannt $A_7, A_8, A_9, A_9', A_9''$.

Um die Construction der gesuchten Fläche F linear zu vollenden, construirt man nach No. 1 mit Hülfe des Kegelschnitts $\mathfrak{N}$ den auf der Ebene α liegenden Kegelschnitt von F, und fährt dann fort wie bei der vorigen Construction (No. 2).*)

5. Der conjugirte Punkt eines Punktes P in Bezug auf das durch sieben gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmte Bündel von Flächen II. O. kann auf lineare Weise gefunden werden.

Construirt man von den Punkten 5, 6 und 7 aus die drei Geraden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, welche die beiden Geraden 1 2 und 3 4 schneiden, so bestimmen diese fünf Geraden eine Regelfläche II. O. f, die dem Bündel angehört. Eine Ebene, die durch P und eine dieser fünf Geraden, etwa durch die von 5 ausgehende α_1 gelegt ist, trifft die Fläche in einer zweiten Geraden α_1', die sich sofort ermitteln lässt; die Gerade β, welche durch den Schnitt Q von α_1 und α_1' geht und zu α_1, α_1' und QP harmonisch zugeordnet ist, liegt auf der Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche f.

Construirt man auf gleichem Wege noch eine zweite auf dieser Polarebene liegende Gerade, so ist damit diese Polarebene T gefundeu. In gleicher Weise erhält man die Polarebene T' von P in Bezug auf die Regelfläche des Bündels, welche die Geraden 1 3 und 2 4 enthält, sowie die Polarebene T'' in Bezug auf die Fläche, welche die Geraden 1 4 und 2 3 enthält. Der Schnittpunkt P' von T, T' und T'' ist der gesuchte zu P conjugirte Punkt.

6. Jede Fläche II. O., die dem durch acht gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bestimmten Büschel angehört, gehört zu den beiden Bündeln, welche durch die Gruppen von je sieben Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 bestimmt sind.

*) CHASLES, Comptes rendus hebdomaires des séances de l'academie des sciences, T. XLI, pag. 1103 (1855).

Die Polarebene von P in Bezug auf jede Fläche des Büschels 1, ... 8 geht daher durch die beiden Punkte P' und P'', die dem Punkte P in Bezug auf die Bündel 1, .. 6, 7 und 1, .. 6, 8 conjugirt sind.

Man hat somit auf linearem Wege die Gerade $P'P''$ gefunden, durch welche alle Polarebenen des Punktes P in Bezug auf die Flächen des Büschels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 hindurchgehen.

7. Die durch die neun Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bestimmte Fläche II. O. f gehört dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sowie dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 und dem Bündel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 an; die Polarebene von P in Bezug auf f geht daher durch die Punkte P', P'', P''', die dem Punkte P in Bezug auf diese drei Bündel conjugirt sind.

Hiernach ist die Polarebene eines Punktes in Bezug auf eine durch neun Punkte bestimmte Fläche II. O. linear construirt.

8. Construirt man so die Polarebene eines Punktes P der Ebene 1, 2, 3, so ist ihre Spur auf dieser Ebene die Polare von P für den auf 1, 2, 3 liegenden Kegelschnitt von f.

Durch die Punkte 1, 2, 3 und die Polare von P ist dieser Kegelschnitt bestimmt und kann linear construirt werden.

Von diesem Kegelschnitte aus kann nun die Construction der Fläche wie in No. 2 fortgesetzt werden.*)

§ 14. Projective Punktebenen, Geradenebenen, Ebenenbündel und Strahlenbündel.

1. Sind P_1, P_2, P_3 drei von einander unabhängige lineare Functionen in (homogenen oder gewöhnlichen) Ebenencoordinaten oder Liniencoordinaten, so kann die Gleichung eines vierten Punktes P_6 der Ebene $P_1 P_2 P_3$ bekanntlich in der Form geschrieben werden

$$P_6 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0,$$

wobei das Verhältniss $a_1 : a_2 : a_3$ durch die Lage von P_6 eindeutig bestimmt ist.

Aehnliches ergiebt sich für die Geraden einer Ebene und für die Ebenen eines Ebenenbündels, d. i. für die Ebenen, die durch einen Punkt (den Träger des Bündels) gehen.

Sind nämlich T_1, T_2, T_3 drei von einander unabhängige lineare Functionen in gewöhnlichen oder in homogenen Punktcoordinaten, so kann man eine lineare Function

2. $$T \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0.$$

durch geschickte Wahl des Verhältnisses $a_1 : a_2 : a_3$ so bestimmen, dass der Gleichung $T = 0$ durch zwei willkürlich gewählte Punkte P_1 und P_2 genügt wird. Bezeichnet man durch T_{i1} und T_{i2} die Werthe, welche die Function T_i annimmt, wenn man in ihr die variabeln Coordinaten durch die Coordinaten von P_1 bez. P_2 ersetzt, so hat man a_1, a_2, a_3 so zu wählen, dass die beiden Gleichungen erfüllt sind

$$a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31} = 0,$$
$$a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{33} = 0.$$

*) HESSE, CRELLES Journal Bd. 24, pag. 36 (1842). Mehrere Methoden zur Construction des achten Schnittpunkts dreier Flächen II. O., der Schnittcurve zweier Flächen II. O. aus acht Punkten, sowie einer Fläche II. O. aus neun Punkten findet man zusammengestellt und bearbeitet in der Abhandlung des Verfassers: Die Construction einer Fläche II. O. aus neun gegebenen Punkten und verwandte Constructionen, Leipzig 1881.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$a_1 : a_2 : a_3 = \begin{vmatrix} T_{21} & T_{31} \\ T_{22} & T_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} T_{31} & T_{11} \\ T_{33} & T_{12} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix}.$$

Sind nun T_1, T_2, T_3 lineare Functionen von Punktcoordinaten in der Ebene, so wird in der Form 2. die Gleichung jeder durch zwei willkürliche Punkte der Ebene gehenden Geraden, also jeder Geraden der Ebene dargestellt. Sind hingegen T_1, T_2, T_3 lineare Functionen von Punktcoordinaten im Raume, so wird die Gleichung

$$T = a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0$$

durch die Coordinaten des Punktes erfüllt, für welchen zugleich

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

die Ebene T geht also durch den gemeinsamen Punkt der Ebenen T_1, T_2 und T_3. Da nun ausserdem T durch die zwei willkürlichen Punkte P_1 und P_2 geht, so folgt, dass durch die Gleichung 2. jede durch den Schnittpunkt von T_1, T_2, T_3 gehende Ebene dargestellt werden kann.

2. Man denke sich in zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Ebenen Σ und Σ' je ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und die Punkte jeder Ebene durch ihre Coordinaten bestimmt.

Man kann nun jeden Punkt P der einen Ebene mit einem Punkte P' der andern dadurch verknüpfen, dass man für die Coordinaten von P und P' zwei für jede der beiden Coordinatenpaare lineare Gleichungen festsetzt

1. $$\begin{aligned} A &= a\,xx' + b\,xy' + c\,x + d\,yx' + e\,yy' + f\,y + g\,x' + h\,y' + i = 0, \\ B &= a_1 xx' + b_1 xy' + c_1 x + d_1 yx' + e_1 yy' + f_1 y + g_1 x' + h_1 y' + i_1 = 0, \end{aligned}$$

worin $a \ldots i$, $a_1 \ldots i_1$ gegebene Constanten sind, welche die Verwandtschaft charakterisiren.

Man kann diese Gleichungen in der Weise zusammenfassen

2. $$\begin{aligned} A &= A'x + B'y + C' = Ax' + By' + C = 0, \\ B &= D'x + E'y + F' = Dx' + Ey' + F = 0, \end{aligned}$$

worin $A' \ldots F'$ lineare Functionen von x', y', und $A \ldots F$ lineare Functionen von x, y bedeuten. Aus diesen Gleichungen erhält man x, y durch x', y' ausgedrückt und umgekehrt:

3. $$x = \frac{B'F' - C'E'}{A'E' - B'D'}, \quad y = \frac{C'D' - A'F'}{A'E' - B'D'},$$

4. $$x' = \frac{BF - CE}{AE - BD}, \quad y' = \frac{CD - AF}{AE - BD}.$$

Einer Geraden in Σ'

$$T' = \lambda x' + \mu y' + \nu = 0$$

entspricht in Σ die Linie, deren Gleichung man erhält, wenn man in T' die Coordinaten x', y' gemäss der Formeln 4. durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes x, y ersetzt. Dadurch erhält man nach Beseitigung des Nenners $(AE - BD)$ die Gleichung

5. $$K = \lambda(BF - CE) + \mu(CD - AF) + \nu(AE - BD) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades.

Für die X'-Achse, die Y'-Achse und die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ' ist der Reihe nach

$$\mu = \nu = 0, \quad \lambda = \nu = 0, \quad \lambda = \mu = 0.$$

Der X'-Achse entspricht daher der Kegelschnitt: $K_1 = BF - CE = 0$,
„ Y'-Achse „ „ „ „ „ : $K_2 = CD - AF = 0$,
„ unendlich fernen Geraden in Σ' entspricht : $K_3 = AE - BD = 0$.

Die drei Functionen K_1, K_2, K_3 sind, wie man sofort sieht, durch die identische Gleichung verbunden

$$AK_1 + BK_2 = -CK_3.$$

Für jeden Punkt, den die Kegelschnitte K_1 und K_2 gemein haben, verschwindet die linke Seite dieser Identität, folglich auch die rechte; jeder Schnittpunkt von $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ liegt daher entweder auf der Geraden $C = 0$, oder auf dem Kegelschnitte $K_3 = 0$. Die Gerade $C = 0$ trifft K_1 in den Punkten, für welche zugleich $B = 0$ oder $F = 0$, und den Kegelschnitt K_2 in den Schnittpunkten desselben mit $A = 0$ oder $F = 0$. Da nun im Allgemeinen die drei Geraden A, B, C nicht durch einen Punkt gehen, so folgt, dass die Gerade C nur einen Schnittpunkt von K_1 und K_2 enthält, nämlich den Punkt, in welchem C von F geschnitten wird. Wir schliessen hieraus: Die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 haben drei Punkte gemein. Diese Punkte gehören offenbar auch jedem Kegelschnitte K an; die Kegelschnitte K, welche den Geraden in Σ' entsprechen, haben daher drei gemeinsame Punkte. Dem Schnittpunkte zweier Geraden T_1', T_2' in Σ' entspricht der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte, welche T_1' und T_2' entsprechen.

Die drei Punkte, in denen sich die Kegelschnitte K der Ebene Σ schneiden, heissen die Grundpunkte auf Σ.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass jeder Geraden T auf Σ ein Kegelschnitt K' auf Σ' entspricht, und dass alle diese Kegelschnitte drei gemeinsame Punkte haben, welche als die Grundpunkte auf Σ' bezeichnet werden.

Der Verein der drei Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ kann durch die Proportion ersetzt werden

5. $$A : B : C = D : E : F.$$

Die drei Grundpunkte auf Σ erfüllen diese Proportion, für jeden dieser Punkte werden also die Verwandtschaftsgleichungen 2. identisch. Dies ergiebt: Jedem Grundpunkte auf Σ entsprechen die Punkte der Geraden

$$Ax' + By' + C = 0,$$

wenn man darin x, y durch die Coordinaten dieses Grundpunkts ersetzt; ebenso entsprechen jedem Grundpunkte auf Σ' die Punkte der Geraden

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

wenn man hierin für x', y' die Coordinaten dieses Grundpunkts setzt.

Das Vorhandensein dieser ausgezeichneten Punkte und Geraden in den Systemen Σ und Σ' fordert dazu auf, homogene Coordinatensysteme zu Grunde zu legen, und die ausgezeichneten Elemente zu den Achsendreiecken zu verwenden.

In Bezug auf zwei beliebig gewählte Coordinatendreiecke in Σ und Σ' erhält man die Verwandtschaftsgleichungen

$$G_1'x_1 + G_2'x_2 + G_3'x_3 = 0 \quad \text{und} \quad H_1'x_1 + H_2'x_2 + H_3'x_3 = 0,$$

worin die G' und H' lineare Functionen von x_1', x_2', x_3' sind.

Wir wollen nun in Σ die drei Geraden zu Coordinatenachsen wählen, welche den Grundpunkten in Σ' entsprechen, und zwar mögen den Grundpunkten Π_1', Π_2', Π_3' der Reihe nach die Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ entsprechen. Hieraus folgt, dass für die Coordinaten von Π_1' die Functionen G_2', G_3', H_2' und H_3' verschwinden, sowie ferner, dass für die Coordinaten von Π_2' die Functionen $G_1' = G_3' = H_1' = H_3' = 0$ sind, und endlich, dass man für die Coordinaten von Π_3' hat $G_1' = G_2' = H_1' = H_2' = 0$.

Dies zeigt, dass die Dreiecke $G_1' = 0$, $G_2' = 0$, $G_3' = 0$ und $H_1' = 0$, $H_2' = 0$, $H_3' = 0$ zusammenfallen, und dass die Grundpunkte Π_1', Π_2', Π_3' die Ecken dieses Dreiecks sind, so dass Π_i' der Seite $G_i' \equiv H_i'$ gegenüberliegt.

Wählt man nun dieses Dreieck zum Coordinatendreiecke in Σ', so reduciren sich die linearen Functionen G' und H' auf

$$G_1' \equiv a_1 x_1', \quad G_2' \equiv a_2 x_2', \quad G_3' \equiv a_3 x_3',$$
$$H_1' \equiv b_1 x_1', \quad H_2' \equiv b_2 x_2', \quad H_3' \equiv b_3 x_3'.$$

Man erhält somit die Verwandtschaftsgleichungen

6. $$a_1 x_1' x_1 + a_2 x_2' x_2 + a_3 x_3' x_3 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 x_1' x_1 + b_2 x_2' x_2 + b_3 x_3' x_3 = 0.$$

Aus der Symmetrie dieser Gleichungen sieht man, dass das Coordinatendreieck in Σ die Grundpunkte auf Σ zu Ecken hat, und dass denselben die Seiten des Coordinatendreiecks auf Σ' entsprechen.

Hieraus folgt der Satz: Den Grundpunkten in jedem der beiden Systeme entsprechen die Seiten des von den Grundpunkten des andern Systems gebildeten Dreiecks.

Den Punkten der Geraden auf Σ'

7. $$T \equiv \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0$$

entsprechen auf Σ die Punkte, für welche der Verein der Gleichungen 6. und 7. besteht; folglich die Punkte, für welche die Determinante verschwindet

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ a_1 x_1 & a_2 x_2 & a_3 x_3 \\ b_1 x_1 & b_2 x_2 & b_3 x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man dieselbe, so erhält man die Gleichung des der Geraden T' entsprechenden Kegelschnitts in der Form

8. $$\lambda_1 A_1 x_2 x_3 + \lambda_2 A_2 x_3 x_1 + \lambda_3 A_3 x_1 x_2 = 0,$$

wobei $A_1 \equiv a_2 b_3 - a_3 b_2$, $A_2 \equiv a_3 b_1 - a_1 b_3$, $A_3 \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Diese geometrische Verwandtschaft ist von Jacob Steiner*) aufgestellt und zur Lösung von Constructionsaufgaben verwendet worden.

3. Die durch die Gleichungen No. 2, 1 definirte Verwandtschaft erleidet eine wesentliche Abänderung, wenn jede der drei Functionen K_1, K_2, K_3 in zwei lineare Faktoren zerfällt, und wenn diese drei Produkte einen linearen Faktor gemeinsam haben.

Der Kegelschnitt K_1 wird durch zwei projective Strahlbüschel erzeugt, welche den Schnitt von B und C, sowie den von E und F zu Trägern haben. Zerfällt K_1 in zwei Gerade, so sind diese Büschel perspectiv; ist $G = 0$ die Gerade der beiden Träger, so sind C und F in der Form darstellbar

1. $$C \equiv G + \alpha B, \quad F \equiv \beta G + \alpha E.$$

Hieraus folgt nun

2. $$K_1 \equiv BF - CE \equiv G(\beta B - E).$$

Zerfällt K_3 in zwei Gerade, deren eine G ist, so schliesst man in gleicher Weise, dass B und E in der Form darstellbar sind

3. $$B \equiv G + \gamma A, \quad E \equiv \delta G + \gamma D.$$

Hiernach wird

4. $$K_3 \equiv AE - BD \equiv G(\delta A - D).$$

Führt man die Werthe 3. in 2. ein, so erhält man

5. $$K_1 \equiv G[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D].$$

*) Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832, pag. 254. Vergl. auch Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871, pag. 121.

Ferner erhält man

6. $$\begin{aligned} K_2 \equiv CD - AF &\equiv (G + \alpha B) D - (\beta G + \alpha E) A, \\ &\equiv (G + \alpha G + \alpha\gamma A) D - (\beta G + \alpha\delta G + \alpha\gamma D) A, \\ &\equiv G[(1 + \alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A]. \end{aligned}$$

Es zerfällt also auch K_2 in zwei Gerade, und die drei Geradenpaare K_1, K_2, K_3 haben die Gerade G gemein.

Der Kegelschnitt K, welcher der Geraden

$$T' \equiv \lambda x' + \mu y' + \nu = 0$$

entspricht, ist nun

$$K \equiv \lambda G[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D] + \mu G[(1 + \alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A] + \nu G(\delta A - D) = 0;$$

er zerfällt in die Gerade $G = 0$ und in die von T' abhängige Gerade

7. $$T \equiv \lambda[(\beta - \delta) G + \beta\gamma A - \gamma D] + \mu[(1 + \alpha) D - (\beta + \alpha\delta) A] + \nu(\delta A - D) = 0.$$

In den Auflösungen der Verwandtschaftsgleichungen in Bezug auf x', y' kann man den Faktor G in den Zählern und im Nenner unterdrücken, und erhält dieselben in der Form

8. $$x' = \frac{H_1}{H_3}, \quad y' = \frac{H_2}{H_3},$$

worin H_1, H_2, H_3 lineare Functionen der Coordinaten x, y bedeuten.

Man überzeugt sich leicht, dass die in den Functionen auftretenden Constanten immer so gewählt werden können, dass H_1, H_2, H_3 beliebig gewählte lineare Functionen werden.

Den Punkt P, welcher einem Punkte x', y' entspricht, bestimmt man nun, indem man die Gleichungen 8. in Bezug auf x und y auflöst.

Setzt man $H_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3$, $H_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1$, $H_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2$, so hat man die Gleichungen aufzulösen

$$(a_1 - a_3 x') x + (b_1 - b_3 x') y = -(c_1 - c_3 x'),$$
$$(a_2 - a_3 y') x + (b_2 - b_3 y') y = -(c_2 - c_3 y').$$

Man erhält hieraus

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1 + (b_2 c_3 - b_3 c_2) x' + (b_3 c_1 - b_1 c_3) y'}{a_1 b_2 - a_2 b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x' + (a_3 b_1 - a_1 b_3) y'},$$
$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2 + (a_3 c_2 - a_2 c_3) x' + (a_1 c_3 - a_3 c_1) y'}{a_1 b_2 - a_2 b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x' + (a_3 b_1 - a_1 b_3) y'}.$$

Man hat daher

9. $$x = H_1' : H_3', \quad y = H_2' : H_3',$$

wo H_1', H_2', H_3' lineare Functionen von x', y' sind.

Dieser besondere Fall der Steiner'schen Verwandtschaft zeichnet sich vor dem allgemeinen dadurch aus, dass der Kegelschnitt, welcher im allgemeinen Falle einer Geraden eines Systems entspricht, in eine feste und in eine veränderliche Gerade zerfällt.

Geht man von den Verwandtschaftsgleichungen 8. oder von ihren Umkehrungen 9. aus, so kommen diese festen Geraden in beiden Systemen nicht mehr zur Erscheinung, da der gemeinsame Faktor im Nenner und in den Zählern von x und y, sowie bei x' und y' bereits unterdrückt ist; die Grundpunkte, die in diesem Falle auf den festen Geraden liegen, kommen damit ausser Betracht.

Die durch die Gleichungen 8. oder 9. definirte Verwandtschaft ist daher dadurch charakterisirt, dass die Coordinaten jedes Punktes des einen Systems mit den Coordinaten des entsprechenden Punktes im andern Systeme durch lineare Gleichungen verbunden sind, und dass jeder Geraden des einen Systems eine Gerade des andern entspricht.

Diese Art der Verwandtschaft ist von MÖBIUS*) in die Geometrie eingeführt und als collineare Verwandtschaft bezeichnet worden; wir gebrauchen statt dessen die Bezeichnung projective Verwandtschaft.

4. Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist also durch die Gleichungen definirt

$$1. \qquad x' = \frac{H_1}{H_3}, \quad y' = \frac{H_2}{H_3},$$

aus denen sich die Umkehrungen ergeben

$$2. \qquad x = \frac{H_1'}{H_3'}, \quad y' = \frac{H_2'}{H_3'},$$

wobei H_1, H_2, H_3 und H_1', H_2', H_3' die linearen Functionen bezeichnen

$$3. \quad \begin{aligned} H_1 &\equiv A_1 x + B_1 y + C_1, \\ H_2 &\equiv A_2 x + B_2 y + C_2, \\ H_3 &\equiv A_3 x + B_3 y + C_3, \end{aligned} \qquad 4. \quad \begin{aligned} H_1' &\equiv \mathrm{A}_1 x' + \mathrm{B}_1 y' + \Gamma_2, \\ H_2' &\equiv \mathrm{A}_2 x' + \mathrm{B}_2 y' + \Gamma_2, \\ H_3' &\equiv \mathrm{A}_3 x' + \mathrm{B}_3 y' + \Gamma_3, \end{aligned}$$

und $\mathrm{A}_1 \ldots \Gamma_3$ abkürzungsweise gesetzt sind für

$$5. \quad \begin{aligned} \mathrm{A}_1 &\equiv B_2 C_3 - B_3 C_2; & \mathrm{A}_2 &\equiv C_2 A_3 - C_3 A_2; & \mathrm{A}_3 &\equiv A_2 B_3 - A_3 B_2; \\ \mathrm{B}_1 &\equiv B_3 C_1 - B_1 C_3; & \mathrm{B}_2 &\equiv C_3 A_1 - C_1 A_3; & \mathrm{B}_3 &\equiv A_3 B_1 - A_1 B_3; \\ \Gamma_1 &\equiv B_1 C_2 - B_2 C_1; & \Gamma_2 &\equiv C_1 A_2 - C_2 A_1; & \Gamma_3 &\equiv A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

5. Der Geraden der Ebene Σ'

$$T' \equiv u'x' + v'y' - 1 = 0$$

entspricht in Σ die Gerade

$$T \equiv u'H_1 + v'H_2 - H_3 = 0.$$

Ordnet man dies nach den Coordinaten, so erhält man

$$T \equiv (A_1 u' + A_2 v' - A_3)\, x + (B_1 u' + B_2 v' - B_3)\, y + (C_1 u' + C_2 v' - C_3) = 0.$$

Die Coordinaten dieser Geraden sind daher

$$6. \qquad u = \frac{J_1'}{J_3'}, \quad v = \frac{J_2'}{J_3'},$$

wenn $J_1' \equiv A_1 u' + A_2 v' - A_3$, $J_2' \equiv B_1 u' + B_2 v' - B_3$, $J_3' \equiv C_1 u' - C_2 v' + C_3$.

Umgekehrt entspricht der Geraden in Σ

$$T \equiv ux + vy - 1 = 0$$

die Gerade in Σ', welche die Gleichung hat

$$T' \equiv u \cdot H_1' + v \cdot H_2' - H_3' = 0,$$

deren Coordinaten also sind

$$7. \qquad u' = \frac{J_1}{J_3}, \quad v' = \frac{J_2}{J_3},$$

$J_1 \equiv \mathrm{A}_1 u + \mathrm{A}_2 v - \mathrm{A}_3$, $J_2 \equiv \mathrm{B}_1 u + \mathrm{B}_2 u - \mathrm{B}_3$, $J_3 = -\Gamma_1 u - \Gamma_2 v + \Gamma$.

Die Gleichungen 7. können auch dadurch erhalten werden, dass man die Gleichungen 6. nach u', v' auflöst.

Von den Gleichungen 6. (oder 7.) gelangt man zu den Verwandtschaftsgleichungen in No. 3 zurück; man kann daher die projective Verwandtschaft auch durch 6. und 7. definiren:

Zwei ebene Systeme sind projectiv, wenn die Coordinaten jeder Geraden der einen Ebene mit den Coordinaten der entsprechenden Geraden der andern Ebene durch lineare Gleichungen verbunden sind, und wenn jedem Strahlbüschel der einen Ebene ein Strahlbüschel der andern entspricht.

5. Wenn man mit H_{ik} den Werth bezeichnet, den die Function H_i annimmt,

*) MÖBIUS, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, pag. 179.

wenn man darin x, y durch die Coordinaten x_k, y_k eines Punktes P_k ersetzt, so entsprechen den Punkten P_1, P_2, P_3 des Systems Σ die Punkte P_1', P_2' P_3' des Systems Σ', deren Coordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{H_{11}}{H_{31}} \\ y_1' &= \frac{H_{21}}{H_{31}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2' &= \frac{H_{12}}{H_{32}} \\ y_2' &= \frac{H_{22}}{H_{32}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_3' &= \frac{H_{13}}{H_{33}} \\ y_3' &= \frac{H_{23}}{H_{33}} \end{aligned}\right\}.$$

Für den Punkt P_4', der dem Punkte P_4 entspricht, dessen Coordinaten sind

$$x_4 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad y_4 = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

ergeben sich die Functionen H

$$H_{i4} = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}(a_1 H_{i1} + a_2 H_{i2} + a_3 H_{i3}).$$

Daher hat man

$$x_4' = \frac{a_1 H_{11} + a_2 H_{12} + a_3 H_{13}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}, \quad y_4' = \frac{a_1 H_{21} + a_2 H_{22} + a_3 H_{33}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}.$$

Hierfür kann man setzen

$$1. \quad x_4' = \frac{b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3'}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad y_4' = \frac{b_1 y_1' + b_2 y_2' + b_3 y_3'}{b_1 + b_2 + b_3},$$

wobei

$$2. \qquad b_i = \frac{a_i H_{3i}}{a_1 H_{31} + a_2 H_{32} + a_3 H_{33}}.$$

Die Coordinaten jedes Punktes auf Σ ergeben sich für ein bestimmtes Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ aus den Formeln

$$3. \quad x = \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}, \quad y = \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}.$$

Nach 1. und 2. sind die Coordinaten des entsprechenden Punktes

$$4. \quad x' = \frac{\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}, \quad y' = \frac{\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}.$$

Umgekehrt schliesst man leicht: Wenn man zu vier Paar gegebenen entsprechenden Punkten die Coordinaten je zweier entsprechenden nach den Formeln 3. und 4. bestimmt, so sind die beiden Ebenen projectiv. Zugleich ist hieraus ersichtlich: Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist durch vier Paar entsprechende Punkte eindeutig bestimmt.

In gleicher Weise erhält man von den Gleichungen No. 4, 6 und 7 ausgehend: Die projective Verwandtschaft zweier Ebenen ist durch vier Paare entsprechende Gerade bestimmt; entsprechen sich T_1, T_2, T_3, T_4 und T_1', T_2', T_3', T_4' und ist

$$5. \quad \left.\begin{aligned} u_4 &= \frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ v_4 &= \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u_4' &= \frac{\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2' + \beta_3 u_3'}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \\ v_4' &= \frac{\beta_1 v_1' + \beta_2 v_2' + \beta_3 v_3'}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \end{aligned}\right\},$$

so folgen die Coordinaten je zweier entsprechenden Geraden aus den Formeln

$$6. \quad \begin{aligned} u &= \frac{\lambda_1 \alpha_1 u_1 + \lambda_2 \alpha_2 u_2 + \lambda_3 \alpha_3 u_3}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3}, & v &= \frac{\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \lambda_3 \alpha_3 v_3}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3}, \\ u' &= \frac{\lambda_1 \beta_1 u_1' + \lambda_2 \beta_2 u_2' + \lambda_3 \beta_3 u_3'}{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3}, & v' &= \frac{\lambda_1 \beta_1 v_1' + \lambda_2 \beta_2 v_2' + \lambda_3 \beta_3 v_3'}{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3}. \end{aligned}$$

Dieses Formelsystem kann durch das folgende ersetzt werden: Sind $P_1 = 0$

und $P_1' = 0$, $P_2 = 0$ und $P_2' = 0$, $P_3 = 0$ und $P_3' = 0$, $P_4 = 0$ und $P_4' = 0$ die Gleichungen von vier Paar entsprechenden Punkten und ist

$$P_4 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 , \qquad P_4' \equiv b_1 P_1' + b_2 P_2' + b_3 P_3' ,$$

so werden die Gleichungen jedes Paares entsprechender Punkte in der Form erhalten

7. $$\begin{aligned} P &\equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 = 0 , \\ P' &\equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_3 b_3 P_3' = 0 . \end{aligned}$$

Sind ferner $T_1 = 0$ und $T_1' = 0$, $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$, $T_3 = 0$ und $T_3' = 0$, $T_4 = 0$ und $T_4' = 0$ die Gleichungen von vier Paar entsprechenden Geraden und ist

$$T_4 \equiv \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 , \qquad T_4' \equiv \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 ,$$

so sind die Gleichungen jedes Paares entsprechender Geraden von der Form

8. $$\begin{aligned} T &\equiv \lambda_1 \alpha_1 T_1 + \lambda_2 \alpha_2 T_2 + \lambda_3 \alpha_3 T_3 = 0 . \\ T' &\equiv \lambda_1 \beta_1 T_1 + \lambda_2 \beta_2 T_2 + \lambda_3 \beta_3 T_3 = 0 . \end{aligned}$$

6. Nimmt man $\lambda_3 = 0$, so geben die Gleichungen No. 5, 7 entsprechende Punkte der Geraden $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$. Aus diesen Gleichungen

$$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0 , \qquad P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1 + \lambda_2 b_2 P_2' = 0$$

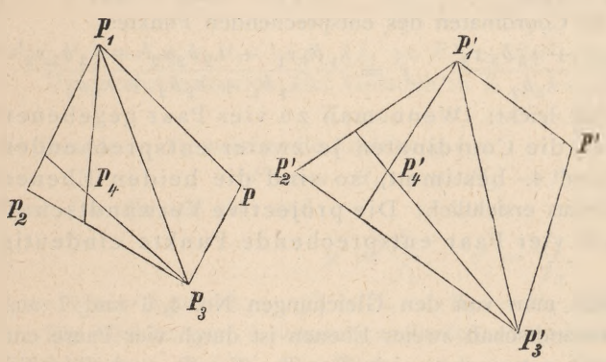
schliesst man: In projectiven ebenen Systemen sind je zwei entsprechende geradlinige Punktreiheu projectiv.

Die Gleichungen (No. 5, 8) geben für $\lambda_3 = 0$ die Gleichungen entsprechender Strahlen der beiden Büschel $T_1 T_2$ und $T_1' T_2'$

$$T \equiv \lambda_1 \alpha_1 T_1 + \lambda_2 \alpha_2 T_2 = 0 , \qquad T' \equiv \lambda_1 \beta_1 T_1' + \lambda_2 \beta_2 T_2' = 0 .$$

Hieraus folgt weiter: In projectiven ebenen Systemen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel projectiv.

Diese beiden Sätze lehren, zu jedem Punkte und zu jeder Geraden des einen Systems den entsprechenden Punkt und die entsprechende Gerade des andern zu construiren.



(M. 464.)

Um den Punkt zu finden, der P entspricht, construire man die beiden Geraden $P_1' P'$ und $P_3' P'$ so, dass $P_1'(P_2', P_3', P_4', P')$*) $= P_1 \, (P_2 P_3 P_4 P)$, sowie dass $P_3' (P_2' P_1' P_4' P') = P_3 \, (P_2 P_1 P_4 P)$. Der Schnittpunkt beider Strahlen ist der gesuchte Punkt P'.

Um ferner die Gerade zu finden, die der Geraden T' (Fig. 465) entspricht, construire man auf T_2' den Punkt M_2' so, dass

$$(P_3' P_1' M_1' M_2') = (P_3 P_1 M_1 M_2) ;$$

und auf T_3' den Punkt M_4' so, dass

$$(P_1' P_2' M_3' M_4') = (P_1 P_2 M_3 M_4) .$$

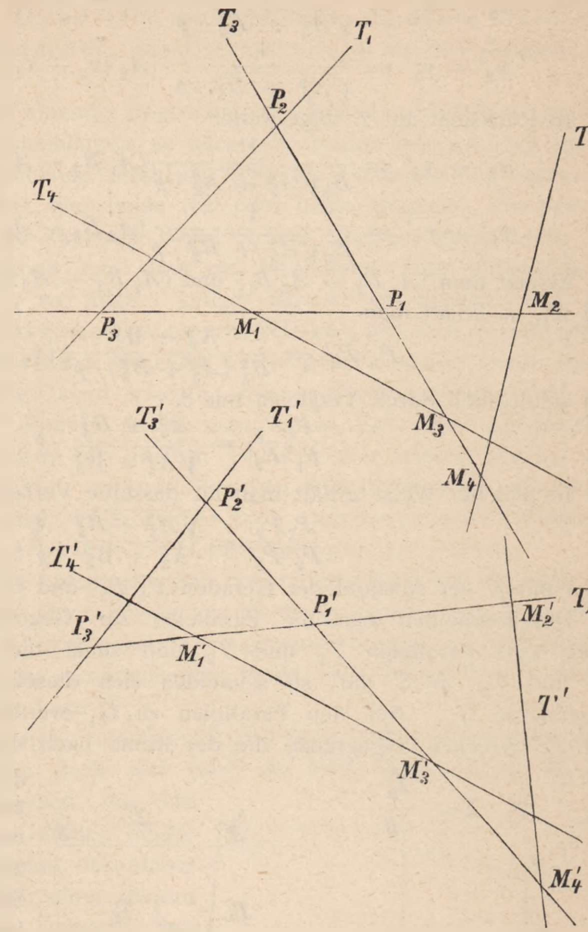
Alsdann ist die Gerade $M_2' M_4'$ die gesuchte Gerade T'.

7. Für jeden Punkt der Geraden $H_3 = 0$, bez. $H_3' = 0$ werden die Coordinaten des entsprechenden Punktes unendlich gross; und umgekehrt: einem

*) d. i. das Doppelverhältniss der Strahlen, die P_1' mit P_2', P_3' P_4' P' verbinden.

unendlich entfernten Punkte jedes Systems Σ und Σ' entspricht im andern Systeme ein Punkt der Geraden $H_3' = 0$ bez. $H_3 = 0$. Die Punkte eines ebenen Systems, welche den unendlich fernen Punkten eines projectiven Systems entsprechen, liegen daher auf einer Geraden. Diese Gerade heisst die Gegenachse des Systems. Die Gegenachsen der Systeme Σ und Σ' mögen mit G und G_1 bezeichnet werden.

Einem Büschel paralleler Geraden des einen Systems entspricht im andern Systeme ein Strahlbüschel, dessen Träger auf der Gegenachse dieses Systems liegt. Den Geraden eines Systems, die zur Gegenachse dieses Systems parallel sind, entsprechen im andern Systeme Parallele zur Gegenachse dieses Systems.



(M. 465.)

Bei zwei entsprechenden Parallelen zu den Gegenachsen entsprechen sich die unendlich fernen Punkte; entsprechende Parallelen zu den Gegenachsen enthalten daher ähnliche Punktreihen.

Das Verhältniss entsprechender Strecken auf zwei entsprechenden Parallelen zu den Gegenachsen ergiebt sich in folgender Weise: Liegen P_1 und P_2 auf einer Parallelen zu G, so ist

1. $$A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3 = A_3 x_2 + B_3 y_2 + C_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p ,$$

wenn p den Abstand der Geraden $P_1 P_2$ und G bezeichnet. Aus 1. folgt

2. $$A_3 (x_2 - x_1) + B_3 (y_2 - y_1) = 0 ;$$

daher ist weiter

3. $$\begin{aligned} P_1 P_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{A_3^2}{B_3^2} (x_2 - x_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 \cdot \frac{A_3^2 + B_3^2}{B_3^2} . \end{aligned}$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte ergeben sich aus den Formeln

$$x_1' = H_{11} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p , \qquad y_1' = H_{21} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p ,$$
$$x_2' = H_{12} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p , \qquad y_2' = H_{22} : \sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p .$$

Hieraus folgt

$$
4.\quad \begin{aligned}
x_2' - x_1' &= \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} \cdot [A_1 (x_2 - x_1) + B_1 (y_2 - y_1)], \\
y_2' - y_1' &= \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} \cdot [A_2 (x_2 - x_1) + B_2 (y_2 - y_1)].
\end{aligned}
$$

In Rücksicht auf 2. folgt weiter

$$
\begin{aligned}
x_2' - x_1' &= \frac{1}{B_3\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} (A_1 B_3 - A_3 B_1)(x_2 - x_1), \\
y_2' - y_1' &= \frac{1}{B_3\sqrt{A_3^2 + B_3^2} \cdot p} (A_2 B_3 - A_3 B_2)(x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$

Ersetzt man $(A_1 B_3 - A_3 B_1)$ und $(A_2 B_3 - A_3 B_2)$ nach No. 4 durch $-\mathrm{B}_3$ und A_3, so erhält man

$$
5.\quad P_1' P_2' = \frac{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}{B_3^2 (A_3^2 + B_3^2) \cdot p^2} (x_2 - x_1)^2,
$$

und schliesslich durch Vergleich mit 3.

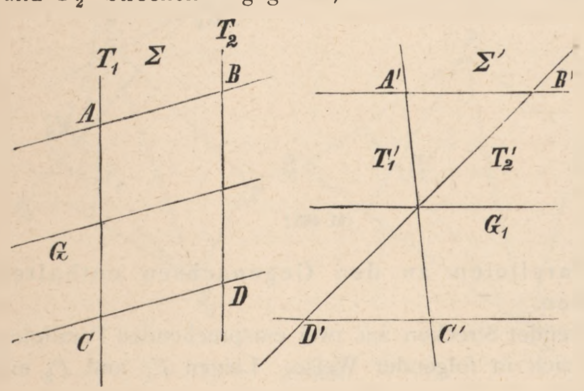
$$
6.\quad \frac{P_1 P_2}{P_1' P_2'} = \frac{A_3^2 + B_3^2}{\sqrt{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}} \cdot p.
$$

In gleicher Weise erhält man für dasselbe Verhältniss

$$
7.\quad \frac{P_1 P_2}{P_2' P_2'} = \frac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2} \cdot \frac{1}{p'},
$$

wenn mit p' der Abstand der Geraden $P_1' P_2'$ und G_1 bezeichnet wird.

Durchschneidet man die Parallelen zur Gegenachse G des Systems Σ durch zwei Parallelen T_1 und T_2 und sucht die entsprechenden Geraden T_1' und T_2' in Σ' auf, so schneiden sich dieselben in einem Punkte der Gegenachse G_1. Auf den Parallelen zu G_1 werden von den Geraden T_1' und T_2' Strecken abgegrenzt, die der Reihe nach den unter sich gleichen und gleich gerichteten Strecken entsprechen, welche von T_1 und T_2 auf den Parallelen zu G ausgeschnitten werden. Setzt man nun in jeder der beiden Ebenen auf Parallelen positive Strecken als gleichgerichtet voraus, und sind die entsprechenden Strecken AB und $A'B'$ beide positiv, so sind CD und $C'D'$ von ungleichen Vorzeichen. Wir schliessen daher: Für Strecken auf zwei Parallelen zu den Gegenachsen sind die Verhältnisse zu den entsprechenden Strecken von gleichen oder ungleichen Zeichen, je nachdem die Parallelen auf derselben Seite der Gegenachse des Systems liegen oder nicht.



(M. 466.)

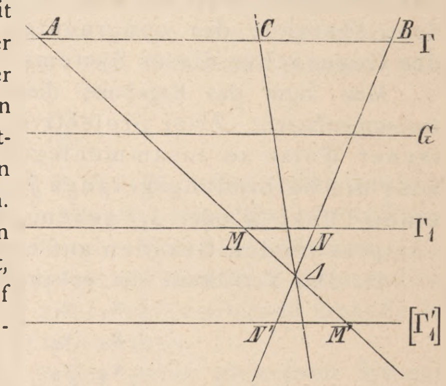
8. Ist $p = \pm \dfrac{\sqrt{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}}{A_3^2 + B_3^2}$, und mithin $p' = \pm \dfrac{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}{\mathrm{A}_3^2 + \mathrm{B}_3^2}$, so hat das Verhältniss der durch diese Bedingung bestimmten beiden Paare entsprechender Parallelen zu den Gegenachsen den numerischen Werth 1, ein Paar dieser Parallelen sind daher gleichsinnig, das andere Paar ungleichsinnig congruent.

In zwei projectiven ebenen Systemen giebt es also ein Paar gleichsinnig congruente und ein Paar ungleichsinnig congruente Gerade. Die beiden Geraden jedes Systems, denen congruente Gerade im andern Systeme entsprechen, sind symmetrisch zu der Gegenachse des Systems.

9. Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Strahlbüscheln zwei entsprechende Strahlen zusammenliegen, so haben die beiden Büschel noch ein paar zusammenfallende entsprechende Strahlen; denn die Doppelstrahlen zweier auf einander liegenden Büschel sind beide real oder beide imaginär. Da man nun zwei projective Büschel auf zweierlei Weise so auf einander legen kann, dass sie denselben Träger haben und dass ein bestimmtes Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen, so folgt: Jeder Strahl in einem von zwei projectiven Büscheln ist Schenkel zweier Winkel, die den entsprechenden Winkeln dem absoluten Werthe nach gleich sind; zwei dieser entsprechenden Winkel sind gleich, die andern beiden sind entgegengesetzt gleich. Ebenso findet man, dass bei zwei projectiven geradlinigen Punktreihen an jedem Punkte der einen Reihe zwei Strecken liegen, die den entsprechenden Strecken dem absoluten Werthe nach gleich sind; zwei dieser sich entsprechenden Strecken sind gleich, die andern beiden sind entgegengesetzt gleich.

10. Sind Γ und Γ' die entsprechenden congruenten Geraden, die sich ohne vorherige Umwendung der einen Ebene zur Deckung bringen lassen, sowie Γ_1 und Γ_1' das andere Paar entsprechende congruente Gerade, so lege man die Ebene Σ' so auf Σ, dass die entsprechenden Punkte von Γ und Γ' sich decken; alsdann komme Γ_1' in die Lage $[\Gamma_1']$.

Die beiden in A vereinten projectiven Strahlbüschel haben einen entsprechenden Strahl Γ gemein, also deckt sich noch ein Paar entsprechende durch A gehende Gerade; dies seien die mit AM' zusammenfallenden Geraden beider Systeme. Ebenso schliesst man, dass ausser Γ und Γ' noch zwei durch einen andern Punkt von Γ, durch B, gehende entsprechende Gerade sich decken; dies seien die mit BN' zusammenfallenden Geraden.



(M. 467.)

Dem Schnittpunkte Δ dieser beiden Geraden, als Punkt des Systems Σ gedacht, entspricht in Σ' ein Punkt, der sowol auf BN' als auch auf AM' liegt, also entspricht Δ sich selbst.

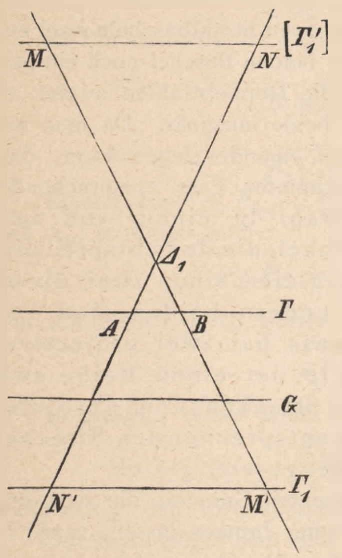
Daher entspricht auch jede Gerade sich selbst, die durch Δ geht; denn jede solche Gerade geht von dem selbstentsprechenden Punkte Δ nach einem selbstentsprechenden Punkte auf Γ. Es decken sich folglich zwei entsprechende Strahlenbüschel beider Systeme und ihr gemeinsamer Träger ist Δ.

Da nun von den Strahlen durch Δ entsprechende Gerade in entsprechenden Punkten geschnitten werden, so folgt, dass $MN = M'N'$; folglich sind die Dreiecke $MN\Delta$ und $M'N'\Delta$ congruent, und Δ auf der Mittellinie des Streifens $\Gamma_1 [\Gamma_1']$ gelegen.

Dreht man hierauf die Ebene Σ' um die Achse Γ um einen gestreckten

Winkel, so liegen nach der Drehung die Ebenen wieder auf einander; Γ_1' liege auf $[\Gamma_1']$ (Fig. 468).

Wir schliessen wie vorhin, dass von den in zwei Punkten A und B der Geraden Γ zusammenliegenden projectiven Strahlbüscheln der beiden Systeme ausser den Strahlen Γ und Γ' noch ein Paar Strahlen sich decken; diese seien bei den in A vereinten Strahlenbüscheln die mit AN' zusammenfallenden Geraden, und bei den in B vereinten die mit BM' zusammenfallenden. Hieraus schliesst man, dass der Schnittpunkt dieser beiden Geraden Δ_1 sich selbst entspricht, und dass er der Träger eines Büschels von selbstentsprechenden Geraden ist. Dies ergiebt weiter die Gleichheit der Strecken MN und $M'N'$, und daher die Thatsache, dass Δ_1 auf der Mittellinie des Streifens $\Gamma_1[\Gamma_1']$ liegt.



(M. 468.)

Trennt man die beiden Systeme, indem man Σ' in eine beliebige Lage bringt, und rechnet in beiden Systemen positive Winkel in derselben Drehrichtung, so trennen sich die in Δ bez. Δ_1 vereinten Strahlbüschel und treten in den beiden Systemen als congruente entsprechende Büschel auf; und zwar die vorher in Δ vereinten als gleichsinnig congruente, die andern als ungleichsinnig congruente. Wir schliessen daher: Zwei projective ebene Systeme enthalten zwei gleichsinnig congruente und zwei ungleichsinnig congruente Strahlbüschel; der Abstand der Träger dieser Büschel von der Gegenachse eines Systems ist gleich dem Abstande der congruenten Geraden des andern Systems von der Gegenachse dieses Systems.

Man kann das Ergebniss dieser Untersuchung auch in folgenden Satz zusammenfassen: Zwei projective ebene Systeme lassen sich in zweifacher Weise so zusammenlegen, dass sie perspectiv sind, d. i. so, dass die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte durch einen Punkt (Δ oder Δ_1) gehen, und dass die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Geraden auf einer Geraden (Γ oder Γ_1) liegen.

11. Das Verhältniss der entsprechenden Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$$

ergiebt sich, wenn man $x_i'y_i'$ durch x_iy_i ersetzt (No. 4, 1).

Man erhält

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_{31}H_{32}H_{33}} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist, wie man sofort sieht, wenn man für H_{ik} die ausführlichen Ausdrücke einsetzt

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = R,$$

so erhält man für das gewünschte Verhältniss

$$\frac{P_1P_2P_3}{P_1'P_2'P_3'} = \frac{H_{31}H_{32}H_{33}}{R}.$$

In gleicher Weise kann man ableiten

$$\frac{P_1P_2P_3}{P_1'P_2'P_3'} = \frac{R'}{H_{31}'H_{32}'H_{33}'},$$

wenn R' die Determinante bedeutet

$$R' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathrm{A}_3 & \mathrm{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Liegen P_2 und P_3 unendlich nahe an P_1, so sind die Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ verschwindend klein, und die Ausdrücke H_{31}, H_{32}, H_{33} einander gleich. Für das Verhältniss verschwindend kleiner an den entsprechenden Punkten P_1 und P_1' gelegener entsprechenden Flächen f und f' hat man also

$$\frac{f}{f'} = \frac{H_{31}^3}{R}.$$

12. Wir wollen noch mit einigen Worten auf eine Abart der projectiven Verwandtschaft hinweisen.

Wenn $A_3 = B_3 = 0$, so ist auch $\mathrm{A}_3 = \mathrm{B}_3 = 0$ und die Functionen H_3 und H_3' reduciren sich auf die Constanten C_3 und Γ_3. Wenn man sie noch als lineare Functionen von x und y, bez. von x' und y' betrachten will, so muss man sie als solche Functionen betrachten, in denen die Coefficienten der Coordinaten verschwindend klein sind. Den Gleichungen

$$H_3 = 0 \quad \text{und} \quad H_3' = 0$$

kann dann nur durch unendlich grosse Werthe der Coordinaten genügt werden, und wir schliessen daher: In diesem besonderen Falle der projectiven Verwandtschaft sind die Gegenachsen unendlich fern. Man bezeichnet diese Art der Verwandtschaft als Affinität. Das Verhältniss entsprechender Flächen wird in affinen Systemen

$$\frac{P_1P_2P_3}{P_1'P_2'P_3'} = \frac{C_3^3}{R},$$

also unabhängig von der Lage der Punkte $P_1P_2P_3$. Wir haben daher den Satz, der die charakteristische Eigenschaft affiner Systeme ausspricht: In affinen Systemen ist das Verhältniss entsprechender Flächen constant.

Da in affinen Systemen einem unendlich fernen Punkte in Σ ein unendlich ferner in Σ' entspricht, so folgt weiter: Je zwei entsprechende Gerade in affinen Systemen enthalten ähnliche Punktreihen.

13. Die Gleichungen entsprechender Punkte zweier projectiven Systeme No. 5, 7 beziehen sich auf Coordinatensysteme in den Ebenen Σ und Σ'; durch die Coefficienten $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, $\lambda_3 a_3$ . . . werden Beziehungen ausgedrückt, die von jeder Coordinatenbestimmung unabhängig sind, diese Gleichungen gelten auch, wenn die Punkte von Σ und Σ' auf räumliche Coordinatensysteme bezogen werden. Wir wollen für die folgende Untersuchung voraussetzen, dass sie auf ein Coordinatentetraëder bezogen sind.

Aus den Functionen P_1, P_2, P_3 . . . und aus einer willkürlich gewählten linearen Function in Ebenencoordinaten Π bilden wir die Functionen

$$P_1' = P_1 + \delta_1\Pi, \quad P_2' = P_2 + \delta_2\Pi, \quad P_3' = P_3 + \delta_3\Pi.$$

Durch die drei Punkte $P_1' = 0$, $P_2' = 0$, $P_3' = 0$ ist eine Ebene Σ_1 bestimmt, und P_1', P_2', P_3' sind die Projectionen von P_1, P_2, P_3 auf diese Ebene, von dem Centrum Π aus projicirt. Die Identität

$$P_4' \equiv a_1 P_1' + a_2 P_2' + a_3 P_3' \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + (a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3)\Pi = 0$$

zeigt, dass P_3' die Projection des Punktes

$$P_4 \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0$$

auf die Ebene Σ_1 ist; denn aus

$$P_4' \equiv a_1 P_1' + a_2 P_2' + a_3 P_3'$$

erkennt man, dass P_4' mit P_1', P_2', P_3' auf derselben Ebene liegt, und aus

$$P_4' \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + (a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3)\Pi,$$

dass P_4' auf der Geraden $P_4\Pi$ liegt.

In gleicher Weise ist ersichtlich, dass

1. $$\begin{aligned} P' &\equiv \lambda_1 a_1 P_1' + \lambda_2 a_2 P_2' + \lambda_3 a_3 P_3' \\ &\equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 + (\lambda_1 a_1\delta_1 + \lambda_2 a_2\delta_2 + \lambda_3 a_3\delta_3)\Pi = 0 \end{aligned}$$

die Projection des Punktes

2. $$P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 + \lambda_3 a_3 P_3 = 0$$

auf die Ebene Σ_1 ist.

Aus den Formeln 1. und 2. folgt sofort der Satz: Die Centralprojection eines ebenen Systems Σ auf eine andere Ebene ist dem Systeme Σ projectiv. Hier ist die Parallelprojection mit inbegriffen, da sie als Centralprojection mit unendlich fernem Centrum zu betrachten ist, und da die Schlüsse sich nicht ändern, wenn $\Pi = 0$ die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist.

In der Schnittlinie α der Ebenen Σ und Σ_1 sind zwei congruente Gerade der projectiven Systeme so vereint, dass die entsprechenden Punkte sich decken. Legt man durch Π eine Gerade β parallel zu α, und durch β eine Ebene T so, dass der zwischen Σ und Σ_1 enthaltene Streifen der Ebene T von der Geraden β halbirt wird, so sind die Ränder dieses Streifens das andere Paar congruenter Geraden von Σ und Σ_1. Die Scheitel der beiden Paare congruenter Büschel liegen in der Symmetrieebene der ganzen Figur, d. i. in der durch Π gehenden Normalebene zu α. Die Ebenen, welche durch β parallel zu Σ_1 und Σ gelegt werden, schneiden Σ und Σ_1 in den Gegenachsen beider Systeme.

14. Zwei projective ebene Systeme Σ und Σ' lassen sich immer so legen, dass das eine eine Centralprojection des andern ist.

Man lege Σ' so gegen Σ, dass in der Schnittlinie beider Ebenen zwei congruente Gerade Γ und Γ' mit den entsprechenden Punkten sich decken, und verbinde zwei Paar entsprechende Punkte A und A', B und B', der beiden andern congruenten Geraden; da diese Γ parallel sind, so liegen sie auf einer Ebene, und die Geraden AA' und BB' haben einen Schnittpunkt Π. Verbindet man Π mit zwei auf Γ liegenden Punkten C und D, und projicirt nun von Π aus das System Σ auf die Ebene Σ', so bildet die Projection ein ebenes System Σ_1, das mit Σ, also auch mit Σ' projectiv ist.

Die beiden auf derselben Ebene liegenden projectiven Systeme Σ' und Σ_1 haben vier entsprechende Punkte gemein A', B', C und D, von denen nicht drei in einer Geraden liegen; folglich sind sie identisch; Σ' ist also selbst die Centralprojection von Σ.

15. Die Gesammtheit aller Strahlen, die durch einen Punkt gehen, wird als Strahlbündel bezeichnet. Sowie man das Ebenenbündel als Gesammtheit der Ebenen sich vorstellen kann, welche die Geraden einer Ebene von dem Träger des Bündels aus projiciren, so kann man sich ein Strahlbündel als den Verein aller der Strahlen vorstellen, durch welche die Punkte einer Ebene vom Träger des Bündels aus projicirt werden.

Bei den vorliegenden Betrachtungen haben wir die Vorstellung einer mit Punkten bedeckten Ebene (ebenes Punktsystem) mit der Vorstellung der mit Geraden bedeckten Ebene (ebenes Geradensystem) vereinigt; ebenso wollen wir auch das Strahlbündel und das Ebenenbündel immer vereint vorstellen; man kann sich dann entweder der einen oder der andern Bezeichnung bedienen, je nachdem man andeuten will, dass man bei einem ebenen Querschnitte der Figur zunächst die Schnittpunkte der Strahlen, oder die Schnittgeraden der Ebenen beachten soll.

Man kann ein ebenes System Σ und ein Strahlbündel, durch welches Σ projicirt wird, in Beziehung setzen, indem man jedem Punkte auf Σ den projicirenden Strahl, jeder Geraden auf Σ die projicirende Ebene zuordnet.

Strahlbündel, welche projective ebene Systeme projiciren, werden als projective Strahlbündel bezeichnet, und zwar entsprechen sich darin die Strahlen, welche entsprechende Punkte, sowie die Ebenen, welche entsprechende Gerade projiciren.

In zwei projectiven Strahlbündeln entspricht jedem ebenen Strahlbüschel des einen Systems ein projectives ebenes Strahlbüschel des andern; jedem Ebenenbüschel des einen ein projectives Ebenenbüschel des andern.

Ebene Querschnitte projectiver Strahlbündel sind projectiv. Entsprechen den vier Ebenen

$$T_1 = 0,\quad T_2 = 0,\quad T_3 = 0,\quad T_4 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0$$

eines Ebenenbündels die Ebenen

$$T_1' = 0,\quad T_2' = 0,\quad T_3' = 0,\qquad T_4' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' + b_3 T_3' = 0$$

eines projectiven Ebenenbündels, so sind die Gleichungen je zweier entsprechenden Ebenen beider Bündel

$$T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 + \lambda_3 a_3 T_3 = 0,\quad T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_3 b_3 T_3' = 0.$$

Denn setzt man in diesen Gleichungen z. B. $z = 0$, so erhält man die Gleichungen der Geraden der Querschnitte beider Büschel mit der XY-Ebene, und erkennt sofort, dass beide Querschnitte projectiv sind.

Entsprechend den congruenten Geraden und den congruenten Strahlbüscheln ebener projectiver Systeme giebt es in zwei projectiven Strahlbündeln zwei Paar entsprechende congruente ebene Strahlbüschel und zwei Paar entsprechende congruente Ebenenbüschel; wir müssen uns indessen versagen, hierauf näher einzugehen.*)

16. Doppelelemente auf einander liegender projectiver Ebenen. Werden zwei auf einander liegende ebene Systeme auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, so fällt ein Punkt P mit seinem entsprechenden P' zusammen, wenn man λ so wählt, dass die Gleichungen zusammen bestehen

1. $$\frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} = \frac{\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3},$$
$$\frac{\lambda_1 a_1 y_1 + \lambda_2 a_2 y_2 + \lambda_3 a_3 y_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} = \frac{\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3'}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3},$$

Setzt man abkürzungsweise

*) Vergl. u. A. des Verfassers Schrift: Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig 1872, pag. 219.

$$\sigma = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \quad \tau = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3,$$

so erhält man aus 1. die Gleichungen

$$2. \quad \begin{aligned} (\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3)\,\tau &= (\lambda_1 b_1 x_1' + \lambda_2 b_2 x_2' + \lambda_3 b_3 x_3')\,\sigma, \\ (\lambda_1 a_1 y_1 + \lambda_2 a_2 y_2 + \lambda_3 a_3 y_3)\,\tau &= (\lambda_1 b_1 y_1' + \lambda_2 b_2 y_2' + \lambda_3 b_3 y_3')\,\sigma. \end{aligned}$$

Dies sind zwei quadratische Gleichungen für die maassgebenden Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_3$ und $\lambda_2 : \lambda_3$. Denselben wird durch die Verhältnisse der λ genügt, welche sich aus den beiden Gleichungen bestimmen $\tau = 0$, $\sigma = 0$. Diese Gleichungen sind linear, haben also ein reales System von Lösungen; durch diese Lösung werden aber keine Doppelpunkte der beiden ebenen Systeme bestimmt, sondern die einander entsprechenden unendlich fernen Punkte beider Systeme, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

Die übrigen drei Lösungen des Systems 2. führen auf Doppelpunkte. Von diesen Lösungen ist eine wenigstens real. Die beiden andern sind entweder real oder conjugirt complex.

Im letzteren Falle sind auch die Coordinaten der ihnen zugehörigen Doppelpunkte conjugirt complex, und daher die Gerade real, auf der sie liegen. Diese Gerade ist, da sie zwei Doppelpunkte enthält, eine Doppelgerade, d. i. auf ihr liegen zwei entsprechende Gerade beider Systeme. Der reale Doppelpunkt ist Träger zweier auf einander liegenden entsprechenden Strahlbüschel; diese haben zwei Doppelstrahlen, die nicht real sein können, weil sonst ihre Schnittpunkte mit der realen Doppelgeraden reale Doppelpunkte wären, entgegen der Voraussetzung, dass nur ein realer Doppelpunkt vorhanden ist.

Wenn drei reale Doppelpunkte vorhanden sind, so sind die Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks Doppelgeraden.

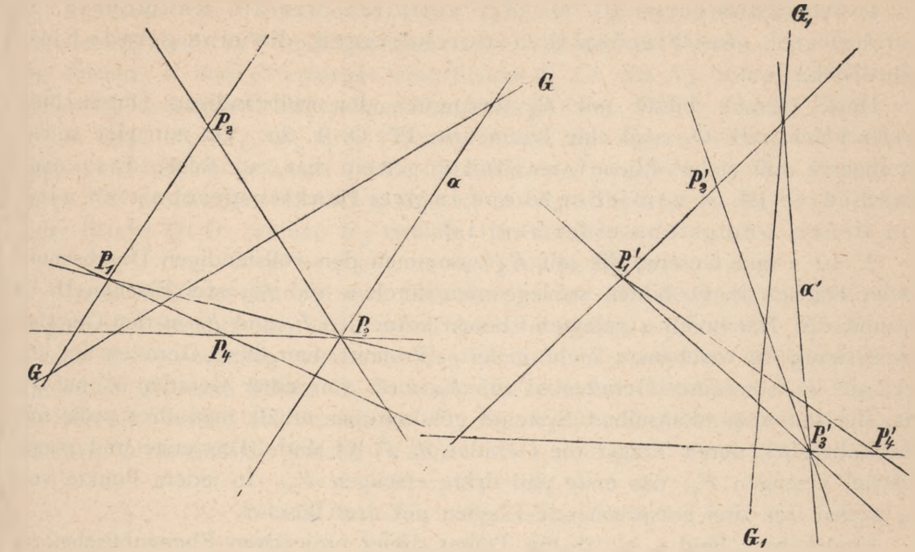
Wir schliessen daher: Zwei auf derselben Ebene liegende ebene Systeme haben drei Doppelpunkte und drei Doppelgerade; auf jeder Doppelgeraden liegen zwei Doppelpunkte, durch jeden Doppelpunkt gehen zwei Doppelgerade. Von diesen Doppelelementen sind entweder alle real, oder es ist eine Ecke des von ihnen gebildeten Doppeldreiecks und die gegenüberliegende Seite real, während die beiden andern Seiten und Ecken conjugirt complex sind.

In besonderen Fällen können auch mehr als drei Doppelpunkte und Doppelgerade vorhanden sein. Wenn vier Doppelpunkte vorhanden sind, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, so sind die beiden Systeme identisch; alle Punkte sind alsdann Doppelpunkte, alle Geraden sind Doppelgerade. Wenn drei Doppelpunkte auf einer Geraden liegen, so ist diese Gerade Doppelgerade und auf ihr fallen zwei entsprechende congruente Gerade mit den entsprechenden Punkten zusammen. Alsdann giebt es noch ausserdem einen realen Doppelpunkt (Δ oder Δ_1) und noch ein Büschel von Doppelstrahlen, (dessen Träger Δ oder Δ_1 ist).

17. Constructionen an projectiven ebenen Systemen. Sind von zwei projectiven Systemen Σ und Σ' vier Paar entsprechende Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1' P_2' P_3' P_4'$ gegeben, so sind sechs Paar entsprechende Gerade bekannt, nämlich die Seiten der beiden vollständigen Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1' P_2' P_3' P_4'$; auf jedem Paare dieser Seiten sind drei Paar entsprechende Punkte bekannt.

Bestimmt man die Gegenpunkte auf zwei Paar entsprechenden Geraden, und verbindet dieselben, so erhält man die Gegenachsen G und G_1 der beiden Systeme.

Der Geraden α, welche durch P_3 parallel zu $P_1 P_2$ gelegt wird, entspricht die Gerade α', welche P_3' mit dem Gegenpunkte auf $P_1' P_2'$ verbindet.



(M. 469.)

Die beiden Geraden, welche parallel zu G_1 sind, und auf denen von $P_1' P_2'$ und α' Strecken abgeschnitten werden, welche der auf G von $P_1 P_2$ und α abgeschnittenen Strecke gleich sind, sind die Geraden Γ' und Γ_1', denen in Σ congruente Gerade Γ und Γ_1 entsprechen.

Dem von $P_1' P_2'$ und α' bestimmten Strahlbüschel entspricht das Parallelstrahlenbüschel, zu welchem $P_1 P_2$ und α gehören. Die beiden Strahlen des Büschels ($P_1' P_2'$, α'), deren Winkel mit G_1 gleich den Winkeln der Geraden α und G sind, enthalten die Punkte Δ' und Δ_1'; die entsprechenden Strahlen in Σ enthalten die Punkte Δ und Δ_1; man erhält die Träger Δ, Δ_1, Δ', Δ_1', der congruenten Büschel, indem man auf diese beiden Paaren entsprechender Strahlen die Punkte bestimmt, deren Abstände von G und G_1 gleich dem Abstande der Geraden Γ' von G_1 bez. der Geraden Γ von G sind.

Die entsprechenden Strahlen zweier entsprechenden Strahlbüschel in zwei auf einander liegenden projectiven Systemen schneiden sich auf Punkten eines Kegelschnitts, der durch die Doppelpunkte der beiden Systeme geht; denn zwei Strahlen der beiden Büschel, welche nach demselben Doppelpunkte gehen, sind entsprechende Gerade. Sämmtliche Kegelschnitte, die durch die Paare entsprechender Strahlbüschel erzeugt werden, haben also die drei Doppelpunkte gemein. Zwei von diesen Kegelschnitten, welche durch die in A und A', bez. durch die in B und B' liegenden entsprechenden Strahlenbüschel erzeugt werden, haben ausser den Doppelpunkten noch den immer realen Punkt gemein, in welchem sich die Geraden AB und $A'B'$ schneiden; denn AB und $A'B'$ sind entsprechend in beiden Paaren von entsprechenden Strahlbüscheln. Die Construction der Doppelpunkte und Doppelgeraden zweier auf einander liegenden ebenen Systeme ist somit auf die Fundamentalaufgabe für Constructionen dritten und vierten Grades zurückgeführt: Die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu finden, von denen ein Schnittpunkt bekannt ist.

§ 15. Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse.

1. *Als Raumcurve III. O.* (R_3) *definiren wir die Raumcurve, in welcher sich zwei Flächen II. O. durchdringen, die eine gerade Linie gemein haben.*

Diese Gerade bildet mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O., also eine Raumcurve IV. O. 1. Sp. Da nun eine solche Raumcurve mit jeder Ebene vier Punkte gemein hat, so folgt, *dass eine Raumcurve III. O. von jeder Ebene in drei Punkten geschnitten wird, von denen wenigstens einer real ist.*

2. Ist α eine Gerade, die mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. bildet, so lege man durch α und R_3 zwei Flächen II. O. F_1 und F_2. Die durch α gelegten Ebenen schneiden F_1 und F_2 in den Geraden des Systems, zu welchem α nicht gehört. Projicirt man diese Geraden auf F_1, bez. auf F_2 von einer Geraden α' auf F_1, bez. von einer Geraden α'' auf F_2 aus, die mit α zu demselben Systeme gehören, so erhält man drei projective Ebenenbüschel, deren Träger die Geraden α, α', α'' sind. Das erste und zweite Büschel erzeugen F_1, das erste und dritte erzeugen F_2. In jedem Punkte von R_3 treffen sich drei entsprechende Ebenen der drei Büschel.

Umgekehrt: Sind α, α', α'' die Träger dreier projectiven Ebenenbüschel, so erzeugen die Büschel α und α' eine Fläche II. O. F_1, α und α'' eine Fläche II. O. F_2; F_1 und F_2 enthalten beide die Gerade α, schneiden sich also ausserdem noch in einer R_3, in deren Punkten je drei entsprechende Ebenen der drei Büschel zusammentreffen.

Wir schliessen daher: *Der Ort der Schnittpunkte entsprechender dreier projectiven Ebenenbüschel ist eine Raumcurve III. O. Jeder der drei Träger dieser Büschel bildet mit R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O.*

3. Die Büschel α' und α'' erzeugen eine Fläche II. O., welche die Gerade α zweimal schneidet. Construirt man zu den beiden entsprechenden Ebenen der Büschel α' und α'', welche nach einem solchen Schnittpunkte gehen, die entsprechende Ebene durch α, so erkennt man, dass in jedem dieser zwei Schnittpunkte drei entsprechende Ebenen der drei Büschel sich treffen. Wir sehen daraus: *Jede Gerade α, welche mit einer R_3 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. bildet, trifft R_3 in zwei realen oder conjugirt complexen Punkten.* Man nennt diese Geraden daher *Secanten* der R_3.

4. *Durch einen Punkt des Raumes, der nicht auf R_3 liegt, geht nur eine Secante einer R_3*, d. i. *nur eine Gerade, die R_3 in zwei realen oder conjugirt complexen Punkten trifft.* Denn wären durch P zwei Secanten möglich, so hätte die Ebene dieser Secanten vier Schnittpunkte mit R_3, im Widerspruche mit No. 1.

Jede Secante von R_3 bildet mit R_3 den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. Denn wenn α' Secante von R_3 ist, so lege man durch α, R_3 und einen Punkt P auf α', der nicht auf R_3 liegt, die hierdurch eindeutig bestimmte Fläche II. O. F_1. Diese Fläche enthält α', da sie von α' den Punkt P, sowie die beiden Schnittpunkte mit R_3 enthält. Das Ebenenbüschel α und ein dazu projectives α' projiciren die Geraden auf F_1, die α' schneiden; das Büschel α und ein dazu projectives, dessen Träger α'' auf F_2 liegt und α nicht schneidet,

projiciren die α und α'' schneidenden Geraden auf F_2. Entsprechende Ebenen der drei Büschel α, α' und α'' gehen daher durch gemeinsame Punkte von F_1 und F_2, mit Ausnahme der Punkte auf α; denn ist A auf α gelegen, so entsprechen den Ebenen $A\alpha'$ und $A\alpha''$ im Allgemeinen zwei verschiedene Ebenen des Büschels α. Die Büschel α' und α'' erzeugen eine Fläche II. O., die R_3 und α' enthält, also bilden R_3 und α' den vollständigen Durchschnitt diese Fläche und der Fläche F_1.

5. Sind F_1, F_2, F_3 drei Flächen II. O., die R_3 enthalten und nicht zu demselben Büschel gehören (z. B. die Flächen F_1 und F_2 aus No. 1, und die durch die projectiven Büschel α' und α'' erzeugte Fläche), so ist die Gleichung jeder Fläche II. O., welche R_3 enthält, von der Form

1. $$F \equiv \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu_3 F_3 = 0.$$

Denn sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte des Raumes, so geht durch jeden eine Secante der R_3; durch diese Secanten und durch R_3 ist eine Fläche II. O. eindeutig bestimmt; also ist durch R_3 und zwei beliebige Punkte ausserhalb R_3 eine Fläche II. O. eindeutig bestimmt. Sind nun F_{1i}, F_{2i}, F_{3i} die Werthe, welche die Functionen F_1, F_2, F_3 für die Coordinaten von P_i annehmen, so enthält die Fläche II. O.

2. $$F \equiv \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \end{vmatrix} = 0$$

die Punkte P_1 und P_2, sowie alle gemeinsamen Punkte von F_1, F_2 und F_3, also die R_3, und ist von der Form 1.

6. Durch einen Punkt F auf R_3 gehen unzählige Secanten der R_3; durch zwei derselben α und α' und durch die R_3 ist eine Fläche II. O. f bestimmt.

Die Fläche f ist ein Kegel; denn wäre f kein Kegel, so würde $\alpha\alpha'$ Tangentenebene von f, folglich die Tangente der Raumcurve in P auf $\alpha\alpha'$ gelegen sein; dies ist aber für keinen Punkt der Raumcurve der Fall, da sonst die Ebene $\alpha\alpha'$ ausser dem Punkte P und den zwei noch auf α und α' gelegenen Curvenpunkten noch den unendlich nahe bei P gelegenen Punkt der Curve mit derselben gemein haben würde. Wir erhalten somit: *Eine R_3 wird von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel II. O. projicirt.*

Sind sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer R_3 gegeben, so ist damit auch der Kegel II. O. bestimmt, der die R_3 von einem dieser Punkte z. B. von 1 aus projicirt. Denn alsdann sind von diesem Kegel K_1 die fünf Mantellinien bekannt, die 1 mit den andern fünf Punkten verbinden, und durch fünf Mantellinien ist ein Kegel II. O. eindeutig bestimmt. Ebenso ist der Kegel K_2 bestimmt, der R_3 von 2 aus projicirt. Beide Kegel haben ausser der Mantellinie 1 2 eine bestimmte R_3 gemein. Daher schliessen wir: *Eine Raumcurve III. O. ist durch sechs Punkte bestimmt.* Zugleich ist ersichtlich, *wie eine R_3 aus sechs gegebenen Punkten linear construirt werden kann.*

7. Legt man eine Ebene T durch eine Secante α (No. 1) einer R_3, so schneidet diese die Fläche F_1 ausser in α noch in einer Geraden β, welche mit α nicht zu demselben Systeme gehört. Auf α liegen zwei Punkte der R_3, welche real oder conjugirt complex sind; folglich liegt auf β der dritte immer reale Schnittpunkt der Ebene T mit der Curve R_3. *Wenn alo die Fläche F die Raumcurve R_3 enthält, so haben alle Geraden auf F, die nicht Secanten von R_3 sind, mit R_3 einen realen Punkt gemein.*

8. *Wenn die Gerade β mit der Raumcurve R_3 nur einen Punkt P gemein hat, so erfüllen alle Secanten von R_3, die β schneiden, eine*

Fläche II. O. Legt man durch β eine Ebene, so hat diese mit R_3 ausser P noch zwei Punkte gemein, und die durch diese Punkte bestimmte Secante von R_3 schneidet die Gerade β. Durch zwei solche Secanten α und α' und durch die R_3 ist eine Fläche II. O. bestimmt. Diese Fläche F enthält β ganz, weil drei Punkte von β, nämlich P und die Schnittpunkte von β mit α und α', auf der Fläche liegen; folglich enthält diese Fläche auch alle Secanten der R_3, welche β schneiden.

9. Projicirt man die Secanten von R_3, welche β schneiden, von einem andern Punkte P_1 der R_3 aus, so bilden die projicirenden Ebenen ein Büschel, dessen Träger die Gerade β' der Fläche F ist, die durch P_1 geht und mit β zu demselben Systeme gehört. Die Secanten von R_3, welche β und β' treffen, werden daher von β und β' aus durch zwei projective Ebenenbüschel projicirt.

Jeder Geraden β, die durch P geht, entspricht somit eine bestimmte Gerade β', die durch P_1 geht, und dem Ebenenbüschel, dessen Träger β ist, entspricht ein projectives Ebenenbüschel mit dem Träger β'. Alle Strahlen β, welche auf einer Ebene liegen, werden von der auf dieser Ebene liegenden Secante der R_3 geschnitten; die entsprechenden Strahlen β' liegen auf der Ebene, welche diese Secante von P_1 aus projicirt. Jeder Ebene durch P entspricht daher eine Ebene durch P_1 so, dass beide sich in einer Secante der R_3 schneiden.

Zu einem Strahle β kann daher der entsprechende Strahl β' gefunden werden, wenn man vier Paar entsprechende Strahlen kennt. Wenn nämlich β_1, β_2, β_3, β_4 der Reihe nach den durch P_1 gehenden Strahlen β_1', β_2', β_3', β_4' entsprechen, so sind durch die drei Paar Ebenen, welche zwei entsprechende Strahlen, z. B. β_1 und β_1' mit den übrigen verbinden, zwei projective Büschel bestimmt; zwei andere projective Büschel werden von den drei Paar Ebenen bestimmt, welche β_2 mit β_1, β_3, β_4, und β_2' mit β_1', β_3', β_4' verbinden. Betrachtet man nun einen Strahl β als den Schnitt zweier Ebenen der Büschel mit den Trägern β_1 und β_2 und construirt die entsprechenden Ebenen der projectiven Büschel β_1' und β_2', so ist deren Schnittgerade die gesuchte Gerade β'. Dieselbe Construction haben wir anzuwenden, um bei zwei projectiven Strahlbündeln (§ 14, No. 15 und 6), in denen die Strahlen β_1, β_2, β_3, β_4 den Strahlen β_1', β_2', β_3', β_4', entsprechen, zu einem Strahle β des einen Bündels den entsprechenden des andern zu finden. Wir schliessen daher: Die Secanten einer Raumcurve III. O. werden von je zwei Punkten der Raumcurve aus durch entsprechende Ebenen zweier projectiven Strahlbündel projicirt.

Wenn zwei entsprechende Strahlen β und β' dieser beiden Strahlbündel sich schneiden, so degenerirt die Fläche II. O., welche R_3, β und β' enthält, zu einem Kegel II. O. K, da β und β' Gerade desselben Systems dieser Flächen sind. Da die Ebene der Geraden β und β' ausser diesen beiden Geraden keinen Punkt mit K gemein hat, so liegt der Punkt, den die Ebene $\beta\beta'$ ausser den Punkten P und P_1 noch mit R_3 gemein hat, auf einer der Geraden β oder β'. Da nun ferner jede Secante von R_3, welche β oder β' trifft, auf K liegt, so kann dieser dritte Punkt nur der Schnittpunkt der Geraden β und β' sein. Hieraus folgt: Projicirt man die Secanten einer R_3 von zwei Punkten der Curve aus durch zwei projective Ebenenbündel, so ist die Curve R_3 der Ort der Punkte, in denen sich zwei entsprechende Strahlen beider Bündel schneiden.

10. Die Gleichungen dreier entsprechenden Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, durch welche eine R_3 erzeugt wird, nehmen eine besonders ein-

fache Gestalt an, wenn man als Träger zweier Büschel zwei Tangenten σ und τ der R_3 und als Träger des dritten die Secante α der R_3 benutzt, welche die Tangentialpunkte A und B der Tangenten σ und τ verbindet.

Sind T_0 und T_3 die Schmiegungsebenen (§ 10, No. 3) in den Punkten A und B, so entspricht die Ebene T_0 des Büschels σ den Ebenen der Büschel α und τ, welche die Curve R_3 in einem dem Punkte A unendlich nahen Punkte treffen; dies ist im Büschel α die Ebene, welche die Tangente σ enthält, denn diese enthält ausser A noch einen unendlich nahe bei A gelegenen Curvenpunkt; und im Büschel τ die Ebene, welche die Gerade α enthält. Es entsprechen sich daher die drei Ebenen

$$T_0 \barwedge \alpha\sigma \barwedge \tau\alpha .$$

Die Ebene $\sigma\alpha$ kann als eine Ebene des Büschels σ angesehen werden, welche R_3 in einem dem Punkte B unendlich nahen Punkte trifft; im Büschel α entspricht ihr daher die Ebene, welche die Tangente τ enthält und im Büschel τ die Schmiegungsebene T_3. Es entsprechen sich also die drei Ebenen

$$\sigma\alpha \barwedge \alpha\tau \barwedge T_3 .$$

Sind $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen $\sigma\alpha$ und $\tau\alpha$, so kann man sich die Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 immer mit solchen Faktoren multiplicirt denken, dass die Gleichungen dreier entsprechenden Ebenen der drei projectiven Büschel σ, α, τ die Form haben

$$T \equiv \lambda_1 T_0 - \lambda_2 T_1 = 0, \quad T' \equiv \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 = 0, \quad T'' \equiv \lambda_1 T_2 - \lambda_2 T_3 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch λ_1 und bezeichnet den Quotienten $\lambda_2 : \lambda_1$ mit λ, so gehen diese Gleichungen über in

1. $T \equiv T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T' \equiv T_1 - \lambda T_2 = 0, \quad T'' \equiv T_2 - \lambda T_3 = 0.$

Diese drei linearen Gleichungen für x, y, z enthalten einen veränderlichen Parameter λ, und zwar erscheint λ als die einzige unabhängige Veränderliche. Durch λ kann man die Coordinaten jedes Curvenpunktes ausdrücken, indem man das System 1. nach x, y, z auflöst.

Die Auflösungen eines Systems von drei linearen Gleichungen sind bekanntlich Quotienten, welche als gemeinsamen Nenner die Determinante der Gleichungen und als Zähler Determinanten dritten Grades in den Coefficienten der Gleichungen haben. Die Coefficienten der Gleichungen 1. sind lineare Functionen von λ; die Lösungen des Systems 1. haben daher die Form

2. $$\begin{aligned} x &= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3), \\ y &= (b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3), \\ z &= (c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3) : (d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + d_3\lambda^3). \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Punkte eines R_3 lassen sich daher als gebrochene rationale Functionen eines Parameters λ darstellen, und zwar in der Form

3. $$x = \frac{\varphi_0}{\varphi_3}, \quad y = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

wobei φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 ganze Functionen dritten Grades von λ sind.

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung eines Curvenpunktes ein

$$xu + yv + zw - 1 = 0,$$

so erhält man, nachdem man mit φ_3 multiplicirt hat

$$\varphi_0 u + \varphi_1 v + \varphi_2 w - \varphi_3 = 0.$$

Ordnet man dies nach steigenden Potenzen von λ, so entsteht

4. $$A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \lambda^3 \cdot A_3 = 0,$$

wobei

$$A_0 \equiv a_0 u + b_0 v + c_0 w - d_0\,, \qquad A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + c_1 w - d_1\,,$$
$$A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + c_2 w - d_2\,, \qquad A_3 \equiv a_3 u + b_3 v + c_3 w - d_3\,.$$

so dass $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ die Gleichungen von vier bestimmten Punkten sind*).

11. Man schliesst leicht, dass umgekehrt die Punkte, deren Gleichungen aus

$$A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \lambda^3 \cdot A_3 = 0$$

hervorgehen, wenn λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, eine Raumcurve III. O. erfüllen.

Denn aus der Gleichung No. 10, 3 folgen die Gleichungen No. 10, 2. Diese kann man als lineare Gleichungen für die drei Grössen λ^3, λ^2 und λ ansehen. Ordnet man sie demgemäss, so erhält man

1. $$\begin{aligned}(a_3 - xd_3)\lambda^3 + (a_2 - xd_2)\lambda^2 + (a_1 - xd_1)\lambda &= -(a_0 - xd_0)\,,\\ (b_3 - yd_3)\lambda^3 + (b_2 - yd_2)\lambda^2 + (b_1 - yd_1)\lambda &= -(b_0 - yd_0)\,,\\ (c_3 - zd_3)\lambda^3 + (c_2 - zd_2)\lambda^2 + (c_1 - zd_1)\lambda &= -(c_0 - zd_0)\,.\end{aligned}$$

Die Determinante dieses Systems ist

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_3 - xd_3 & a_2 - xd_2 & a_1 - xd_1 \\ b_3 - yd_3 & b_2 - yd_2 & b_1 - yd_1 \\ c_3 - zd_3 & c_2 - zd_2 & c_1 - zd_1 \end{vmatrix}.$$

Diese zerfällt in ein Polynom von acht Determinanten, von denen aber die identisch verschwinden, welche in zwei Zeilen Coordinaten als Faktoren stehen haben, da in diesen Determinanten diese beiden Zeilen proportionale Elemente enthalten. Es bleiben mithin nur vier Determinanten übrig

2. $$T_3 \equiv (a_3 b_2 c_1) - (d_3 b_2 c_1)x - (a_3 d_2 c_1)y - (a_3 b_2 d_1)z\,,$$

wenn man unter $(p_i q_k r_l)$ die Determinante versteht

$$(p_i q_k r_l) \equiv \begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ q_i & q_k & q_l \\ r_i & r_k & r_l \end{vmatrix}.$$

In gleicher Weise reduciren sich die Zähler der Auflösungen des Systems 1., und man erhält

3. $$\lambda^3 = \frac{T_0}{T_3}\,, \quad \lambda^2 = \frac{T_1}{T_3}\,, \quad \lambda = \frac{T_2}{T_3}\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} T_0 &\equiv -(a_0 b_2 c_1) + (d_0 b_2 c_1)x + (a_0 d_2 c_1)y + (a_0 b_2 d_1)z\,,\\ T_1 &\equiv -(a_3 b_0 c_1) + (d_3 b_0 c_1)x + (a_3 d_0 c_1)y + (a_3 b_0 d_1)z\,,\\ T_2 &\equiv -(a_3 b_2 c_0) + (d_3 b_2 c_0)x + (a_3 d_2 c_0)y + (a_3 b_2 d_0)z\,.\end{aligned}$$

Die Gleichungen 3. ergeben

$$\lambda = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_0}{T_1}\,,$$

mithin die Gleichungen

$$T_0 - \lambda T_1 = 0\,, \quad T_1 - \lambda T_2 = 0\,, \quad T_2 - \lambda T_3 = 0\,,$$

welche mit den Gleichungen No. 10, 1 übereinstimmen.

12. Die Eigenschaft, dass die Coordinaten jedes Punktes rationale Functionen eines veränderlichen Parameters sind, theilen die Raumcurven III. O. u. A. mit der Geraden und mit den Kegelschnitten.

Wenn A_0, A_1, A_2 lineare Functionen der Ebenencoordinaten sind, so ist der Ort der Punkte, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

1. $$A_0 + \lambda A_1 = 0$$

*) MÖBIUS, Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827, pag. 114—124.

bekanntlich die Gerade $A_0 A_1$. Aus 1. folgt für die Coordinaten jedes Punktes dieser Geraden die Darstellung

$$x = \frac{\varphi_0}{\varphi_3}\,, \quad y = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}\,, \quad z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}\,,$$

wobei φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 lineare Functionen von λ sind.

Die Punkte, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind

2. $$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0$$

liegen auf der Ebene der drei Punkte $A_0 A_1 A_2$; denn die Coordinaten dieser Ebene genügen der Gleichung 2. unabhängig von λ.

Wir beziehen die Gleichung auf ein Coordinatensystem, dessen XY-Ebene mit der Ebene $A_0 A_1 A_2$ zusammenfällt, und setzen dann $w = 0$; hierdurch mag entstehen

$$B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 = 0\,.$$

Dies ist die allgemeine Form der Gleichung eines Punktes unserer Curve in Liniencoordinaten, bezogen auf das neue System XOY. Aus dieser Gleichung folgen für x und y Werthe von der Form

$$x = \frac{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}\,, \quad y = \frac{b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2}{c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}\,.$$

Betrachtet man diese beiden Gleichungen als lineare Gleichungen in Bezug auf λ und λ^2, so erhält man Auflösungen von der Form

3. $$\lambda = T_1 : T_2\,, \quad \lambda^2 = T_0 : T_2\,,$$

wobei T_0, T_1, T_2 lineare Functionen der Coordinaten x und y sind. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division

4. $$\lambda = T_0 : T_1\,.$$

Die beiden Gleichungen 3. kann man durch die erste derselben und durch 4. ersetzen, so dass man die beiden Gleichungen behält

5. $$T_0 - \lambda T_1 = 0\,, \quad T_1 - \lambda T_2 = 0\,.$$

Diese lehren sofort, dass die Punkte, die der Gleichung 2. entspringen, die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectiven Büschel sind; die Gleichung des erzeugten Kegelschnitts ergiebt sich durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen 5. zu $T_0 T_2 - T_1^2 = 0$. Aus derselben ist ersichtlich, dass T_0 und T_2 die Curve in den beiden Punkten berühren, in denen sie von T_1 geschnitten wird.*)

13. Hat man auf einer Raumcurve III. O. zwei Punkte A und B gewählt, so sind dadurch die Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 bestimmt; die Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 (No. 10, 1) sind somit jede bis auf einen constanten Faktor bestimmt.

Ist noch ein Punkt C der Curve bekannt, und schneiden sich in demselben die Ebenen

1. $$a_0 T_0 - a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - a_3 T_3 = 0,$$

so sind die Verhältnisse der Coefficienten a_1, a_2, a_3 bestimmt, und die Punkte der Curve werden für jedes λ als Schnittpunkte der drei Ebenen erhalten

2. $$T_0 - \lambda \cdot a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - \lambda \cdot a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - \lambda \cdot a_3 T_3 = 0.$$

Hieraus ist ersichtlich: Eine Raumcurve III. O. ist durch zwei Punkte, die Tangenten und die Osculationsebenen in diesen Punkten, sowie durch einen dritten Punkt eindeutig bestimmt.

Der Punkt A, in welchem sich die Ebenen T_0, T_1, T_2 schneiden, dessen

*) MÖBIUS, Der baryc. Calcul, 5. Kapitel. CLEBSCH, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Crelles Journal, Bd. 64, S. 43. 1865.

Schmiegungsebene also T_0 ist, hat den Parameter $\lambda = 0$; denn für diesen Werth von λ reduciren sich die Ebenen 2. auf $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$.

Dividirt man die Gleichungen 2. durch λ und setzt dann $\lambda = \infty$, so reduciren sich die Gleichungen auf $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ und ergeben den Punkt B, dessen Schmiegungsebene T_3 ist. Der Punkt C hat den Parameter $\lambda = 1$. Man kann daher drei beliebig gewählten Punkten der Curve die Parameter 0, ∞, 1 zuertheilen; dann ist der Parameter jedes weiteren Punktes der Curve eindeutig bestimmt.

Wenn wir voraussetzen, dass drei willkürlich gewählten Punkten die Parameterwerthe 0, ∞, 1 zuertheilt worden sind, so können wir nun die Punkte der Curve durch die ihnen zugehörigen Parameterwerthe charakterisiren, und von den Punkten λ_1, λ_2 . . . der Curve sprechen.

14. Die Gleichung einer Ebene
$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0$$
lässt sich schreiben
$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 (T_1 - \lambda_1 T_2) = 0.$$
Sie enthält daher den Schnitt von
$$T_0 - \lambda_1 T_1 = 0 \quad \text{und} \quad T_1 - \lambda_1 T_2 = 0,$$
folglich auch den Punkt λ_1 der R_3, der der Schnittpunkt der Ebenen ist
$$T_0 - \lambda_1 T_1 = 0, \quad T_1 - \lambda_1 T_2 = 0, \quad T_2 - \lambda_1 T_3 = 0.$$
Da man aber $\mathfrak{T}_1$ auch schreiben kann
$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_0 - \lambda_2 T_1 - \lambda_1 (T_1 - \lambda_2 T_2) = 0,$$
so schliesst man, dass $\mathfrak{T}_1$ auch durch den Punkt λ_2 der R_3 geht; $\mathfrak{T}_1$ ist daher die Ebene der Punkte A, λ_1, λ_2.

Die Ebenengleichung
$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0$$
kann man in den Formen schreiben
$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_1 - \lambda_1 T_2 - \lambda_2 (T_2 - \lambda_1 T_3) \equiv T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_1 (T_2 - \lambda_2 T_3) = 0,$$
und schliesst daraus, dass $\mathfrak{T}_2$ durch die Punkte λ_1 und λ_2 geht, dass $\mathfrak{T}_2$ mithin die Ebene B, λ_1, λ_2 ist.

Der Verein der beiden Gleichungen
$$1. \qquad \begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &\equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \\ \mathfrak{T}_2 &\equiv T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0 \end{aligned}$$
charakterisirt somit die Secante $\lambda_1 \lambda_2$ der Raumcurve III. O.

Ist λ_2 von λ_1 nur um verschwindend wenig verschieden, so ist die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ Tangente der Curve im Punkte λ_2; in den Gleichungen 1. ist in diesem Falle $\lambda_2 = \lambda_1$ zu setzen. Man erhält daher die Gleichungen der Curventangente im Punkte λ
$$2. \qquad \begin{aligned} T_0 - 2\lambda T_1 + \lambda^2 T_2 &= 0, \\ T_1 - 2\lambda T_2 + \lambda^2 T_3 &= 0. \end{aligned}$$

15. Die Ebenengleichung
$$1. \quad \mathfrak{T} \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, T_1 + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2)\, T_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 T_3 = 0$$
lässt folgende Anordnungen zu
$$\begin{aligned} 2. \quad \mathfrak{T} &\equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 - \lambda_3 [T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3], \\ 3. \quad &\equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_3 T_2 - \lambda_2 [T_1 - (\lambda_1 + \lambda_3)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_3 T_3]. \end{aligned}$$
Die Gleichung 2. zeigt, dass $\mathfrak{T}$ durch die Punkte λ_1 und λ_2 geht, denn $\mathfrak{T}$ geht durch den Schnitt $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$ (No. 14). In gleicher Weise folgt aus 3., dass $\mathfrak{T}$ durch λ_1 und λ_3 geht. Folglich ist
$$\mathfrak{T} \equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, T_1 + (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2)\, T_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 T_3 = 0$$

die Gleichung der Ebene, welche die drei Curvenpunkte λ_1, λ_2, λ_3 enthält.

Die Gleichung der Ebene, welche die Tangente des Curvenpunktes λ_1 und den Curvenpunkt λ_2 enthält, geht aus 4. hervor, wenn man $\lambda_3 = \lambda_1$ setzt; man erhält
$$5. \qquad \mathfrak{T} \equiv T_0 - (2\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + (\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2)\, T_2 - \lambda_1^2 \lambda_2 T_3 = 0.$$
Rückt auch λ_2 unendlich nahe an λ_1, so erhält man die Gleichung der Osculationsebene im Punkte λ_1; in diesem Falle hat man in 5. $\lambda_2 = \lambda_1$ zu setzen, und erhält somit als Gleichung der Osculationsebene im Punkte λ
$$6. \qquad S \equiv T_0 - 3\lambda T_1 + 3\lambda^2 T_2 - \lambda^3 T_3 = 0.$$
Setzt man
$$\begin{aligned} T_0 &\equiv \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z - \delta_0, & T_1 &\equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1, \\ T_2 &\equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2, & T_3 &\equiv \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - \delta_3, \end{aligned}$$
so folgen aus 6. die Coordinaten der Osculationsebene zu
$$7. \qquad \begin{aligned} u &= (\alpha_0 - 3\alpha_1 \lambda + 3\alpha_2 \lambda^2 - \alpha_3 \lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3), \\ v &= (\beta_0 - 3\beta_1 \lambda + 3\beta_2 \lambda^2 - \beta_3 \lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3), \\ w &= (\gamma_0 - 3\gamma_1 \lambda + 3\gamma_2 \lambda^2 - \gamma_3 \lambda^3) : (\delta_0 - 3\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3). \end{aligned}$$
Die Coordinaten der Osculationsebene sind also gebrochene rationale Functionen dritten Grades des Parameters λ.

Beseitigt man in den Gleichungen 7. die Nenner, und betrachtet die dann entstehenden Gleichungen als lineare Gleichungen der drei Grössen λ, λ^2, λ^3, so erhält man
$$\begin{aligned} (\alpha_0 - \delta_0 u) - 3\,(\alpha_1 - \delta_1 u)\, \lambda + 3\,(\alpha_2 - \delta_2 u)\, \lambda^2 - (\alpha_3 - \delta_3 u)\, \lambda^3 &= 0, \\ (\beta_0 - \delta_0 v) - 3\,(\beta_1 - \delta_1 v)\, \lambda + 3\,(\beta_2 - \delta_2 v)\, \lambda^2 - (\beta_3 - \delta_3 v)\, \lambda^3 &= 0, \\ (\gamma_0 - \delta_0 w) - 3\,(\gamma_1 - \delta_1 w)\, \lambda + 3\,(\gamma_2 - \delta_2 w)\, \lambda^2 - (\gamma_3 - \delta_3 w)\, \lambda^3 &= 0. \end{aligned}$$
In gleicher Weise, wie bei dem analogen Systeme No. 11, 1 schliesst man, dass die Auflösungen dieses Systems nach λ, λ^2, λ^3 Quotienten linearer Functionen von u, v, w sind. Man erhält Lösungen von der Form
$$8. \qquad \lambda^3 = P_0 : P_3, \quad \lambda^2 = P_1 : P_3, \quad \lambda = P_2 : P_3,$$
worin
$$P_i = \mathfrak{a}_i u + \mathfrak{b}_i v + \mathfrak{c}_i w + \mathfrak{d}_i,$$
und $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{d}_i$ Subdeterminanten dritten Grades des Systems sind
$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}.$$
Die Formeln 8. ergeben durch Division und nachheriger Beseitigung der Nenner das äquivalente Formelsystem
$$9. \qquad P_0 - \lambda P_1 = 0, \quad P_1 - \lambda P_2 = 0, \quad P_2 - \lambda P_3 = 0.$$
Die drei Punkte, deren Gleichungen sind
$$\mathfrak{P} \equiv P_0 - \lambda P_1 = 0, \quad \mathfrak{P}' \equiv P_1 - \lambda P_2 = 0, \quad \mathfrak{P}'' \equiv P_2 - \lambda P_3 = 0$$
sind entsprechende Punkte dreier projectiven Reihen, welche zu Trägern die Geraden $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ haben.

Alle Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ gehen, umhüllen die Fläche II. O., deren Gleichung sich aus den Gleichungen $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{P}' = 0$ durch Elimination von λ ergiebt, nämlich
$$\mathfrak{F}_1 \equiv P_0 P_2 - P_1^2 = 0.$$
Alle Ebenen, deren Coordinaten den Gleichungen $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{P}'' = 0$ genügen, umhüllen die Fläche II. O.
$$\mathfrak{F}_2 \equiv P_0 P_3 - P_1 P_2 = 0.$$

Beide Flächen haben das Ebenenbüschel gemein, dessen Träger $P_0 P_1$ ist (haben also als Punktgebilde betrachtet die Gerade $P_0 P_1$ gemein). Wir schliessen daher: Die Osculationsebenen einer Raumcurve III. O. umhüllen eine abwickelbare Fläche, welche zwei Flächen II. O. umschrieben ist, die eine gemeinsame Gerade haben.

Analog der Definition einer Raumcurve III. O. definiren wir als abwickelbare Fläche dritter Klasse die Fläche, welche von den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Flächen II. O. gebildet wird, die eine Gerade gemein haben.

Mit Rücksicht auf diese Definition haben wir daher den Satz: Die Osculationsebenen einer Raumcurve III. O. umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.

Die Cuspidalkante (§ 10 No. 2) einer abwickelbaren Fläche $n$ter Klasse wird als Raumcurve $n$ter Klasse bezeichnet. Wir gewinnen somit den einfachsten Ausdruck für unseren Satz in der Form: Die Raumcurven III. O. sind zugleich Raumcurven III. Kl.

Wir unterbrechen hier unsere Erörterungen über die Raumcurven III. O. und wenden uns zu den abwickelbaren Flächen III. Kl., für deren Untersuchung wir den analogen Weg verfolgen. Im Laufe dieser Untersuchung wird sich, wie wir schon jetzt voraussehen können, ergeben, dass die Cuspidalkante jeder abwickelbaren Fläche III. Kl. eine Raumcurve III. O. ist, so dass alle Resultate dieses Abschnitts sich auf die Raumcurve III. O. und die von ihren Tangenten beschriebene (mithin von ihren Osculationsebenen umhüllte) abwickelbare Fläche beziehen.

---

1. B.*) Die abwickelbare Fläche III. Kl. bildet mit einem Ebenenbüschel zusammen die vollständige abwickelbare Fläche IV. Klasse 1. Sp., die zwei Flächen II. Kl. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ umschrieben ist. Durch jeden Punkt des Raumes gehen vier Ebenen dieser Fläche; eine dieser vier Ebenen gehört dem Ebenenbüschel an. Durch jeden Punkt des Raumes gehen daher drei Tangentenebenen einer abwickelbaren Fläche III. Kl.

2. B. Das Ebenenbüschel α bilde mit einer abwickelbaren Fläche III. O. $\mathfrak{R}_3$ eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp.; wir beschreiben in $\mathfrak{R}_3$ und α zwei Flächen II. O. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und bemerken auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei Ebenenbüschel α' und α'' desselben Systems, wie α (d. i. zwei Büschel von Tangentenebenen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, deren Träger zu demselben Systeme von Geraden auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gehören, wie der Träger des Büschels α). Durch jeden Punkt P des Trägers von α geht ein Träger eines Büschels β' auf $\mathfrak{F}_1$ und ein Träger eines Büschels β'' auf $\mathfrak{F}_2$, die mit α nicht demselben Systeme angehören. Die Träger der Büschel β' treffen den Träger von α' in einer Punktreihe, welche der Reihe der P projectiv ist; denn zwei Geraden einer Fläche II. O. $\mathfrak{F}_1$, die demselben System angehören, werden von allen Geraden des andern Systems β' in zwei projectiven Punktreihen getroffen. Die Träger der Büschel β'' treffen α'' aus gleichem Grunde in einer Punktreihe, die ebenfalls mit der Reihe der P projectiv ist.

Jede Ebene von $\mathfrak{R}_3$ gehört zu einem Büschel β' und zu einem Büschel β''; durch ihren Schnittpunkt P mit dem Träger von α gehen die Träger von β' und β''; also treffen die Ebenen von $\mathfrak{R}_3$ die Träger der Büschel α, α', α'' in projectiven Punktreihen.

*) Die Abschnitte 1 B, 2 B, . . . entsprechen dual den Abschnitten § 15, 1, 2, . . .

Wir bemerken noch, dass durch die projectiven Reihen α' und α'' eine Fläche II. O. $\mathfrak{F}_3$ erzeugt wird, die ebenfalls der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, und dass die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ das Büschel α', die Flächen $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ das Büschel α'' gemein haben; also bilden auch die Büschel α' und α'' mit $\mathfrak{R}_3$ eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp.

Die Ebenen, welche eine abwickelbare Fläche III. Kl. umhüllen, gehen durch die entsprechenden Punkte dreier projectiven Punktreihen; die Träger dieser Punktreihen sind die Träger dreier Ebenenbüschel, die mit der $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bilden. Umgekehrt schliesst man leicht: Die Ebenen, welche durch die entsprechenden Punkte dreier projectiven Punktreihen gehen, umhüllen eine $\mathfrak{R}_3$.

3. B. Wir fragen nun nach den Ebenen der $\mathfrak{R}_3$, welche zum Büschel α gehören. Dies sind die Ebenen dieses Büschels, welche entsprechende Punkte der auf den Trägern von α' und α'' liegenden projectiven Reihen verbinden; also sind es Tangentenebenen von $\mathfrak{F}_3$. Wir schliessen daher: Zu jedem Ebenenbüschel, welches mit $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine vollständige abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bildet, gehören zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$.

Aus diesem Grunde wird α als eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ bezeichnet.

4. B. Eine Ebene enthält im Allgemeinen nur eine Linie in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$; jede Linie in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ ist der Träger eines Ebenenbüschels, das mit $\mathfrak{R}_3$ zusammen eine abwickelbare Fläche IV. Kl. 1. Sp. bildet.

5. B. Sind $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ drei Flächen II. Kl., die nicht zu derselben Schaar gehören und einer $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben sind, so wird die Gleichung jeder Fläche, die der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, in der Form erhalten

1. $$\mathfrak{F} = \mu_1 \mathfrak{F}_1 + \mu_2 \mathfrak{F}_2 + \mu_3 \mathfrak{F}_3 = 0 .$$

Denn zwei Ebenen T_1 und T_2, welche $\mathfrak{R}_3$ nicht berühren, enthalten je eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$; durch diese beiden Linien und durch die $\mathfrak{R}_3$ ist eine Fläche II. Kl. eindeutig bestimmt; also ist durch eine $\mathfrak{R}_3$ und durch zwei Ebenen, die nicht zu $\mathfrak{R}_3$ gehören, eine Fläche II. Kl. eindeutig bestimmt. Sind $\mathfrak{F}_{1i}$, $\mathfrak{F}_{2i}$, $\mathfrak{F}_{3i}$ die Werthe, welche die Functionen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ für die Coordinaten der Ebene T_i annehmen, so ist offenbar

$$\mathfrak{F} = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{F}_3 \\ \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{31} \\ \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{22} & \mathfrak{F}_{32} \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung einer Fläche II. Kl., welche von den Ebenen T_1 und T_2 berührt wird, der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist; und diese Gleichung ist von der Form 1.

6. B. Aehnlich, wie in No. 6, schliessen wir: Die Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$, die auf einer Ebene der $\mathfrak{R}_3$ liegen, bestimmen eine Grenzfläche II. Kl.; oder: Die Geraden, in welchen eine Ebene einer $\mathfrak{R}_3$ von den andern geschnitten wird, umhüllen einen Kegelschnitt.

Durch sechs Ebenen 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer $\mathfrak{R}_3$ ist die Grenzfläche G_1 bestimmt, welche 1 zur Doppelebene hat und von den fünf andern berührt wird; ebenso die Grenzfläche G_2, welche 2 zur Doppelebene hat und von 1, 3, 4, 5, 6 berührt wird. Beide Grenzflächen werden von allen Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ berührt und haben ausserdem das Ebenenbüschel 1, 2 gemein. Dies zeigt: Eine abwickelbare Fläche III. Kl. ist durch sechs Ebenen bestimmt.

Die Construction einer $\mathfrak{R}_3$ aus sechs gegebenen Ebenen ist hiermit erledigt.

7. B. Wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, so enthalten alle Ebenenbüschel auf $\mathfrak{F}$, deren Träger nicht Gerade in zwei Ebenen der Ebenenbüschel $\mathfrak{R}_3$ sind, eine reale Ebene der $\mathfrak{R}_3$.

8. B. Wenn das Ebenenbüschel β nur eine Ebene einer $\mathfrak{R}_3$ enthält, so umhüllen alle Ebenenbüschel, die von einer Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ getragen werden und mit β eine Ebene gemein haben, eine Fläche II. Kl.

9. B. Jede Ebene, die eine Gerade b enthält, die auf nur einer Ebene T_1 einer $\mathfrak{R}_3$ liegt, enthält eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$; diese Linien erfüllen (8. B) eine Fläche II. Kl. $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{R}_3$ eingeschrieben ist, und schneiden daher eine andere Ebene T_2 der $\mathfrak{R}_3$ in den Punkten der Geraden b', in welcher $\mathfrak{F}$ von T_2 berührt wird und die mit b zu demselben Systeme gehört. Die Punktreihen, in denen b und b_1 von Linien in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ getroffen werden, sind projectiv. Jeder Geraden b in T_1 entspricht somit eine bestimmte Gerade b' in T_2, und die Punkte auf b sind mit der Punktreihe auf b' projectiv.

Durch einen Punkt A auf T_1 gehen ausser T_1 noch zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$, also geht durch A die von diesen beiden Ebenen bestimmte Linie in zwei Ebenen von $\mathfrak{R}_3$. Die Geraden b, welche in T_1 liegen und durch A gehen, werden von dieser Linie getroffen; ihnen entsprechen in T_2 die Geraden b', welche von derselben Linie getroffen werden, welche also durch den Schnittpunkt dieser Linie mit der Ebene T_2 gehen. Einem Strahlbüschel in T_1 entspricht daher ein Strahlbüschel in T_2, und die Träger dieser Strahlbüschel liegen auf einer Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$.

Zu jeder Geraden b kann man hiernach die entsprechende Gerade b' leicht construiren, wenn zu vier Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 in T_1 die entsprechenden b_1', b_2', b_3', b_4' in T_2 gegeben sind.

Die Geraden b_2, b_3, b_4, b bestimmen auf b_1, und die entsprechenden Geraden b_2', b_3', b_4', b' auf b_1' zwei projective Reihen; b' geht daher durch den Punkt auf b_1', der dem Schnittpunkte von b_1 und b entspricht. Ebenso bestimmen b_1, b_3, b_4, b auf b_2 und b_1', b_3', b_4', b' auf b_2' zwei projective Reihen; hierdurch bestimmt sich der Punkt, in welchem b_2' von b' geschnitten wird. Da man nun die Punkte kennt, in denen b_1' und b_2' von b' geschnitten werden, so ist b' selbst bekannt.

Dieselbe Construction verwendet man bei zwei projectiven Ebenen, auf welchen die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 den Geraden b_1', b_2', b_3', b_4' entsprechen, um zu jeder Geraden b der einen Ebene die entsprechende Gerade b' der andern zu construiren. Da nun je zwei Schnittpunkte zweier Geraden auf T_1 und der entsprechenden beiden auf T_2 eine Linie in zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ bestimmen, so schliessen wir: Die Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ werden von je zwei Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ in entsprechenden Punkten zweier projectiven Punktsysteme geschnitten.

Jede Ebene, in welcher zwei Linien in zwei Ebenen einer $\mathfrak{R}_3$ liegen, ist eine Tangentenebene der $\mathfrak{R}_3$. Wir sehen daher: Die Ebenen, welche zwei projective Ebenen in entsprechenden Geraden schneiden, umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.

10. B. Die Gleichungen entsprechender Punkte dreier projectiven Punktreihen, durch welche eine $\mathfrak{R}_3$ erzeugt wird, vereinfachen sich in bemerkens-

werther Weise, wenn man als Träger zweier Reihen zwei auf der Fläche $\mathfrak{R}_3$ liegende Gerade σ und τ und als Träger der dritten den Schnitt α der Ebenen wählt, welche $\mathfrak{R}_3$ längs σ und τ berühren. Wir bemerken, dass σ und τ die Cuspidalkante der Fläche berühren; die Berührungspunkte seien P_0 und P_3.

Der Punkt P_0 der Geraden σ ist der Schnitt von σ mit der Ebene von $\mathfrak{R}_3$, welche der durch σ gehenden unendlich nahe liegt; ihm entspricht daher auf α der Schnitt P_1 von α und σ, und auf τ der Schnitt P_2 von τ und α.

Die Ebene von $\mathfrak{R}_3$, welche der Ebene αP_3 unendlich nahe liegt, trifft σ in P_1, α in P_2 und τ in P_3, also entsprechen sich auch diese drei Punkte.

Die linearen Functionen P_0, P_1, P_2, P_3 lassen sich nun immer mit solchen Zahlen multipliciren, dass die Gleichungen entsprechender Punkte der drei Reihen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ die Form haben

$$P \equiv \mu_1 P_0 - \mu_2 P_1 = 0\,, \quad P' \equiv \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 = 0\,, \quad P'' \equiv \mu_1 P_2 - \mu_2 P_3 = 0\,.$$

Dividirt man durch μ_1 und setzt $\mu_2 : \mu_1 = 0$, so entstehen die Gleichungen

1. $$P \equiv P_0 - \mu P_1 = 0\,, \quad P' \equiv P_1 - \mu P_2 = 0\,, \quad P'' \equiv P_2 \equiv \mu P_3 = 0\,.$$

Jede Ebene, deren Coordinaten diesen drei Gleichungen für irgend einen Werth der veränderlichen Zahl genügen, berührt die $\mathfrak{R}_3$. Man kann aus denselben u, v, w durch μ ausdrücken und erhält somit die Coordinaten jeder Ebene der $\mathfrak{R}_3$ als rationale Functionen eines Parameters μ; die Auflösungen des Systems 1. haben die Form

2. $$\begin{aligned} u &= (\alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \alpha_3 \mu^3) : (\delta_0 + \delta_1 \mu + \delta_2 \mu^2 + \delta_3 \mu^3)\,, \\ v &= (\beta_0 + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu^2 + \beta_3 \mu^3) : (\delta_0 + \delta_1 \mu + \delta_2 \mu^2 + \delta_3 \mu^3)\,, \\ w &= (\gamma_0 + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu^2 + \gamma_3 \mu^3) : (\delta_0 + \delta_1 \mu + \delta_2 \mu^2 + \delta_3 \mu^3)\,. \end{aligned}$$

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung ein

$$ux + vy + wz - 1 = 0\,,$$

so erhält man nach Beseitigung des Nenners eine Gleichung von der Form

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3 A_3 = 0\,,$$

worin A_0, A_1, A_2, A_3 lineare Functionen in Punktcoordinaten sind.

11. B. Ebenso, wie in No. 11, schliesst man umgekehrt: Alle Ebenen, deren Gleichungen aus

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3 A_3 = 0$$

erhalten werden, indem man dem Parameter μ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ ertheilt, umhüllen eine abwickelbare Fläche III. Kl.

12. B. Die Eigenschaft, dass die Coordinaten jeder Ebene sich als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, hat die abwickelbare Fläche III. Kl. mit der Geraden und dem Kegel II. O. gemein. Sind A_0, A_1, A_2 die Gleichungen dreier Ebenen, so geht jede Ebene, deren Gleichung von der Form ist

1. $$A_0 + \mu A_1 = 0$$

durch die Gerade $A_0 A_1$.

Jede Ebene, deren Gleichung die Form hat

2. $$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 = 0$$

geht durch den Schnittpunkt der Ebenen $A_0 A_1 A_2$. Die Gleichung der Spur von T auf der XY-Ebene entsteht, wenn man in 2. $z = 0$ setzt. Man erhält dann eine Gleichung von der Form

3. $$B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 = 0\,,$$

worin B_0, B_1, B_2 lineare Functionen von x und y sind. Aus dieser Gleichung erhält man für die Coordinaten der Spur Ausdrücke der Form

$$u = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2}{\gamma_0 + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu^2}\,, \quad v = \frac{\beta_0 + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu^2}{\gamma_0 + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu^2}\,;$$

löst man diese Gleichungen nach μ und μ^2, so erhält man

4. $$\mu = P_1 : P_2, \quad \mu^2 = P_0 : P_2,$$
wobei P_0, P_1, P_2 lineare Functionen von u und v sind. Durch Division folgt aus 3.

5. $$\mu = P_0 : P_2,$$
und hieraus und aus der ersten Gleichung 3.
$$P_0 - \mu P_1 = 0, \quad P_1 - \mu P_2 = 0.$$

Die Geraden, welche der Gleichung 3. entspringen, sind daher die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiven Punktreihen auf $P_0 P_1$ und $P_1 P_2$; sie umhüllen den Kegelschnitt
$$P_0 P_2 - P_1^2 = 0.$$

Die Ebenen, deren Gleichungen unter der Form 2. enthalten sind, gehen durch einen Punkt und ihre Spuren auf der XY-Ebene umhüllen einen Kegelschnitt, also umhüllen die Ebenen selbst einen Kegel II. O.

13. B. Durch zwei Ebenen, welche die $\mathfrak{R}_3$ berühren, durch die Geraden σ und τ, in welchen sie die $\mathfrak{R}_3$ berühren, und durch die Punkte P_0 und P_3 der Cuspidalkante der $\mathfrak{R}_3$, welche auf σ und τ liegen, sind die Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ (No. 10 B) gegeben. Ist nun noch eine Ebene C von $\mathfrak{R}_3$ gegeben, so sind die Punkte bekannt, in welchen die Geraden σ, α und τ von dieser Ebene geschnitten werden; die Gleichungen dieser Punkte seien

1. $$P_0 - a_1 P_1 = 0, \quad a_1 P_1 - a_2 P_2 = 0, \quad a_2 P_2 - a_3 P_3 = 0.$$

Die Gleichungen je dreier entsprechenden Punkte der drei Reihen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ sind dann vollständig bestimmt, nämlich

2. $$P_0 - \mu a_1 P_1 = 0, \quad a_1 P_1 - \mu a_2 P_2 = 0, \quad a_2 P_2 - \mu a_3 P_3 = 0.$$

Dies ergiebt: Eine abwickelbare Fläche III. Kl. ist durch zwei berührende Ebenen A und B, durch die Geraden σ und τ, längs welcher sie die Fläche berühren, durch die Punkte P_0 und P_3 der Cuspidalkante, welche auf diesen Geraden liegen und durch eine dritte berührende Ebene eindeutig bestimmt.

Die Ebenen A, B, C gehören zu den Parameterwerthen 0, ∞, 1. Man kann daher diese drei Parameterwerthe drei beliebigen Ebenen der $\mathfrak{R}_3$ zuertheilen; der Parameter jeder andern Ebene ist dann eindeutig bestimmt.

14. B. Die Gleichung eines Punktes

1. $$\mathfrak{P}_1 = P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0$$
kann man in zweifacher Weise anordnen

2. $$\mathfrak{P}_1 = P_0 - \mu_1 P_1 - \mu_2 (P_1 - \mu_1 P_2) = 0,$$

3. $$= P_0 - \mu_2 P_1 - \mu_1 (P_1 - \mu_2 P_2) = 0.$$

Aus 2. folgt, dass $\mathfrak{P}_1$ auf der Geraden liegt, welche die Schnittpunkte der Ebene μ_1 mit den Geraden σ und α verbindet; und aus 3., dass $\mathfrak{P}_1$ auch auf der Geraden liegt, welche die Schnittpunkte der Ebene μ_2 und der Geraden σ und α verbindet; folglich liegt $\mathfrak{P}_1$ auf den Ebenen μ_1 und μ_2. In gleicher Weise schliesst man, dass auch der Punkt
$$\mathfrak{P}_2 = P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = 0$$
ein gemeinsamer Punkt der Ebenen μ_1 und μ_2 ist. Die Gleichungen der Linie in den Ebenen μ_1, μ_2 der $\mathfrak{R}_3$ sind daher

4. $$P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0, \quad P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = 0.$$

Sind μ_1 und μ_2 unendlich wenig von einander verschieden, so ist die Linie in den Ebenen $\mu_1 \mu_2$ die Gerade, längs welcher $\mathfrak{R}_3$ von μ_1 berührt wird. Folglich sind die Gleichungen der Geraden, längs welcher $\mathfrak{R}_3$ von der Ebene μ berührt wird

5. $$P_0 - 2\mu P_1 + \mu^2 P_2 = 0, \quad P_1 - 2\mu P_2 + \mu^2 P_3 = 0.$$

15. B. Die Gleichung

1. $$\mathfrak{P} = P_0 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_1 + (\mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_1 + \mu_1 \mu_2) P_2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 P_3 = 0$$
lässt folgende Anordnungen zu

2. $$\mathfrak{P} = P_0 - (\mu_1 + \mu_2) P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 - \mu_3 [P_1 - (\mu_1 + \mu_2) P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3] = 0,$$

3. $$= P_0 - (\mu_1 + \mu_3) P_1 + \mu_1 \mu_3 P_2 - \mu_2 [P_1 - (\mu_1 + \mu_3) P_2 + \mu_1 \mu_3 P_3] = 0,$$

4. $$= P_0 - (\mu_2 + \mu_3) P_1 + \mu_2 \mu_3 P_2 - \mu_1 [P_1 - (\mu_2 + \mu_3) P_2 + \mu_2 \mu_3 P_3] = 0.$$

Aus denselben erkennt man, dass durch $\mathfrak{P}$ die drei Ebenen μ_1, μ_2, μ_3 der Fläche $\mathfrak{R}_3$ gehen.

Die Gleichung des Punktes, in welchem die auf der Ebene μ liegende Gerade der Fläche $\mathfrak{R}_3$ von der Ebene μ_1 geschnitten wird, folgt hiernach zu
$$P_0 - (2\mu + \mu_1) P_1 + (\mu^2 + 2\mu\mu_1) P_2 - \mu^2 \mu_1 P_3 = 0.$$

Ist μ_1 nur unendlich wenig von μ verschieden, so erhält man hieraus die Gleichung des auf der Ebene μ liegenden Punktes der Cuspidalkante der abwickelbaren Fläche III. Kl.
$$P_0 - 3\mu P_1 + 3\mu^2 P_2 - \mu_3 P_3 = 0.$$

Vergleichen wir dies mit No. 10, 4, so folgt: Die Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche III. Kl. ist eine Raumcurve III. O.

Die Raumcurve III. O. und die abwickelbare Fläche III. Kl. treten also immer vereint auf. Die Tangentenfläche jeder Raumcurve III. O. ist eine abwickelbare Fläche III. Kl., und die Cuspidalkante jeder abwickelbaren Fläche III. Kl. ist eine Raumcurve III. O.

---

16. Die Parameter λ der Punkte einer Raumcurve III. O., deren Schmiegungsebenen durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehen, werden erhalten, wenn man in der Gleichung der Schmiegungsebene des Punktes λ (No 15, 6)

1. $$T_0 - 3\lambda T_1 + 3\lambda^2 T_2 - \lambda^3 T_3 = 0$$
die Zahl λ so wählt, dass dieser Gleichung durch die Coordinaten des Punktes P genügt wird. Setzt man diese Coordinaten in 1. ein, so erhalten die linearen Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 bestimmte Zahlenwerthe, und die gesuchten Werthe von λ sind die Wurzeln der cubischen Gleichung 1. Bezeichnet man diese Wurzeln mit λ_1, λ_2, λ_3, so ist

2. $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 T_2 : T_3, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3 T_1 : T_3, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = T_0 : T_3.$$

Die Gleichung der Ebene der Punkte λ_1, λ_2, λ_3 ist (No. 15, 1)

3. $$T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) T_1 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) T_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 T_3 = 0.$$

Setzt man die Werthe 2. in 3. ein, so wird 3. identisch erfüllt; daher folgt: Der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen dreier Punkte einer Raumcurve III. O. liegt auf der Ebene dieser drei Punkte.

Bildet man den entsprechenden Satz für die abwickelbare Fläche III. Kl.: Die Ebene dreier Punkte der Cuspidalkante einer abwickelbaren Fläche III. O. geht mit den drei Ebenen dieser Punkte durch einen Punkt, — so erkennt man, dass derselbe mit dem vorigen Satze identisch ist.

Wenn die Gleichung 1. eine reale Wurzel λ_1 und zwei conjugirt complexe λ_2 und λ_3 hat, so geht durch P nur eine reale Osculationsebene von R_3; die beiden andern Osculationsebenen, sowie die Punkte der Curve, an denen diese liegen, sind conjugirt complex. Die Secante dieser Punkte ist real; die Ebenen
$$T_0 - (\lambda_2 + \lambda_3) T_1 + \lambda_2 \lambda_3 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) T_2 + \lambda_2 \lambda_3 T_3 = 0,$$
deren Schnitt die Secante $\lambda_2 \lambda_3$ ist, sind beide real, auch wenn λ_2 und λ_3 conjugirt complex sind.

Umgekehrt sieht man sofort: Wenn die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 gegeben sind, so bleibt der Punkt P, dessen Coordinaten den Gleichungen 2. genügen und durch dieselben eindeutig bestimmt werden, real, auch wenn zwei von den Werthen λ_1, λ_2, λ_3 conjugirt complex sind.

Jeder Ebene T ist also in Bezug auf eine Raumcurve III. O. ein auf ihr enthaltener Punkt P zugeordnet, umgekehrt jedem Punkte eine Ebene; in dem Punkte P schneiden sich die Osculationsebenen der auf der Ebene T liegenden Curvenpunkte; oder: auf der Ebene T liegen die Punkte, in welchen die Raumcurve von den drei durch P gehenden Oculationsebenen berührt wird.

Der Punkt P wird als *Pol* der Ebene T, die Ebene T als *Polarebene* des Punktes P in Bezug auf die R_3 bezeichnet.

17. A. Die Parameter λ_1 und λ_2 der Punkte einer R_3, welche dieselbe mit der durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehenden Secante der Curve gemein hat, lassen sich wie folgt bestimmen: Durch die Secante $\lambda_1 \lambda_2$ gehen (No. 14, 1) die beiden Ebenen

1. $T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0.$

Diesen Gleichungen wird durch die Coordinaten von P genügt. Hat man diese Coordinaten in 1. eingesetzt, so sind in 1. nur noch die Zahlen λ_1 und λ_2 unbestimmt. Aus 1. folgt hierfür

2. $$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{T_0 T_2 - T_1^2}{T_1 T_3 - T_2^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{T_0 T_3 - T_1 T_2}{T_1 T_3 - T_2^2},$$

und nun lässt sich leicht die quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln die Parameter λ_1 und λ_2 sind.

Liegt P auf der Tangentenfläche von R_3, also auf der abwickelbaren Fläche III. Kl., welche R_3 zur Cuspidalkante hat, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$, und man hat die beiden Gleichungen

$$\lambda_1^2 = \frac{T_0 T_2 - T_1^2}{T_1 T_3 - T_2^2}, \quad 2\lambda_1 = \frac{T_0 T_3 - T_1 T_2}{T_1 T_3 - T_2^2}.$$

Die ausreichende und nothwendige Bedingung für den Verein dieser beiden Gleichungen ist

3. $$4\,(T_0 T_2 - T_1^2)(T_1 T_3 - T_2^2) - (T_0 T_3 - T_1 T_2)^2 = 0.$$

Wenn die Coordinaten eines Punktes dieser Gleichung genügen, so liegt der Punkt auf der Tangentenfläche von R_3; also ist 3. *die Gleichung der Tangentenfläche der Raumcurve* III. O.; dieselbe ist *vom vierten Grade*. Wir schliessen daher: *Jede Gerade wird von vier Tangenten einer Raumcurve* III. O. *getroffen*.

Die *Ordnung der Tangentenfläche einer Raumcurve* bezeichnet man als den *Rang der Curve*; *eine Raumcurve* III. O. *ist daher vom vierten Range*.

B. Ist T eine gegebene Ebene und sind μ_1 und μ_2 die Parameter der Ebenen einer Fläche $\mathfrak{R}_3$, welche sich auf T schneiden, so genügen die Coordinaten von T den beiden Gleichungen (No. 14 B, 3)

$$P_0 - (\mu_1 + \mu_2)\, P_1 + \mu_1 \mu_2 P_2 = 0, \quad P_1 - (\mu_1 + \mu_2)\, P_2 + \mu_1 \mu_2 P_3 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die unbekannten Parameterwerthe bestimmen; man erhält

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{P_0 P_2 - P_1^2}{P_1 P_3 - P_2^2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = \frac{P_0 P_3 - P_1 P_2}{P_1 P_3 - P_2^2}.$$

Enthält T eine auf $\mathfrak{R}_3$ gelegene Gerade (den Schnitt zweier auf einander folgenden Ebenen von $\mathfrak{R}_3$), so ist $\mu_1 = \mu_2$, und man hat

$$\mu_1^2 = \frac{P_0 P_2 - P_1^2}{P_1 P_3 - P_2^2}, \quad 2\mu_1 = \frac{P_0 P_3 - P_1 P_2}{P_1 P_3 - P_2^2}.$$

Die Bedingung für den Verein dieser beiden Gleichungen ist *die Gleichung der Fläche, die von den Ebenenbüscheln umhüllt wird, welche die Geraden der* $\mathfrak{R}_3$ *zu Trägern haben*, nämlich

$$4\,(P_0 P_2 - P_1^2)(P_1 P_3 - P_2^2) - (P_0 P_3 - P_1 P_2)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vom *vierten Grade*, die durch sie dargestellte Fläche also von der *vierten Klasse*.

Durch eine gegebene Gerade gehen daher vier Ebenen dieser Fläche, und die Gerade wird folglich von vier Geraden der $\mathfrak{R}_3$ getroffen, ein Ergebniss, das mit dem in 17 A erhaltenen identisch ist.

18. Wir denken uns eine Raumcurve III. O. als Schnitt zweier Kegel II. O. K_1 und K_2. Legt man durch die Spitze von K_1 Gerade, die den Mantellinien von K_2 parallel sind, so erhält man einen Kegel K_2', der mit K_2 congruent ist, und mit K_1 die Mantelline gemein hat, welche die Spitzen von K_1 und K_2 verbindet. Die beiden Kegel K_1 und K_2' haben daher noch drei Mantellinien gemein, von denen wenigstens eine real ist. Folglich haben die beiden Kegel K_1 und K_2 drei Paar parallele Mantellinien, die Curve R_3 *daher drei unendlich ferne Punkte*, von denen wenigstens einer real ist.

Von einem dieser Punkte aus wird die Curve durch einen Kegel II. O. mit unendlich ferner Spitze projicirt; also *lassen sich durch eine* R_3 *drei Cylinder* II. O. *legen, von denen wenigstens einer real ist*.

Die Werthe des Parameters λ, welche den unendlich fernen Punkten zugehören, sind die Wurzeln der Gleichung (No. 10, 3)

$$\varphi_3 = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung drei reale verschiedene Wurzeln, zwei gleiche und eine dritte von diesen verschiedene reale Wurzeln, oder drei gleiche reale Wurzeln, oder eine reale und zwei conjugirt complexe Wurzeln hat, besitzt die Curve drei getrennte reale, zwei vereinte und einen von diesen getrennten realen, oder drei vereinte reale, oder nur einen realen unendlich fernen Punkt. Die Tangenten der Curve, die sie in den unendlich fernen Punkten berühren, werden als *Asymptoten* der Curve bezeichnet. Giebt es drei reale getrennte unendlich ferne Punkte, so giebt es drei Asymptoten, die nicht unendlich fern sind; sind zwei unendlich ferne Punkte real und vereint, so hat die Curve eine unendlich ferne Tangente (unendlich ferne Asymptote), und ausserdem noch eine Asymptote, die nicht unendlich fern ist; sind drei reale unendlich ferne Punkte vereint, so ist die unendlich ferne Ebene Osculationsebene der Curve; ist nur ein realer unendlich ferner Punkt vorhanden, so hat die Curve nur eine reale Asymptote.

Hiernach zerfallen die Raumcurven III. O. in vier Gruppen von Curven, die ihren Gestaltsverhältnissen nach wesentliche Verschiedenheiten darbieten:

Cubische Hyperbel, mit drei realen Asymptoten;

cubische hyperbolische Parabel, mit einer realen Asymptote und einer unendlich fernen Tangente;

cubische Parabel, mit einer unendlich fernen Osculationsebene;

cubische Ellipse, mit einer realen und zwei imaginären Asymptoten.

19. Eine Raumcurve wird von einem Punkte P_0 aus durch einen Kegel projicirt.

Die beiden Punkte der Fläche II. O. $f = 0$, welche auf der Geraden $P_0 P$ liegen, theilen die Strecke $P_0 P$ in Verhältnissen μ, welche die Wurzeln der Gleichung sind

1. $$f_0 + 2\mu\,(f_{10}' x_1 + f_{20}' x_2 + f_{30}' x_3 + f_{40}' x_4) + \mu^2 \cdot f = 0.$$

Für die Punkte der Strecke $P_0 P$, die auf der Fläche II. O. $\varphi = 0$ liegen, erhält man

2. $$\varphi_0 + 2\mu\,(\varphi_{10}'x_1 + \varphi_{20}'x_2 + \varphi_{30}'x_3 + \varphi_{40}'x_4) + \mu^2 \cdot \varphi = 0.$$

Liegt nun P auf einem der Strahlen, durch welche die Punkte der Schnittcurve der Flächen f und φ von P_0 aus projicirt werden, so haben die Gleichungen 1. und 2. eine gemeinsame Wurzel, und diese Wurzel entspricht dem auf der Geraden $P_0 P$ liegenden Punkte der Raumcurve f, φ. Setzt man abkürzungsweise $f_{10}'x_1 + f_{20}'x_2 + f_{30}'x_3 + f_{40}'x_4 = F$, $\varphi_{10}'x_1 + \varphi_{20}'x_2 + \varphi_{30}'x_3 + \varphi_{40}'x_4 = \Phi$, so bestehen für eine gemeinsame Wurzel von 1. und 2. ausser 1. und 2. noch die Gleichungen, welche aus 1. und 2. durch Multiplication mit μ hervorgehen, so dass man den Verein von vier Gleichungen hat

$$\begin{aligned}
f_0 + 2F\cdot\mu + f\cdot\mu^2 \qquad\qquad &= 0,\\
f_0\cdot\mu + 2F\cdot\mu^2 + f\cdot\mu^3 &= 0,\\
\varphi_0 + 2\Phi\cdot\mu + \varphi\cdot\mu^2 \qquad\qquad &= 0,\\
\varphi_0\cdot\mu + 2\Phi\cdot\mu^2 + \varphi\cdot\mu^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus dem Vereine dieser vier Gleichungen folgt das Verschwinden der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} f_0 & F & f & \\ & f_0 & F & f \\ \varphi_0 & \Phi & \varphi & \\ & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt schliesst man leicht, dass wenn die Resultante R verschwindet, die Gleichungen 1. und 2. eine gemeinsame Wurzel haben. Denn multiplicirt man die Verticalreihen von R der Reihe nach mit 1, μ, μ^2, μ^3 und addirt dann die zweite, dritte und vierte Reihe zur ersten, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} G & F & f & f \\ G\mu & f_0 & F & f \\ H & \Phi & \varphi & \\ H\mu & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

wobei G und H die linken Seiten der Gleichungen 1. und 2. bezeichnen. Nach den Gliedern der ersten Verticalreihe entwickelnd erhält man

3. $$R = A\cdot G + B\cdot H,$$

wo A und B lineare Functionen von μ sind.

Ist nun $R = 0$ und wählt man für μ eine Wurzel der Gleichung $G = 0$, so folgt aus 3. dass auch

$$B\cdot H = 0.$$

Da nun B vom ersten Grade ist, so folgt, dass für eine der beiden Wurzeln von $G = 0$ auch H verschwinden muss, dass also die Gleichungen $G = 0$ und $H = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Die Function R ist vom vierten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4; sie lehrt daher: Die Schnittcurve zweier Flächen II. O. wird von einem beliebigen Punkte des Raumes aus durch einen Kegel IV. O. projicirt.

Wählt man P_0 auf der Schnittcurve, so ist $f_0 = \varphi_0 = 0$ und die Gleichungen 1. und 2. gehen nach Unterdrückung der selbstverständlichen gemeinsamen Wurzel $\mu = 0$ in die linearen Gleichungen über

$$2F + f\cdot\mu = 0, \quad 2\Phi + \varphi\cdot\mu = 0.$$

Projicirt der Strahl $P_0 P$ einen Punkt der Raumcurve F, φ, so ergeben diese Gleichungen denselben Werth für μ, also ist

6. $$F\varphi - \Phi f = 0.$$

Diese ist vom dritten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4. Daher folgt: Eine Raumcurve IV. O. I. Sp. wird von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel III. O. projicirt.

20. Haben die Flächen f und φ eine gemeinsame Gerade, so wird dieselbe von P_0 aus durch eine Ebene projicirt; diese Ebene bildet einen Theil des Kegels, der die Raumcurve (f, φ) von P aus projicirt. Eine Raumcurve III. O. wird von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte aus durch einen Kegel III. O. projicirt, und von einem auf ihr liegenden Punkte aus durch einen Kegel II. O.

Den letzten Theil dieses Satzes haben wir früher auf einem andern Wege gefunden.

Eine beliebige, P_0 nicht enthaltende Ebene T schneidet den Kegel Γ, welcher eine R_3 von P_0 aus projicirt, in einer ebenen Curve III. O. C_3. Jede durch P_0 gehende Ebene T_1 enthält drei Punkte von R_3, also drei Mantellinien von Γ, und die Spur von T_1 auf T enthält drei Punkte von C_3.

Jeder Punkt der C_3 erscheint als Centralprojection eines Punktes der R_3; hiervon macht nur der Punkt Δ von C_3 eine Ausnahme, der auf der durch P_0 gehenden Secante σ der R_3 liegt; Δ ist die Projection zweier Punkte der R_3, nämlich der beiden Schnittpunkte von σ und R_3. Jede durch σ gehende Ebene trifft R_3 nur noch in einem Punkte, jede durch Δ gehende Gerade der Ebene T trifft daher C_3 nur noch in einem weiteren Punkte.

Wir schliessen hieraus, dass Δ ein Doppelpunkt der Curve C_3 ist, und bezeichnen dementsprechend σ als Doppelkante des Kegels III. O. Γ. Die ebene Centralprojection einer Raumcurve III. O. ist daher eine Curve III. O. mit Doppelpunkt.

Wird R_3 von σ in zwei realen Punkten getroffen, so ist Δ ein Doppelpunkt im eigentlichen Sinne des Wortes, d. i. ein Punkt, durch welchen die Curve zweimal hindurchgeht, der Knotenpunkt einer Curvenschleife. Sind hingegen die Schnittpunkte von σ und R_3 conjugirt complex, so liegen in der Umgebung von Δ keine realen Punkte der Curve C_3 und der Doppelpunkt Δ tritt daher als isolirter Punkt der Curve auf.

21. Jede auf C_3 bezügliche ebene Figur kann man von P_0 aus projiciren und erhält so eine auf R_3 bezügliche Figur; aus jedem auf C_3 bezüglichen Satze kann man so einen analogen Satz über R_3 ableiten.

22. In Bezug auf abwickelbare Flächen IV. Kl. I. Sp. und III. Kl. erhält man folgende Sätze, deren Beweise denen in den vorhergehenden Nummern leicht nachgebildet werden können.

Die Ebenen der den beiden Flächen II. O. $f = 0$ und $\varphi = 0$ (in Ebenencoordinaten) umschriebenen abwickelbaren Fläche werden von einer beliebigen, diese Fläche nicht berührenden Ebene T_0 in den Tangenten der Grenzfläche IV. Kl. geschnitten

$$\begin{vmatrix} f_0 & F & f & \\ & f_0 & F & f \\ \varphi_0 & \Phi & \varphi & \\ & \varphi_0 & \Phi & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

wobei $$\begin{aligned} F &= f_{10}'u_1 + f_{20}'u_2 + f_{30}'u_3 + f_{40}'u_4,\\ \Phi &= \varphi_{10}'u_1 + \varphi_{20}'u_2 + \varphi_{30}'u_3 + \varphi_{40}'u_4. \end{aligned}$$

Tangirt T_0 die abwickelbare Fläche, so ist die Grenzfläche von der III. Kl. und hat die Gleichung

$$F\varphi - \Phi f = 0 .$$

Eine abwickelbare Fläche III. Kl. wird von einer die Fläche nicht berührenden Ebene in einer Curve III. Kl. geschnitten; diese Curve hat eine Doppeltangente, d. i. eine Tangente, welche die Curve in zwei getrennten Punkten berührt, und durch deren Punkte (ausser der Doppeltangente selbst) nur eine Tangente der Curve geht.

Die Sätze über Curven III. Kl. mit einer Doppeltangente lassen sich daher auf die abwickelbaren Flächen III. Kl. übertragen*).

*) Ueber Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse vergl. u. A.: v. DRACH, Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte; SCHLOEMILCH, KAHL und CANTOR, Zeitschr. für Math. u. Phys. Jahrgang 12, Supplementbd. (1867).

Differentialrechnung,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Einleitung.

1. Wenn eine Grösse y von einer veränderlichen Grösse x abhängt, so dass verschiedene Werthe von x im Allgemeinen verschiedene Werthe von y verursachen, so bezeichnet man y als eine Function der Veränderlichen x. Da y sich mit x ändert, so ist auch y eine veränderliche Grösse; weil die Werthe von y von den Werthen der Grösse x abhängen, so bezeichnet man y als abhängige Veränderliche im Gegensatze zu der unabhängigen Veränderlichen x.

Wir beschränken uns bis auf Weiteres darauf, Functionen realer Variabeln zu betrachten.

Wenn man nur die Thatsache ausdrücken will, dass y eine Function von x ist, ohne die Art der Abhängigkeit anzugeben, so bedient man sich der Bezeichnung $y = f(x)$; verschiedene Functionen kann man durch Wahl eines andern Buchstabens oder durch Indices unterscheiden $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$

Um den Werth anzudeuten, den die Function $f(x)$ für bestimmte Werthe von x annimmt, setzt man diese Werthe hinter das Functionszeichen an die Stelle von x; demnach sind $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots f(\xi)$, $f(\xi)$, $f(a\xi + b)$ .. die Werthe, welche $f(x)$ annimmt, wenn man die Variable x durch die besonderen Werthe 0, 1, 2, ξ, 2ξ, $a\xi + b$ ersetzt.

2. Nimmt die Variable x um einen Betrag Δx*) zu, so wird y um einen positiven oder negativen Betrag zunehmen, den wir mit Δy bezeichnen wollen; dann hat man also

$$y = f(x) , \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x) .$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) .$$

Wenn Δx mehr und mehr abnimmt, und der Grenze Null sich nähert, so nähert sich im Allgemeinen auch Δy der Grenze Null. Soweit dies der Fall ist, soweit also einem unendlich kleinen Zuwachse Δx der Veränderlichen ein unendlich kleiner Zuwachs Δy der Function entspricht, heisst y eine stetige Function von x.

*) Δx ist hier ein einheitliches Zeichen; die Verwechselung mit dem Produkte aus x und einem Faktor Δ ist nicht zu befürchten, da von einem solchen Faktor nicht die Rede ist.

Ist z. B. $f(x) = x^2$, so ist $f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, und daher $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Für alle endlichen Werthe von x wird dieser Ausdruck verschwindend klein, sobald Δx verschwindet; daher ist x^2 (und allgemein jede Potenz von x mit positivem Exponenten, wie man mit Hülfe des binomischen Satzes leicht nachweist) für alle Werthe der Variabeln eine stetige Function.

Ist ferner $f(x) = \sin x$*), so ist

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x.$$

Daher ist

$$\Delta y = \sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x.$$

Wird Δx verschwindend klein, so verschwinden $\cos\Delta x - 1$ und $\sin\Delta x$, also auch Δy. Hieraus folgt, dass $\sin x$ für alle realen Werthe von x eine stetige Function von x ist.

Anders verhält sich die Function

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Man erhält $f(x + \Delta x) = 1 : (x + \Delta x - 2)$ und daher

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x-2} = -\frac{\Delta x}{(x + \Delta x - 2)(x-2)}.$$

Wenn Δx verschwindet, so geht der Nenner in den Werth $(x-2)^2$ über. So lange x von 2 verschieden ist, ist dieser Nenner von Null verschieden; da nun der Zähler Δx verschwindet, so verschwindet auch Δy. Für alle von 2 verschiedenen Werthe von x ist also die Function $1 : (x-2)$ stetig.

Für $x = 2$ werden aber, wenn Δx verschwindet, Zähler und Nenner von Δy zugleich Null; für einen Werth von x, der um einen verschwindenden Betrag kleiner als 2 ist, hat $1 : (x-2)$ einen verschwindend kleinen negativen Nenner, ist also von unendlich grossem negativen Werthe; setzt man hingegen für x eine Zahl, die um verschwindend wenig grösser ist, als 2, so ist der Nenner von $1 : (x-2)$ verschwindend klein und positiv, also hat $f(x)$ einen unendlich grossen positiven Werth. Die Function

$$y = \frac{1}{x-2}$$

erleidet daher an der Stelle $x = 2$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, indem für $x = 2$ die Function von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringt.

Die Function $y = \tan x$ wird an den Stellen $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$ unstetig, denn an diesen Stellen springt y von $+\infty$ auf $-\infty$.

Die Function $y = (-a)^x$, wobei unter a eine positive Zahl verstanden werden soll, hat für $x = 0$ den Werth $y = 1$ und für $x = 1$ den Werth $y = -a$.

Bezeichnet n eine Primzahl (die wir uns beliebig gross denken können), und giebt man der Variabeln x der Reihe nach die Werthe

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots \frac{n-1}{n},$$

so erhält y der Reihe nach die Werthe

*) Unter x soll hier nicht ein Winkel, sondern der Arcus eines Winkels verstanden werden, d. i. der Bogen, der vom Scheitel eines Winkels aus zwischen den Schenkeln beschrieben ist und die Längeneinheit zum Halbmesser hat; ist φ der Winkel, dessen Arcus die Grösse x hat, so ist $x = \pi \cdot \varphi : 180$, wobei φ in Graden auszudrücken ist. Dasselbe gilt für die übrigen goniometrischen Functionen.

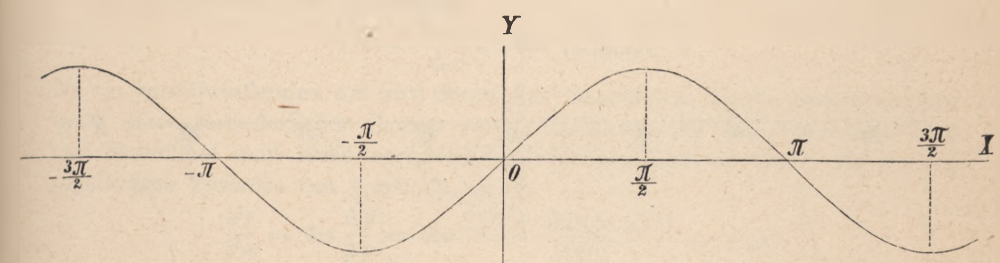
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{-a}, \quad f\left(\frac{2}{n}\right) = \sqrt[n]{(-a)^2}, \quad f\left(\frac{3}{n}\right) = \sqrt[n]{(-a)^3} \ldots$$

also, da der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist, abwechselnd positive und negative Werthe. Der Unterschied zweier auf einander folgenden Werthe von x ist $1 : n$ und kann auf jedes Maas der Kleinheit herabgedrückt werden, sobald nur n hinlänglich gross angenommen wird. Hieraus folgt, dass die Function innerhalb des Intervalls $x = 0$ bis $x = +1$ unendlich oft von einem endlichen positiven Werthe zu einem endlichen negativen Werthe überspringt; Gleiches ergiebt sich für alle realen Werthe der Veränderlichen.

Wir beschränken uns im Folgenden auf solche Functionen, die nicht für unendlich viele, innerhalb eines endlichen Intervalls liegende Werthe der Variabeln Unterbrechungen der Stetigkeit erleiden.

3. Nimmt man x als Abscisse und y als Ordinate eines Punktes P in Bezug auf ein ebenes rechtwinkeliges Coordinatensystem, und durchläuft x die realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt P eine bestimmte Curve, welche die Gleichung hat

$$y = f(x).$$

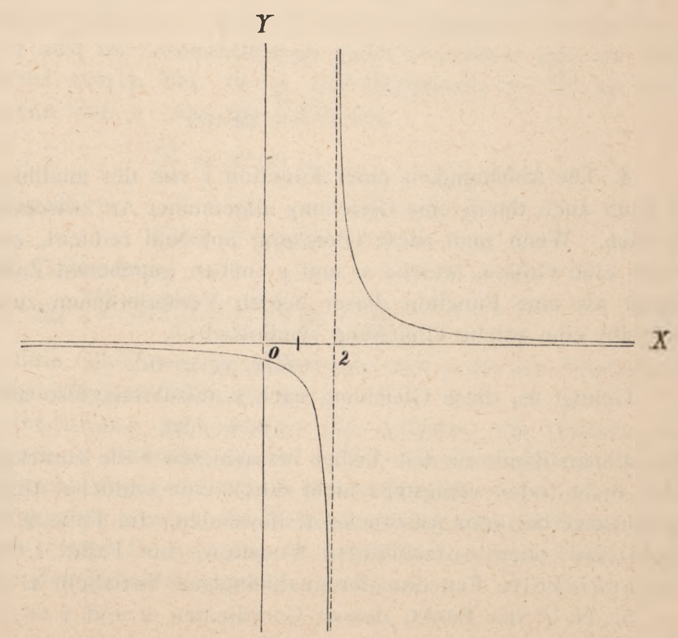


(M. 470.)

Wenn $f(x)$ eine stetige Function ist, so ist die zugehörige Curve durchaus zusammenhängend; so gehört z. B. die Gleichung $y = x^2$ einer Parabel an, deren Symmetrieachse die Y-Achse, deren Scheitel der Nullpunkt ist. Die Sinuscurve, d. i. die zu der Function $y = \sin x$ gehörige Curve ist in Fig. 470 dargestellt (zwischen den Abscissen $-\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$).

Die Curve (Fig. 471)

$$y = \frac{1}{x-2}$$



(M. 471.)

ist bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche eine Asymptote parallel zur Y-Achse im Abstande 2 von derselben hat; an dieser Stelle $x = 2$ ist der Lauf der Curve unterbrochen.

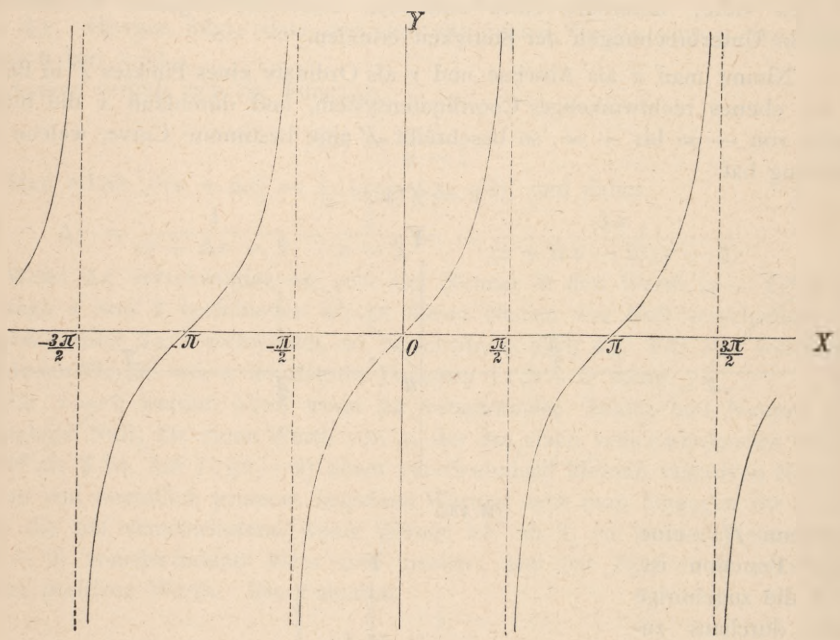
Die Curve (Fig. 472)

$$y = tang\, x$$

besteht aus unendlich vielen congruenten von einander getrennten Theilen, welche Parallelen zu der Y-Achse zu Asymptoten haben, von denen die Abscissenachse in den Punkten

$$\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$$

getroffen wird.



(M. 472.)

4. Die Abhängigkeit einer Function y von der unabhängigen Veränderlichen x kann auch durch eine Gleichung allgemeiner Art zwischen x und y ausgedrückt werden. Wenn man diese Gleichung auf Null reducirt, so steht auf der linken Seite eine Grösse, welche x und y (neben gegebenen Zahlen) enthält, und die daher als eine Function dieser beiden Veränderlichen zu bezeichnen ist; man schreibt eine solche Gleichung symbolisch

1. $$F(x, y) = 0.$$

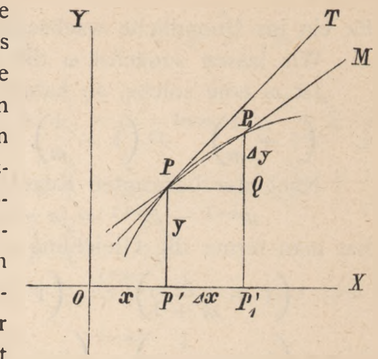
Gelingt es, diese Gleichung nach y aufzulösen, also aus ihr abzuleiten

2. $$y = f(x),$$

so ist man damit zu dem bisher betrachteten Falle zurückgekehrt. Gelingt dies aber nicht (oder wenigstens nicht durch eine endliche Anzahl von Operationen), so muss es bei dem Ausdrucke 1. bewenden. Im Falle 2. bezeichnet man y als explicite oder entwickelte Function, im Falle 1. als implicite oder unentwickelte Function der unabhängigen Variabeln x.

5. Ist P der Punkt, dessen Coordinaten x und $y = f(x)$ sind, und gehört P_1 zu den Coordinaten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tang\, QPP_1.$$



(M. 473.)

Nimmt Δx zur Grenze Null ab und ist die Function $f(x)$ in der Nachbarschaft des Punktes P stetig, so nähert sich auch Δy der Grenze Null, und die Gerade PM dreht sich um den Punkt P; der Quotient $\Delta y : \Delta x$ nähert sich im Allgemeinen dabei einem bestimmten Grenzwerthe, und dieser Grenzwerth ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Abscissenachse mit derjenigen durch P gezogenen Geraden einschliesst, welche P mit einem unendlich nahe benachbarten Punkte der zur Function $y = f(x)$ gehörigen Curve verbindet Diese Gerade wird, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, als die Tangente der Curve PP_1 im Punkte P bezeichnet; der Winkel der Abscissenachse mit der Tangente PT sei τ.

Der Grenzwerth des Quotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tang\, \tau$$

für ein verschwindendes Δx wird durch $f'(x)$ bezeichnet. Deutet man den Grenzwerth einer veränderlichen Grösse durch Vorsetzung der Buchstaben *lim**) an, und bezeichnet man einen verschwindend kleinen Zuwachs von x mit dx, den zugehörigen Zuwachs von y mit dy, so ist

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Während Δx und Δy die endlichen Differenzen der Coordinaten der Punkte P_1 und P sind, haben wir in dx und dy die verschwindend kleinen Differenzen der Coordinaten des dem Punkte P unendlich nahen Curvenpunktes und des Punktes P vor uns; im Zusammenhange damit bezeichnet man dx und dy als das Differential von x, bez. von y, und demgemäss $dy : dx$ als den Differentialquotienten von y. Aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

leitet man die Gleichung ab

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Nachdem man den Grenzwerth

$$lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

bestimmt hat, liefert diese Gleichung das Differential von y als ein Vielfaches des Differentials der unabhängigen Variabeln x.

Die Differentialrechnung hat zunächst die Aufgabe, die Differentialquotienten der Functionen zu ermitteln; hieran reihen sich dann weitere Untersuchungen, sowie analytische und geometrische Anwendungen.

6. Ehe wir dazu übergehen können, die Differentialquotienten der Functionen aufzusuchen, haben wir einige Grenzwerthe zu bestimmen, um dadurch eine Grundlage für die folgenden Untersuchungen zu gewinnen.

*) *limes*, die Grenze.

A Bestimmung des Grenzwerthes von

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

für ein ins Unendliche wachsendes ω.

Wir lassen zunächst ω die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchlaufen. Ist m eine solche, so haben wir

$$1.\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}-1\right)=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Nach der bekannten Regel

$$a^{m+1}-b^{m+1}=(a-b)(a^m+a^{m-1}b+\ldots+ab^{m-1}+b^m)$$

hat man ferner die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}\right.\\ 2.\quad &+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2}+\ldots\\ &\left.+\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}+\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right].\end{aligned}$$

Ersetzt man in dem Polynom die Brüche $1:(m+1)$ überall durch $1:m$, so wird der Klammerinhalt vergrössert; jedes Glied des Polynoms wird durch diese Substitution zu $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$; man hat daher, wenn man den Klammerinhalt vorübergehend mit A bezeichnet

$$A<(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m},$$

oder, wenn ρ eine positive Grösse bezeichnet

$$A=(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}-\rho.$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned}3.\quad \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}&=-\frac{1}{m(m+1)}\left[(m+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}-\rho\right]\\ &=-\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}+\frac{\rho}{m(m+1)}.\end{aligned}$$

Durch Addition von 1. und 3. ergiebt sich endlich

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\frac{\rho}{m(m+1)}.$$

Wenn daher ω die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so wächst der Ausdruck

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

unaufhörlich. Für $\omega=1000$ erhält man mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen $(1{,}001)^{1000}=2{,}7171$, also ist

$$lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}>2{,}7171.$$

Entwickelt man ferner $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}&=1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3}+\ldots\\ &=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots+\\ &\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).\end{aligned}$$

Ersetzt man jeden Klammerinhalt durch die Einheit, so wird der Ausdruck vergrössert und man erhält

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots m}&=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{7\ldots m}\right),\ \text{also}\\ &<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{m-6}}\right),\ \text{d. i.}\\ &<\frac{1}{720}\left(1-\frac{1}{7^{m-5}}\right):\left(1-\frac{1}{7}\right).\end{aligned}$$

Geht man hier zur Grenze für ein unendlich wachsendes m über und beachtet, dass

$$lim\left(1-\frac{1}{7^{m-5}}\right)=1,$$

so erhält man schliesslich

$$lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{720}\cdot\frac{7}{6},$$

d. i. $<2{,}7183$.

Wenn also ω die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, so nähert sich $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ einem Grenzwerthe, der zwischen $2{,}7171$ und $2{,}7183$ liegt. Dieser Grenzwerth wird mit e bezeichnet. Durch spätere Untersuchungen werden wir Mittel gewinnen, e bis zu jedem verlangten Genauigkeitsgrade mit leichter Mühe zu berechnen; wir werden dann finden, dass e bis auf 13 Zifferstellen genau den Werth hat

$$e=2{,}718281828459.$$

Ist m keine ganze Zahl, sondern zwischen den ganzen Zahlen p und $p+1$ gelegen, so dass

$$m=p+r,$$

wo r einen echten Bruch bezeichnet, so ist offenbar

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{m}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}>\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{m}.$$

Diese Ungleichung lässt die Schreibweise zu

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+r}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}>\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1-(1-r)},\quad\text{oder}$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{1+\frac{r}{p}}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}>\left[\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}\right]^{1-\frac{1-r}{p+1}}.$$

Wächst m unendlich, so wächst auch p unendlich und die Brüche $r:p$ und $(1-r):(p+1)$ convergiren gegen den Grenzwerth Null; die beiden äussersten Glieder convergiren daher gegen den Grenzwerth e, folglich auch das mittlere Glied.

Ist m eine negative Zahl, etwa $m=-n$, so hat man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

Geht nun m zur Grenze $-\infty$, so wird $n=+\infty$; da nun dabei $1:(n-1)$ zur Grenze Null übergeht, so sieht man, dass auch für einen negativ unendlichen Werth von ω, — d. i. für jeden unendlichen Werth von ω die Gleichung gilt

$$4.\quad lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=e.$$

Setzt man $\omega = \frac{1}{\delta}$, so ist δ eine zur Grenze Null abnehmende positive oder negative Grösse, und man hat daher für ein verschwindendes δ

5. $$\lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e.$$

B. Ist θ eine bis zur Grenze Null abnehmende Grösse, so hat auch die Differenz

$$\delta = a^\theta - 1$$

die Null zur Grenze. Geht man in 5. zu den Logarithmen (für eine beliebige Basis) über, so erhält man

6. $$\lim \frac{\log(1+\delta)}{\delta} = \log e.$$

Ersetzt man hier δ durch $a^\theta - 1$, so entsteht

$$\lim \frac{\log a^\theta}{a^\theta - 1} = \log e,$$

und hieraus ergiebt sich

7. $$\lim \frac{a^\theta - 1}{\theta} = \frac{\log a}{\log e} = \frac{1}{{}^a\log e}.$$

C. Ist a die Basis der Logarithmen, so hat man identisch

$$\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} \cdot = \frac{a^{\mu \cdot \log(1+\delta)} - 1}{\mu \log(1+\delta)} \cdot \frac{\log(1+\delta)}{\delta} \cdot \mu.$$

Geht δ zur Grenze Null, so convergirt auch $\log(1+\delta)$ gegen die Grenze Null; daher folgt aus 6. u. 7.

$$\lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \frac{1}{{}^a\log e} \cdot {}^a\log e \cdot \mu, \quad \text{mithin}$$

8. $$\lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu.$$

D. Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass für Bogen des ersten Quadranten

$$\sin\delta < \delta < \operatorname{tang}\delta.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{1}{\sin\delta} > \frac{1}{\delta} > \frac{\cos\delta}{\sin\delta}; \quad \text{daher ist}$$

$$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta.$$

Geht δ zur Grenze Null über, so wird $\cos\delta = 1$; hieraus folgt der Grenzwerth

$$\lim \frac{\sin\delta}{\delta} = 1.$$

§ 2. Differentiation einfacher Functionen.

1. Ist a eine constante, also von x unabhängige Grösse, so erfährt sie durch Aenderung des x keinen Zuwachs und man hat daher

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

wofür man auch schreibt

$$da = 0.$$

Der Differentialquotient einer Constanten ist Null.

2. Ist $y = a + x$, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a + x + \Delta x - (a+x)}{\Delta x} = 1.$$

Daher ist auch

$$\frac{d(a+x)}{dx} = 1, \quad d(a+x) = dx.$$

Für $y = a - x$ hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - x - \Delta x - (a+x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1; \quad \text{daher ist}$$

$$\frac{d(a-x)}{dx} = -1, \quad d(a-x) = -dx.$$

Ist ferner $y = ax$, so erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x - \Delta x) - ax}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{d(ax)}{dx} = a, \quad d(ax) = a\,dx.$$

Bei der Bildung des Differentialquotienten von $a + x$, $a - x$ und ax ist ein Grenzübergang nicht nöthig, denn in allen drei Fällen ist der Differenzquotient constant, und daher gleich dem Differentialquotienten. Anders in den folgenden Fällen.

3. Für die Function $y = \frac{1}{x}$ ergiebt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}\right) : \Delta x = -\frac{1}{(x+\Delta x)x}.$$

Geht man zur Grenze über, so entsteht hieraus

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}.$$

4. Der Differentialquotient einer Potenz ergiebt sich folgendermaassen

$$\frac{d(x^m)}{dx} = \lim \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = x^{m-1} \lim \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1\right] : \frac{\Delta x}{x}.$$

Da $\Delta x : x$ mit Δx verschwindet, so ist (§ 1, 6, C)

$$\lim \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1\right] : \frac{\Delta x}{x} = m,$$

und daher schliesslich

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}, \quad d(x^m) = mx^{m-1}dx.$$

Daher ist z. B.

$$d(x^2) = 2x\,dx, \quad d(x^3) = 3x^2 dx, \quad d(x^4) = 4x^3 dx, \ldots.$$

$$d\left(\frac{1}{x^2}\right) = d(x^{-2}) = -2x^{-3}dx, \quad d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx, \quad d\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^5}dx \ldots,$$

$$d\sqrt{x} = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

$$d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad d\frac{1}{\sqrt{x}} = d\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{dx}{2\sqrt{x^3}}.$$

5. Differentiation der Exponentialgrösse a^x.

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Nach § 1, No. 3, B. ist

$$\lim \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\log a}{\log e},$$

daher folgt

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^x .$$

Man hat die irrationale Zahl e als Basis eines Logarithmensystems gewählt und nennt diese Logarithmen die natürlichen Logarithmen; die Logarithmen im System mit der Grundzahl 10 heissen gegenüber den natürlichen die gemeinen Logarithmen; als Zeichen für den natürlichen Logarithmus gilt ein vor den Numerus gesetztes l, so dass also

$$la = {}^e\log a, \quad le = 1 .$$

Hiernach hat man einfacher

$$\frac{d(a^x)}{dx} = la \cdot a^x , \quad d(a^x) = la \cdot a^x\, dx .$$

Insbesondere ist

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x , \quad d(e^x) = e^x\, dx .$$

6. Differentiation des Logarithmus.

$$\frac{d \log x}{dx} = \lim \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim \frac{1}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$= \lim \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} .$$

Nach § 2, No. 3, B hat man

$$\lim \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \log e ,$$

und daher

$$\frac{d \log x}{dx} = \log e \cdot \frac{1}{x}, \quad d \log x = \log e \cdot \frac{dx}{x} .$$

Insbesondere folgt für den natürlichen Logarithmus

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dlx = \frac{dx}{x} .$$

7. Differentiation von $\sin x$.

$$\frac{d \sin x}{dx} = \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} .$$

Nach der bekannten goniometrischen Formel

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

hat man

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x) \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x) \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} .$$

Wenn Δx sich der Grenze Null nähert, so nähern sich $\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$ und $\sin \frac{1}{2}\Delta x : \frac{1}{2}\Delta x$ den Grenzen $\cos x$ und 1 (§ 1, No. 3, D) und es ist daher

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x , \quad d \sin x = \cos x \cdot dx .$$

8. Differentiation von $\cos x$.

$$\frac{d \cos x}{dx} = \lim \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} .$$

Nach der Formel

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

hat man

$$\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{2 \sin \frac{1}{2}(x + \Delta x) \cdot \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = -\frac{\sin(x + \frac{1}{2}\Delta x) \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} .$$

Geht Δx zur Grenze Null über, so erhält man hieraus

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x , \quad d \cos x = -\sin x\, dx .$$

9. Differentiation von $\tan g\, x$.

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \lim \frac{\operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x}{\Delta x} .$$

Man hat

$$\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} .$$

Hieraus folgt

$$\frac{\operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cos x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} .$$

Geht man zur Grenze über, so folgt

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x} .$$

10. Differentiation von $\cot x$. Wendet man die Formel (No. 3.)

$$d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{dz}{z^2}$$

auf den Fall $z = \operatorname{tang} x$ an, so erhält man zunächst

$$d\left(\frac{1}{\operatorname{tang} x}\right) = -\frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}^2 x}, \text{ also nach No. 9}$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} .$$

Ersetzt man nun links $1 : \operatorname{tang} x$ durch $\cot x$, so folgt

$$d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \quad \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} .$$

11. Differentiation von $\sec x$. Man erhält

$$d \sec x = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}; \quad \text{folglich ist}$$

$$d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx , \quad \frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} .$$

12. Differentiation von $\operatorname{cosec} x$. Hierfür ergiebt sich

$$d \operatorname{cosec} x = d\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{d \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}, \quad \text{also}$$

$$d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} .$$

13. Differentiation $\operatorname{Arc} \sin x$. Unter $\operatorname{Arc} \sin x$ versteht man den Bogen dessen Sinus die Grösse x hat. Da der Sinus eines Bogens nicht kleiner als -1 und nicht grösser als $+1$ sein kann, so folgt, dass die Function $\operatorname{Arc} \sin x$ nur eine Bedeutung hat, so lange x den Spielraum innehält*)

$$-1 \leqq x \leqq +1 .$$

Es giebt unzählige Bogen, die einen gegebenen Sinus haben; die Function

*) Später, bei der Einführung complexer Werthe der Functionen und complexer Variabeln wird die Definition von $\operatorname{Arc} \sin x$ so erweitert werden, dass die Function für alle Werthe von x eine Bedeutung hat.

Arc sin x ist also eine unendlich vieldeutige Function. Einer der Bogen, deren Sinus gleich x ist, liegt zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; diesen besonderen Bogen wollen wir mit *arc sin x* bezeichnen, so dass also

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq arc\,sin\,x \leqq +\tfrac{1}{2}\pi .$$

Die Function *arc sin x* ist eine eindeutige Function von x; aus ihr erhält man den innerhalb des zweiten oder dritten Quadranten enthaltenen Werth von *Arc sin x*

$$\pi - arc\,sin\,x ,$$

und aus *arc sin x* und $\pi - arc\,sin\,x$ alle möglichen realen Werthe von *Arc sin x* durch Addition und Subtraction einer ganzen Anzahl von Peripherien, so dass

$$Arc\,sin\,x = \begin{cases} \phantom{\pi -{}} arc\,sin\,x + 2k\pi , \\ \pi - arc\,sin\,x + 2k\pi , \end{cases}$$

wobei k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Aus der Formel (No. 7)

$$d\,sin\,\varphi = cos\,\varphi\,d\varphi$$

folgt

$$d\varphi = \frac{d\,sin\,\varphi}{cos\,\varphi} .$$

Setzt man hier $sin\,\varphi = x$, so ist $\varphi = Arc\,sin\,x$ und $cos\,\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi} = \sqrt{1 - x^2}$. Daher hat man

$$d\,Arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad \frac{d\,Arc\,sin\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

14. Differentiation von *Arc cos x*. Unter *Arc cos x* versteht man den Bogen, dessen Cosinus gleich x ist. Es giebt unendlich viele Bogen, die denselben Cosinus haben, daher ist *Arc cos x* eine unendlich vieldeutige Function. Für jeden Werth von x, der zwischen den Grenzen liegt

$$+1 \leqq x \leqq -1$$

giebt es einen Bogen innerhalb der ersten Halbperipherie, dessen Cosinus gleich x ist; diesen eindeutig bestimmten Bogen wollen wir mit *arc cos x* bezeichnen, so dass also

$$0 \leqq arc\,cos\,x \leqq \pi .$$

Der innerhalb 0 und $-\pi$ gelegene Werth von *Arc cos x* folgt hieraus zu

$$- arc\,cos\,x ,$$

denn entgegengesetzt gleiche Bogen haben denselben Cosinus. Aus diesen beiden, innerhalb einer Peripherie liegenden Werthen erhält man alle die unendlich vielen Werthe von *Arc cos x*

$$Arc\,cos\,x = \begin{cases} - arc\,cos\,x + 2k\pi , \\ arc\,cos\,x + 2k\pi . \end{cases}$$

Von der Formel (No. 8) ausgehend

$$d\,cos\,\varphi = - sin\,\varphi\,d\varphi ,$$

erhält man

$$d\varphi = - \frac{d\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi} .$$

Setzt man $cos\,\varphi = x$, so wird $\varphi = Arc\,cos\,x$, $sin\,\varphi = \sqrt{1 - x^2}$ und man hat daher

$$d\,Arc\,cos\,x = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad \frac{d\,Arc\,cos\,x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Die Grösse $\sqrt{1 - x^2}$ stellt in *Arc sin x* und *Arc cos x* den Cosinus, bez. den Sinus des differentiirten Bogens dar; hiernach ist das Vorzeichen der Wurzel in jedem Falle eindeutig bestimmt.

Hieraus folgt z. B., dass in den Fällen

$$d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad d\,arc\,cos\,x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

der positive Werth der Wurzel zu nehmen ist.

15. Differentiation von *Arc tang x*. Unter *Arc tang x* versteht man den Bogen, dessen Tangente gleich x ist. Für jeden realen Werth von x giebt es reale Werthe der Function *Arc tang x*, und zwar unendlich viele. Bezeichnet man mit *Arc tang x* den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Bogen, dessen Tangente gleich x ist, so dass also

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq arc\,tang\,x \leqq +\tfrac{1}{2}\pi ,$$

so findet man alle möglichen Werthe von *arc tang x* aus

$$Arc\,tang\,x = arc\,tang\,x + k\pi .$$

Aus $d\,tang\,\varphi = \dfrac{d\varphi}{cos^2\varphi}$ findet man

$$d\varphi = cos^2\varphi \cdot d\,tang\,\varphi .$$

Setzt man nun $tang\,\varphi = x$, so ist $x = Arc\,tang\,\varphi$ und $cos^2\varphi = 1 : (1 + tang^2\varphi) = 1 : (1 + x^2)$. Daher hat man

$$d\,Arc\,tang\,x = \frac{dx}{1 + x^2} , \quad \frac{d\,Arc\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} .$$

§ 3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Functionen.

1. Differentiation einer Summe und einer Differenz. Sind u und v zwei Functionen von x, so ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = lim \frac{u + \Delta u \pm (v + \Delta v) - (u \pm v)}{\Delta x} = lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) .$$

Daher ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} , \quad \text{oder} \quad d(u \pm v) = du \pm dv .$$

2. Differentiation eines Polynoms. Ist

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots + a_n u_n ,$$

und bedeuten $a_1, a_2 \ldots a_n$ constante Coefficienten, hingegen $u_1, u_2 \ldots u_n$ Functionen von x, so ist

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{a_1(u_1 + \Delta u_1) + \ldots + a_n(u_n + \Delta u_n) - (a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n)}{\Delta x}$$

$$= lim \left(a_1 \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + a_2 \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \ldots + a_n \frac{\Delta u_n}{\Delta x} \right) .$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \frac{du_1}{dx} + a_2 \frac{du_2}{dx} + a_3 \frac{du_3}{dx} + \ldots + a_n \frac{du_n}{dx} .$$

Oder

$$d(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \ldots + a_n u_n) = a_1 du_1 + a_2 du_2 + a_3 du_3 + \ldots + a_n du_n .$$

Hiernach ist z. B. (vergl. § 2, No. 4)

$$d(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1})dx ,$$

denn $d(1) = 0$, $dx = dx$, $dx^2 = 2x\,dx$, $dx^3 = 3x^2\,dx$ u. s. w.

3. Differentiation eines Produktes.

$$\frac{d(uv)}{dx} = \lim \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$= v\cdot\lim\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}.$$

Unter der Voraussetzung, dass Δu und Δv mit Δx zugleich verschwinden, und dass entweder $\Delta u : \Delta x$ oder $\Delta v : \Delta x$ einen endlichen Grenzwerth hat, ist

$$\lim\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v = \lim\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta u = 0,$$

als das Produkt einer endlichen und einer verschwindend kleinen Grösse. Hieraus folgt

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},\quad d(uv) = vdu + udv.$$

4. Um das Produkt $y = u_1u_2u_3u_4\dots u_n$ zu differentiiren, kann man zunächst zu den Logarithmen übergehen

$$ly = lu_1 + lu_2 + lu_3 + \dots + lu_n.$$

Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung durch wiederholte Anwendung der Formel $dlz = dz : z$, so erhält man

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1}+\frac{du_2}{u_2}+\frac{du_3}{u_3}+\dots+\frac{du_n}{u_n}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $y = u_1u_2\dots u_n$, so ergiebt sich

$$d(u_1u_2u_3\dots u_n) = u_1u_2u_3\dots u_n\left(\frac{du_1}{u_1}+\frac{du_2}{u_2}+\frac{du_3}{u_3}+\dots+\frac{du_n}{u_n}\right),$$

oder

$$\frac{d(u_1u_2u_3\dots u_n)}{dx} = u_1u_2u_3\dots u_n\left(\frac{1}{u_1}\cdot\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx}+\frac{1}{u_3}\cdot\frac{du_3}{dx}+\dots+\frac{1}{u_n}\cdot\frac{du_n}{dx}\right).$$

5. In gleicher Weise findet man den Differentialquotienten des allgemeineren Produktes

$$y = u_1^\alpha\cdot u_2^\beta\cdot u_3^\gamma\dots u_n^\nu,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ constante Exponenten sind. Man hat zunächst

$$ly = \alpha lu_1 + \beta lu_2 + \gamma lu_3 \dots + \nu lu_n.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac1y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{\beta}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\dots+\frac{\nu}{u_n}\frac{du_n}{dx},$$

und schliesslich

$$\frac{dy}{dx} = u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma\dots u_n^\nu\left(\frac{\alpha}{u_1}\cdot\frac{du_1}{dx}+\frac{\beta}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx}+\dots+\frac{\nu}{u_n}\cdot\frac{du_n}{dx}\right).$$

6. Differentiation eines Quotienten. Um $y = u:v$ zu differentiiren, kann man sich der vorigen Formel bedienen, indem man $u_1 = u$, $\alpha = 1$, $u_2 = v$, $\beta = -1$ setzt. Doch erhält man ebenso rasch unmittelbar aus

$$ly = lu - lv$$

die Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}-\frac{dv}{v},\quad\text{also}$$

$$d\left(\frac uv\right) = \frac uv\left(\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$\frac{d\left(\frac uv\right)}{dx} = \frac1{v^2}\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right).$$

Hiernach ergiebt sich z. B.

$$d\,tang\,x = d\left(\frac{sin\,x}{cos\,x}\right) = \frac{cos\,x\,dsin\,x - sin\,x\,dcos\,x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos\,x\cdot cos\,x\,dx - sin\,x\cdot(-sin\,x)\,dx}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}dx,$$

in Uebereinstimmung mit § 2, 9.

Als zweites Beispiel wählen wir

$$d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{(1-x)\,d(1-x^n) - (1-x^n)\,d(1-x)}{(1-x)^2}.$$

Da nun $d(1-x^n) = -dx^n = -nx^{n-1}dx$, und $d(1-x) = -dx$, so ist

1. $$d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{-(1-x)\cdot nx^{n-1}+(1-x^n)}{(1-x)^2}dx = \frac{-nx^{n-1}+nx^n+1-x^n}{(1-x)^2}dx$$

$$= \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}dx.$$

Da nun aber bekanntlich

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n,$$

so ist auch

2. $$d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = 1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}.$$

Vergleicht man 1. und 2., so findet man die Summenformel

$$1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2};$$

dieses Resultat kann man leicht durch Ausrechnung des rechts stehenden Quotienten prüfen.

7. Differentiation der Function einer Function. Ist u eine Function von x, und y eine Function von u, so dass man hat

$$y = F(u),\quad u = f(x),$$

so ist $y = F[f(x)]$ und daher

$$\frac{dy}{dx} = \lim\frac{F[f(x+\Delta x)] - F[f(x)]}{\Delta x}.$$

Nun ist aber $f(x+\Delta x) = u+\Delta u$, daher

$$\frac{dy}{dx} = \lim\frac{F(u+\Delta u)-F(u)}{\Delta x}.$$

Hierfür kann man setzen

$$\frac{dy}{dx} = \lim\frac{F(u+\Delta u)-F(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Dies ergiebt als Regel zur Differentiation einer Function von einer Function

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Zur Anwendung berechnen wir den Differentialquotienten von $arc\,cot\,x$. Der Arcus, dessen Cotangente gleich x, hat eine Tangente vom Betrage $1:x$, also hat man

$$arc\,cot\,x = arc\,tang\,\frac1x.$$

Setzt man nun $1:x = u$, so kann man die vorige Formel verwenden, indem man $F(u)$ durch $arc\,tang\,u$ ersetzt; man erhält zunächst

$$\frac{d\,arc\,cot\,x}{dx} = \frac{d\,arc\,tang\,u}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{d\,arc\,tang\,u}{du} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \frac{du}{dx} = d\frac{1}{x} : dx = -\frac{1}{x^2};$$

daher hat man schliesslich

$$\frac{d\,arc\,cot\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arc\,cot\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Sowie Cotangente und Tangente, so sind auch Secante und Cosinus, Cosecante und Sinus desselben Bogens reciprok; daher hat man

$$arc\,sec\,x = arc\,cos\,\frac{1}{x}, \quad arc\,cosc\,x = arc\,sin\,\frac{1}{x}.$$

Setzt man wieder $1 : x = u$, so ist

$$\frac{d\,arc\,sec\,x}{dx} = \frac{d\,arc\,cos\,u}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{d\,arc\,cosc\,x}{dx} = \frac{d\,arc\,sin\,u}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Setzt man hier die Werthe ein

$$\frac{d\,arc\,cos\,u}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{d\,arc\,sin\,u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{d\,arc\,sec\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arc\,sec\,x = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d\,arc\,cosc\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arc\,cosc\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Das bisher Mitgetheilte wollen wir an einigen Beispielen einüben.

A. Um die Function $y = x^x$ zu differentiiren, nehmen wir die Logarithmen und erhalten

$$ly = xlx.$$

Die rechte Seite ist ein Produkt, und daher

$$dly = x\,dlx + lx\,dx, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{dy}{y} = x \cdot \frac{dx}{x} + lx \cdot dx = (1 + lx)\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

$$d(x^x) = x^x\,(1 + lx)\,dx.$$

B. Sind u und v Functionen von x, so bilde man, um u^v zu differentiiren

$$l(u^v) = v\,lu;$$

Daher hat man

$$d(u^v) = u^v\left(v \cdot \frac{du}{u} + lu \cdot dv\right).$$

C. Differential von $(a + bx^n)^p$.

Setzt man $a + bx^n = u$, so hat man zunächst

$$du^p = pu^{p-1}\,du.$$

Da nun $du = d(a + bx^n) = nbx^{n-1}\,dx$, so folgt schliesslich

$$d(a + bx^n)^p = pnb\,(a + bx^n)^{p-1}\,x^{n-1}\,dx.$$

D. Differential von $l(a + bx)$.

Setzt man $a + bx = u$, so hat man

$$dl(a + bx) = dlu = \frac{du}{u}.$$

Da nun $du = d(a + bx) = b\,dx$, so folgt

$$dl(a + bx) = \frac{b\,dx}{a + bx}.$$

E. Differential von $l\frac{1+x}{1-x}$. Man hat

$$dl\frac{1+x}{1-x} = dl(1+x) - dl(1-x) = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}, \quad \text{daher}$$

$$dl\frac{1+x}{1-x} = \frac{2dx}{1-x^2}.$$

F. Differential von $l(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$dl(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{d(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (dx + d\sqrt{1+x^2}).$$

Da nun $d\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, so ist

$$dx + d\sqrt{1+x^2} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$dl(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

G. Differential von $\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$.

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\right) = \frac{1}{a+bx^2}\left(\sqrt{a+bx^2} \cdot dx - x\,d\sqrt{a+bx^2}\right);$$

nun ist $d\sqrt{a+bx^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$; folglich ist

$$\sqrt{a+bx^2} \cdot dx - x\,d\sqrt{a+bx^2} = \left(\sqrt{a+bx^2} - \frac{bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}\right)dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Also folgt

$$d\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

H. Differential von $xlx - x$.

$$d(xlx - x) = x\,dlx + lx \cdot dx - dx$$

$$= x \cdot \frac{dx}{x} + lx\,dx - dx; \quad \text{folglich ist}$$

$$d(xlx - x) = lx \cdot dx.$$

I. Differential von $l\,sin\,x$ und $l\,cos\,x$.

$$dl\,sin\,x = \frac{d\,sin\,x}{sin\,x} = \frac{cos\,x}{sin\,x}\,dx, \quad \text{d. i.}$$

$$dl\,sin\,x = cot\,x \cdot dx.$$

$$dl\,cos\,x = \frac{d\,cos\,x}{cos\,x} = -\,tang\,x\,dx.$$

K. Differential von $l\,tang\,x$.

$$dl\,tang\,x = \frac{d\,tang\,x}{tang\,x} = \frac{dx}{cos^2 x\,tang\,x} = \frac{dx}{sin\,x\,cos\,x}, \quad \text{also}$$

$$dl\,tang\,x = \frac{2\,dx}{sin\,2x}.$$

Setzt man $2x = u$, so ist $2dx = du$, und man erhält

$$dl\,tang\,\frac{u}{2} = \frac{du}{sin\,u}.$$

L. Differential von $l\,cot\,x$.

Da $l\,cot\,x = l(1 : tang\,x) = -\,l\,tang\,x$, so ist auch

$$d\,l\,cot\,x = -\frac{2\,dx}{sin 2x}.$$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - 2x = u$, so ist $du = -2dx$, $sin 2x = cos u$, und $x = \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}$; daher erhält man

$$d\,l\,cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = \frac{du}{cos\,u}.$$

Da $cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = tang\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, so kann man hierfür auch schreiben

$$d\,l\,tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = \frac{du}{cos\,u}.$$

---

9. Differentialquotient unentwickelter Functionen.

Wird die Abhängigkeit der Grösse y von der unabhängigen Veränderlichen x durch eine Gleichung hergestellt

$$F(x, y) = 0,$$

und ist wieder $y + \Delta y$ der Werth der abhängigen Veränderlichen, welcher dem Werthe $x + \Delta x$ der unabhängigen entspricht, so ist auch

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Daher ist

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Diese Gleichung kann man durch folgende ersetzen

$$\frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

in welche der Quotient $\Delta y : \Delta x$ passend eingeführt ist. Geht man zur Grenze für verschwindende Werthe von Δx und Δy über, so erhält man zunächst

$$1.\quad \frac{dy}{dx} \cdot lim \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y)}{\Delta y} + lim \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Nach der ursprünglichen Definition des Differentialquotienten ist der erste Grenzwerth, wenn man zunächst nur Δy verschwinden lässt, der Differentialquotient der Function $F(x + \Delta x, y)$, wenn man in dieser Function bei dieser Differentiation nur y als Variable, x dagegen als Constante betrachtet. Um an diese Voraussetzung zu erinnern, wollen wir diesen Differentialquotienten durch den Buchstaben ∂ (statt d) auszeichnen, und haben daher

$$lim \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = lim \frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y}.$$

Lässt man nun auch Δx verschwinden, so erhält man

$$lim \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Der zweite Grenzwerth in 1. ist der Differentialquotient von $F(x, y)$, wenn man nur x als variabel betrachtet. Wir bezeichnen denselben mit

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

und erhalten daher schliesslich aus 1. die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung liefert den verlangten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} : \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Die Grössen

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

nennt man die partialen Differentialquotienten der Function $F(x, y)$ nach x bez. nach y.

A. Ist z. B. $F(x, y) = b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, so ist

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2b^2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm 2a^2y, \quad \text{und daher} \quad \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2x}{a^2y}.$$

B. Ist $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, so ist

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E,$$

folglich
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$$

C. Für $F(x, y) = y - x\,sin\,y = 0$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -sin\,y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - x\,cos\,y,$$

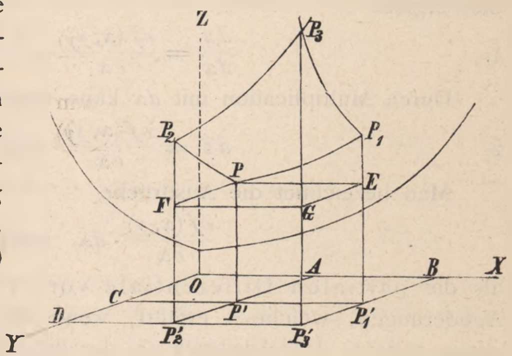
folglich
$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\,y}{1 - x\,cos\,y}.$$

D. Aus $F(x, y) = x^y - y^x$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x l y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^y l x - xy^{x-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^x l y - yx^{y-1}}{x^y l x - xy^{x-1}}.$$

§ 4. Differential einer Function mehrerer Variabeln.

1. Unter den Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln sind die Functionen zweier Variabeln am leichtesten zugänglich, weil sie am leichtesten anschaulich gemacht werden können. Sind x, y zwei unabhängige Variable, und ist z die abhängige, so dass $z = f(x, y)$, so lehrt die analytische Geometrie des Raumes die Variabeln x und y als Coordinaten eines Punktes P' der horizontalen Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems zu betrachten, und z als die parallel der Z-Achse gemessene Ordinate eines zum Grundriss P' gehörenden Raumpunktes P. Durchlaufen nun x und y alle möglichen realen Werthe, so beschreibt P' die ganze Horizontalebene, und P beschreibt eine durch die Gleichung $z = f(x, y)$ charakterisirte Fläche, durch welche die Function $f(x, y)$ geometrisch dargestellt wird.



(M. 474.)

Es sei P ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, und $OA = x$, $AP' = y$, $P'P = z$. Wächst x um $\Delta x = AB$, während y unverändert bleibt, so bewegt sich P' parallel der X-Achse bis zu P_1', und man hat

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{EP_1}{PE} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Der Grenzwerth dieses Differenzquotienten $\Delta z : \Delta x$, der unter der Voraussetzung gebildet wird, dass y dabei als constant gilt, ist der partiale Differentialquotient von z in Bezug auf x (oder kürzer »von z nach x«); er ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente der Curve PP_1 im Punkte P mit der X-Achse bildet.

Aendert sich y um $\Delta y = CD$, während x constant bleibt, so beschreibt P eine Bahn auf der Fläche, die mit der YZ-Ebene parallel ist, und man hat, wenn man die jetzt eintretende Aenderung von z mit $\Delta_1 z$ bezeichnet.

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta y} = \frac{FP_2}{PF} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Der Grenzwerth ist der partiale Differentialquotient von z in Bezug auf y; er ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente der Curve PP_2 in P mit der Y-Achse einschliesst.

Aendern sich beide Coordinaten x und y um Δx bez. Δy, so kommen P' und P nach P_3' und P_3. Nehmen nun Δx und Δy bis zur Grenze Null ab, so bewegt sich der zu $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ gehörige Punkt von P_3 nach P; der Weg, den er dabei auf der Fläche beschreibt, hängt davon ab, in welcher Weise Δx und Δy abnehmen, und ist unbestimmt, so lange über die Art der Abnahme von Δx und Δy nichts Näheres bekannt ist. Wenn z. B. zuerst Δy verschwindet, und dann Δx, so geht der Punkt von P_3 parallel zur YZ-Ebene nach P_1 und dann parallel der XZ-Ebene nach P; verschwindet zuerst Δx und dann Δy, so geht der Punkt von P_3 zunächst nach P_2 und dann nach P; nehmen Δx und Δy zugleich ab, so liegt der Weg des Punktes im Innern des Curvenvierecks $PP_1P_2P_3$.

Um einen Weg festzusetzen, auf welchem P_3 nach P gelangen soll, können wir den Weg vorschreiben, den die Horizontalprojection durchlaufen soll; dies geschieht, indem wir y als eine gegebene Function von x betrachten. Setzen wir $y = \varphi(x)$, so erscheint $z = f(x, y)$ als eine Function von x allein und es ist

$$\frac{dz}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Hierfür kann man wie in § 4, No. 9 setzen

$$\lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dies ergiebt

1. $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Durch Multiplication mit dx kann man dies ersetzen durch

2. $$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy.$$

Man bezeichnet die Ausdrücke

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

als die partialen Differentiale von z; es sind dies die unendlich kleinen Aenderungen, welche z erfährt, wenn nur x oder nur y sich um unendlich wenig ändern. Der Ausdruck dz, der die verschwindend kleine Aenderung von z angiebt, welche durch verschwindend kleine Aenderungen beider Variabeln erzeugt wird, heisst das totale Differential von z. Man erhält somit den Satz: Das totale Differential einer Function zweier Variabeln ist die Summe ihrer partialen Differentiale.

Der Sinn der Gleichung

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

ist folgender: Je näher die Veränderungen Δx und Δy der Grenze Null kommen,

um so genauer stimmt die zugehörige Veränderung von z mit dem Ausdrucke überein

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Die Grenzwerthe der Verhältnisse zusammengehöriger Veränderungen von x, y, z ergiebt die Proportion

$$dz : dx : dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) : dx : dy.$$

2. Ist y eine Function dreier unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, so kann man zunächst x_3 als Function von x_2 betrachten und nun nach dem Vorhergehenden das totale Differential von y finden. Richtet man dann die Formeln so ein, dass die Art des Zusammenhanges von x_2 und x_3 in denselben keinen Ausdruck findet, so gelten sie unabhängig von jeder Art dieses Zusammenhanges, gelten also ohne Rücksicht auf jede Abhängigkeit von x_1, x_2 und x_3 (was nichts anderes sagen will, als dass sie für jede mögliche Abhängigkeit Geltung haben).

Denken wir uns x_3 als Function von x_2, und demgemäss durch $\varphi(x_2)$ in f ersetzt, und bezeichnen das Resultat dieser Substitution mit (f), so ist

$$dy = \frac{\partial (f)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (f)}{\partial x_2} dx_2.$$

Auf den partialen Differentialquotienten von y nach x_1 hat es keinen Einfluss, ob man sich x_3 mit x_2 verbunden denkt oder nicht, da bei dieser Differentiation beide Grössen als Constante betrachtet werden; daher ist

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Für $\frac{\partial (f)}{\partial x_2}$ ergiebt sich durch Anwendung der Formel (No. 1, 1)

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_2}.$$

Setzt man diesen Werth in 1. ein und beseitigt den Divisor dx_2, so erhält man

1. $$df(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3.$$

Nimmt man an, die Formel

$$df(x_1, \ldots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

sei für eine bestimmte Zahl n bewiesen, so gilt auch die Formel

2. $$df(x_1 \ldots x_n, x_{n+1}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Denkt man sich bei einer Function von $(n + 1)$ Variabeln zunächst noch x_{n+1} abhängig von x_n und ersetzt dementsprechend x_{n+1} in der Function f durch x_n, so erhalte man hierdurch die Function (f). Man hat dann

3. $$df = \frac{\partial (f)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial (f)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial (f)}{\partial x_n} dx_n.$$

Für die partialen Differentiationen nach x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{n-1}$ ist es gleichgültig, ob x_n und x_{n+1} abhängig von einander sind oder nicht; also kann man hier überall (f) durch f ersetzen. Für den letzten Differentialquotienten von (f) erhält man nach No. 1, 1

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dx_n}.$$

Setzt man dies in 3. ein, so erhält man

4. $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Gilt also die Formel für das totale Differential bei einer Function von n Variabeln, so gilt sie auch bei $n+1$ Variabeln. Da sie nun bei drei Variabeln gilt, so gilt sie allgemein.

3. Ist y eine Function mehrerer Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$,

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

und sind diese wieder Functionen einer unabhängigen Variabeln t,

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots$$

so hat man zunächst

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Nun ist weiter

$$dx_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} dt, \quad dx_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} dt, \quad dx_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} dt, \ldots.$$

Daher ist

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot dt + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d\varphi_n}{dt} dt.$$

Dividirt man durch dt und ersetzt $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ durch $x_1, \ldots x_n$, so erhält man den gesuchten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}.$$

4. Wenn n Variable $x_1, x_2, \ldots . x_n$ so von einander abhängig sind, dass eine gegebene Function derselben verschwindet

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

so müssen auch die endlichen oder verschwindend kleinen Veränderungen der Variabeln so beschaffen sein, dass die durch dieselben erzeugte Veränderung der Function f verschwindet. Für verschwindend kleine Aenderungen der Variabeln ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Wenn von n Variabeln $(n-1)$ von einander unabhängige Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots f_{n-1} = 0,$$

so kann man $(n-1)$ dieser Variabeln als Functionen der $n$ten, oder alle n Variable als Functionen einer neu eingeführten Variabeln betrachten.

Die verschwindend kleinen Aenderungen der Variabeln, die mit den Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots$ sich vertragen, erfüllen die $(n-1)$ Gleichungen

1. $$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} dx_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} dx_2 + \ldots . + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} dx_n &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik},$$

ergänzen das System von Elementen

2. $$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \ldots . . f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \ldots . . f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \ldots . . f_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & f_{n-1,3} & \ldots . f_{n-1,n} \end{matrix}$$

durch Hinzufügung einer Zeile ganz willkürlicher Elemente $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ zu einem Systeme von n^2 Elementen, und bilden die Determinante S dieser Elemente, sowie die Coefficienten $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$, welche die Elemente $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ in dieser Determinante haben; R_k ist die Determinante, deren Elemente aus 2. hervorgehen, wenn man die $k$te Colonne weglässt und die bleibenden geeignet ordnet. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich für die Differentialverhältnisse die Proportion

3. $$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots . : dx_n = R_1 : R_2 : R_3 : \ldots : R_n.$$

Setzt man für $dx_1, dx_2, dx_3 \ldots dx_n$ die proportionalen Werthe $R_1, R_2 \ldots R_n$ in die $i$te Gleichung des Systems 1. ein, so erhält man

$$f_{i1}R_1 + f_{i2}R_2 + f_{i3}R_3 + \ldots + f_{in}R_n.$$

Dieser Ausdruck geht aus der Determinante S hervor, wenn man darin die Elemente $w_1, w_2, \ldots w_n$ der Reihe nach durch $f_{i1}, f_{i2}, \ldots f_{in}$ ersetzt, ist also eine Determinante, deren letzte Zeile mit der $i$ten identisch ist, und es ist daher

$$f_{i1}R_1 + f_{i2}R_2 + f_{i3}R_3 + \ldots + f_{in}R_n = 0.$$

Die der Proportion 3. genügenden $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ erfüllen also in der That die Gleichungen 1.

5. Wenn die n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den n unabhängigen Bedingungsgleichungen genügen

1. $$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \quad f_3 = c_3, \ldots f_n = c_n,$$

wobei die c_i gegebene Constante sind, so sind die x_i nicht mehr variabel, sondern diese n Gleichungen werden nur durch eine beschränkte Anzahl bestimmter Werthsysteme von $x_1, \ldots x_n$, den Wurzeln des Systems 1., erfüllt. Da mit den Gleichungen 1. eine Variabilität der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht mehr verträglich ist, so sind die Gleichungen

1. $$\begin{aligned} f_{11}\, dx_1 + f_{12}\, dx_2 + \ldots + f_{1n}\, dx_n &= 0, \\ f_{21}\, dx_1 + f_{22}\, dx_2 + \ldots + f_{2n}\, dx_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}\, dx_1 + f_{n2}\, dx_2 + \ldots + f_{nn}\, dx_n &= 0 \end{aligned}$$

nur durch die Werthe $dx_1 = dx_2 = dx_3 = \ldots dx_n = 0$ zu befriedigen. Hieraus folgt, dass die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Diese Determinante, deren Zeilen von den partialen Differentialquotienten der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ gebildet werden, heisst die Functionaldeterminante der Functionen $f_1 \ldots f_n$. Wir haben daher den Satz: Wenn durch die Gleichungen $f_1 = c_1, f_2 = c_2, \ldots f_n = c_n$ die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bestimmt sind, so ist die Functionaldeterminante der Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ nicht identisch gleich Null.

Wenn die Functionaldeterminante J identisch (d. h. unabhängig von den Werthen der $x_1, x_2, \ldots x_n$) verschwindet, so sind die in Bezug auf die Unbestimmten $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ linearen Gleichungen 1. nicht unabhängig von einander; es ist entweder eine Gleichung eine Folge der übrigen, und dann kann man $(n-1)$ der Grössen $dx_1, dx_2, \ldots$ durch die $n$te ausdrücken, so dass alle n unbestimmt bleiben, aber ihre Verhältnisse bestimmt sind; oder zwei der Gleichungen 1. folgen aus den übrigen, und dann kann man $(n-2)$ der Grössen $dx_1 \ldots$ durch die übrigen beiden ausdrücken, u. s. w. In diesem Falle haben die Verhältnisse der die Gleichungen 1. befriedigenden Grössen bestimmte oder nicht völlig bestimmte Werthe; die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind alsdann trotz der n Gleichungen $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ noch variabel. Hieraus folgt weiter, dass in diesem Falle diese Gleichungen 1. die Grössen $x_1, \ldots x_n$ nicht völlig bestimmen, dass also zwischen den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ eine oder mehr als eine Gleichungen bestehen, welche die Grössen $x_1, \ldots x_n$ nicht explicite enthalten, die also von der Form sind

$$F(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n) = 0,$$

so dass in Folge dieser Gleichungen eine oder mehr als eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ einen constanten Werth für alle diejenigen Werthsysteme der $x_1, x_2, \ldots x_n$ erhält, welche den übrigen Functionen f_i constante Werthe ertheilen.

Wir erhalten somit: Die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass n Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ von n Variabeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ nicht unabhängig von einander sind, ist das identische Verschwinden ihrer Functionaldeterminante*)

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

6. Aus dem bisher Mitgetheilten ergiebt sich leicht, wie man das totale Differential einer unentwickelten Function mehrerer Variabeln zu bilden hat. Ist nämlich die Abhängigkeit der Grösse y von den unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n$ durch eine Gleichung gegeben

$$F(y, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0,$$

so folgt, wenn man der Reihe nach nur eine der Unabhängigen verändert, die andern aber unverändert lässt

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots dx_n$ und addirt, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n\right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Der Klammerinhalt ist das totale Differential der Function y; daher ist dasselbe aus der Gleichung bestimmt

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

*) Vergl. u. A. BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten. 4. Auflage. Leipzig 1875, § 12.

7. Wir erläutern den Inhalt dieses Abschnitts an einigen Beispielen.

A. Ist $z = \alpha x^2 + \beta y^2$, so ist die zu dieser Gleichung gehörige Fläche ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid, je nachdem α und β gleiche Zeichen haben oder nicht. Die partialen Differentialquotienten von z ergeben sich zu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\alpha x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\beta y,$$

also folgt das totale Differential

$$dz = 2\alpha x\, dx + 2\beta y\, dy.$$

B. Ist $z = f(x, y)$, und kommen x und y in f nur in der linearen Verbindung $\alpha x + \beta y + \gamma$ vor, so kann man, wenn man $\alpha x + \beta y + \gamma = u$ setzt, f zunächst als Function von u betrachten, und hat demnach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hieraus folgt weiter

$$dz = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy, \quad \text{und mithin}$$

$$dz = \frac{df}{du}\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right).$$

Der Klammerinhalt ist das totale Differential von u; daher folgt schliesslich

$$dz = \frac{df}{du} du.$$

In der That ist jede Veränderung von x und y nur eine Veränderung von u, und man hätte daher vorhersehen können, dass die dadurch bedingte Veränderung von z nach den Regeln für das Differential einer Function einer einzigen Variabeln (u) zu bilden ist. Ganz dasselbe gilt, wenn x und y in irgend einer andern, aber nur in einer Verbindung $\varphi(x, y)$ in der Function f auftreten.

C. Ist z als Function von x und y durch die Gleichung definirt

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$$

so hat man, wenn man die linke Seite mit f abkürzend bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d[(x^2 + y^2 + z^2)^2]}{d(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)}{\partial x}$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x - 2a^2x = 2x[2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2].$$

In gleicher Weise ergeben sich

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y[2(x^2 + y^2 + z^2) - b^2], \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z[2(x^2 + y^2 + z^2) - c^2].$$

Daher hat man schliesslich zwischen den Differentialen dx, dy, dz die Gleichung

$$x(2r^2 - a^2)\, dx + y(2r^2 - b^2)\, dy + z(2r^2 - c^2)\, dz = 0,$$

wobei zur Abkürzung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt worden ist.

8. Ist f eine Funktion von x, y, z, und ersetzt man diese Variabeln durch

$$\begin{aligned} u &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ 1. \qquad v &= a'\,x + b'\,y + c'\,z, \\ w &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

so kann man das totale Differential von f durch u, v, w und du, dv, dw ausdrücken. Aus 1. folgt

$$\begin{aligned} du &= a\,dx + b\,dy + c\,dz, \\ 2. \qquad dv &= a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz, \\ dw &= a''dx + b''dy + c''dz; \end{aligned}$$

hieraus ergeben sich Auflösungen von der Form

$$dx = \alpha du + \alpha' dv + \alpha'' dw,$$
$$dy = \beta du + \beta' dv + \beta'' dw,$$
$$dz = \gamma du + \gamma' dv + \gamma'' dw.$$

Daher ist

3. $$df = \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}\right) du + \left(\alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z}\right) dv + \left(\alpha'' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z}\right) dw.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial w} = \alpha'' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die partialen Differentialquotienten werden auch ohne das totale Differential erhalten. Man hat z. B.

4. $$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{du},$$

wobei $dx : dy : dz : du$ durch Differentiation von 1. unter der Voraussetzung hervorgehen, dass dabei v und w unverändert bleiben; also hat man für $dx : dy : dz : du$ die Gleichungen

$$du = a\, dx + b\, dy + c\, dz,$$
$$0 = a'\, dx + b'\, dy + c'\, dz,$$
$$0 = a''dx + b''dy + c''dz,$$

aus denen man die Grössen $dx : du$, $dy : du$, $dz : du$ berechnen und in 4. einsetzen kann.

9. Die halben partialen Differentialquotienten einer homogenen quadratischen Function dreier Variabeln

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

sind die homogenen linearen Functionen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3,$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3.$$

Die Ausdrücke haben wir in der analytischen Geometrie der Ebene (§ 13, No. 1) die abgeleiteten Functionen der Function f genannt und mit f_1, f_2, f_3 bezeichnet. Die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \xi_3 = 0,$$

in welcher ξ_1, ξ_2, ξ_3 laufende Coordinaten sind, lernten wir als die Gleichung der Polaren des Punktes (x_1, x_2, x_3) in Bezug auf den Kegelschnitt $f = 0$ kennen.

Die Functionaldeterminante der drei homogenen quadratischen Functionen

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2,$$
$$\varphi \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{33}x_3^2,$$
$$\psi \equiv c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{33}x_3^2$$

ist

$$J \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, & b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3 \\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, & c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, & c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 \end{vmatrix}.$$

Sie ist eine Function dritten Grades in Bezug auf die veränderlichen x_1, x, x_3.

Wenn die drei Functionen f, φ, ψ nicht von einander abhängen, so verschwindet J nicht identisch, sondern nur für bestimmte Werthe von x_1, x_2, x_3, also für bestimmte Punkte der Ebene; der Ort dieser Punkte ist die durch die Gleichung $J = 0$ definirte Curve dritter Ordnung. Für jeden Punkt dieser Curve gehen die drei Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ durch einen Punkt, denn die Gleichungen dieser Polaren für den Punkt x_1, x_2, x_3 sind

$$f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0, \quad \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 = 0, \quad \psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \psi_3\xi_3 = 0;$$

das Verschwinden von J ist die Bedingung dafür, dass diese Geraden ein Büschel bilden; und umgekehrt, wenn die Polaren eines Punktes der Ebene in Bezug auf $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ein Büschel bilden, so verschwindet J für die Coordinaten dieses Punktes.

Wenn die Functionaldeterminante J identisch verschwindet, und nicht zwei von den drei Kegelschnitten identisch sind, so bilden die Polaren der drei Kegelschnitte für jeden Punkt der Ebene ein Büschel. Sind nun $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ reale oder complexe Werthe, welche den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ genügen, (die Coordinaten eines realen oder imaginären Schnittpunkts dieser beiden Kegelschnitte), und setzt man diese Werthe in $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ ein, so ist (Anal. Geom. d. Eb. § 13, No. 2, 5)

$$f_1\mathfrak{x}_1 + f_2\mathfrak{x}_2 + f_3\mathfrak{x}_3 \equiv \tfrac{1}{2} f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0,$$
$$\varphi_1\mathfrak{x}_1 + \varphi_2\mathfrak{x}_2 + \varphi_3\mathfrak{x}_3 \equiv \tfrac{1}{2} \varphi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0.$$

Folglich geht auch die Polare von $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ in Bezug auf $\psi = 0$ durch $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, so ist also auch

$$\psi_1\mathfrak{x}_1 + \psi_2\mathfrak{x}_2 + \psi_3\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Da nun

$$\psi_1\mathfrak{x}_1 + \psi_2\mathfrak{x}_2 + \psi_0\mathfrak{x}_0 \equiv \tfrac{1}{2} \psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3),$$

so folgt, dass $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ der Gleichung $\psi = 0$ genügen. Der Kegelschnitt $\psi = 0$ geht daher durch die vier realen oder imaginären Schnittpunkte der Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$; folglich (Anal. Geomet. d. Eb. § 14) bilden die drei Kegelschnitte ein Büschel, d. h. es giebt zwei von den Coordinaten unabhängige Zahlen λ und μ, durch welche die Identität hergestellt wird

$$\psi \equiv \lambda f + \mu\varphi,$$

in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze in No. 5.

10. Wie bei homogenen quadratischen Functionen dreier Variabeln, so sind auch bei vier Variabeln die in der analytischen Geometrie des Raumes mehrfach verwendeten abgeleiteten Functionen die halben partialen Differentialquotienten der Function nach den Coordinaten. Ist

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2,$$

so sind die abgeleiteten Functionen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{33}x_3 + a_{14}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$
$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addirt, so erhält man die Identität

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}x_4 = 2f.$$

Ebenso gilt für drei Variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 = 2f.$$

Diese beiden Formeln, von denen in der analytischen Geometrie mehrfach Gebrauch gemacht worden ist, können als besondere Fälle eines allgemeinen Satzes über homogene Functionen betrachtet werden.

Eine ganze algebraische Function n-ten Grades von p Variabeln ist eine Summe von Gliedern, deren jedes die Form hat

$$Ax_1{}^{\alpha}x_2{}^{\beta}x_3{}^{\gamma} \,.\,.\, x_l{}^{\lambda},$$

worin A ein constanter Faktor ist, und die Exponenten Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ... n bedeuten, doch so, dass die Summe derselben den Grad n der Function nicht übersteigt. Die Function ist homogen, wenn die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem Grade n der Function gleich ist, wenn also

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \,.\,.\, + \lambda = n.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$v = Ax_1{}^{\alpha}x_2{}^{\beta}x_3{}^{\gamma} \,.\,.\,.\, x_l{}^{\lambda},$$

so erhält man

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \alpha \cdot Ax_1{}^{\alpha-1}x_2{}^{\beta}x_3{}^{\gamma} \,.\,.\,.\, x_l{}^{\lambda}, \quad \text{und daher} \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}x_1 = \alpha v.$$

Ebenso ergeben sich

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}x_2 = \beta v, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}x_3 = \gamma v, \;.\,.\,.\,.\; \frac{\partial v}{\partial x_l}x_l = \lambda v.$$

Hieraus erhält man durch Addition

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3}x_3 + \,.\,.\,.\, + \frac{\partial v}{\partial x_l}x_l = (\alpha + \beta + \,.\,.\, + \lambda)v = nv.$$

Wendet man diese Formel auf eine homogene Function, d. i. auf eine Summe u von k solchen Gliedern v_1, v_2, v_3, ... v_k an

$$u = v_1 + v_2 + v_3 + \,.\,.\,.\, + v_k,$$

und beachtet, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \,.\,.\,.\, + \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2 + \,.\,.\, + \frac{\partial u}{\partial x_l}x_l = nv_1 + nv_2 + nv_3 + \,.\,.\, + nv_k$$
$$= n(v_1 + v_2 + v_3 + \,.\,.\,.\, + v_k).$$

Hieraus folgt EULER's Fundamentalsatz über homogene Functionen:

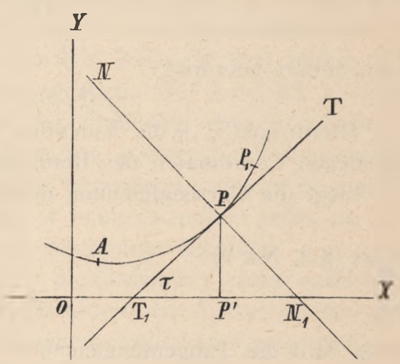
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}x_3 + \,.\,.\, + \frac{\partial u}{\partial x_l}x_l = nu^{*)}.$$

Die partialen Differentialquotienten von v sind vom Grade $n - 1$, folglich sind für eine homogene Function $n$ten Grades die partialen Differentialquotienten homogene Functionen vom $(n - 1)$ten Grade.

§ 5. Tangente, Normale und Tangentialpunkt ebener Curven.

1. Ist P ein Punkt einer Curve, welche die Gleichung hat

$$y = f(x)$$



(M. 475.)

und T die Tangente der Curve im Punkte P, so ergiebt sich der Winkel, den die Tangente und die X-Achse einschliessen, aus der in § 1, No. 5 gefundenen Gleichung

1. $$tang\,\tau = y',$$

wenn wir y' abkürzungsweise für den Differentialquotienten $dy : dx$ setzen. Aus 1. folgt weiter

2. $$cos\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad sin\,\tau = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Unter der Länge des Curvenbogens b, der sich von einem gegebenen Anfangspunkte A bis zu dem veränderlichen Punkte P erstreckt, versteht man den Grenzwerth, gegen welchen der Perimeter eines dem Curvenbogen AP eingeschriebenen Polygons convergirt, wenn die Seiten des Polygons verschwindend klein werden und ihre Anzahl daher ins Unendliche wächst. Bezeichnet man die Bogenlänge durch s, so ist, wenn P_1 die Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ hat

$$\frac{ds}{dx} = lim\,\frac{PP_1}{\Delta x} = lim\,\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = lim\,\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Hieraus folgt

3. $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Statt dieser Formel schreibt man auch

4. $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Aus 2. und 3. gewinnt man die einfacheren Formeln

5. $$cos\,\tau = \frac{dx}{ds}, \quad sin\,\tau = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds}.$$

So lange $dy : dx$ positiv ist, wächst y mit x zugleich; so lange $dy : dx$ negativ ist, nimmt y ab, wenn x wächst. In denjenigen Punkten, für welche $dy : dx$ den Werth Null hat (in denen also die Tangente parallel der Abscissenachse ist) und dabei vom Positiven ins Negative übergeht, geht daher y vom Wachsthum zur Abnahme über und erreicht somit ein Maximum, d. i. einen Werth, der grösser als die Nachbarwerthe ist; in den Punkten, für welche $dy : dx$ verschwindet, und dabei vom Negativen zum Positiven übergeht, hat y ein Minimum, d. i. einen Werth, der kleiner ist, als die Nachbarwerthe. Die Maxima und Minima einer Function einer Variabeln gehören also zu den Werthen der Variabeln, für welche y' verschwindet**).

*) Vergl. BALTZER, Determinanten, § 13.

**) Weiteres hierüber folgt in § 13.

2. Die Coordinaten ξ, η des Punktes Π der Tangente PT, der von P um ρ absteht, sind

$$\xi = x + \rho\cos\tau = x + \rho\cdot\frac{dx}{ds},$$

$$\eta = y + \rho\sin\tau = y + \rho\cdot\frac{dy}{ds}.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen ρ, so erhält man die Gleichung der Tangente

$$\frac{\xi - x}{\eta - y} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'},$$

oder, anders geordnet

1. $$y'(\xi - x) - (\eta - y) = 0.$$

Hierin sind ξ, η die laufenden Coordinaten der Tangente, während x, y die gegebenen Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Liegt die Curvengleichung in der Gestalt vor

$$f(x, y) = 0,$$

so ist (§ 3, No. 9)

$$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y};$$

daher wird die Tangentengleichung

2. $$T \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

Unter der Normalen der Curve im Punkte P versteht man die durch P gehende Normale zur Tangente im Punkte P. Da die Normale durch P geht, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) = 0;$$

und da sie mit T rechte Winkel bildet, so ist

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial f}{\partial x};$$

daher ist die Gleichung der Normalen

3. $$N \equiv \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\xi - x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Ist die Curvengleichung $y = f(x)$, so hat man einfacher nach Division durch $\partial f : \partial y$

4. $$N \equiv \xi - x + y'(\eta - y) = 0.$$

3. Die Strecken T_1P und PN_1, die zwischen den Spuren der Tangente und Normale auf der Abscissenachse und dem Punkte P enthalten sind, bezeichnet man insbesondere als Länge der Tangente und Normale, oder kurz als Tangente und Normale; die Projectionen dieser Strecken T_1P' und $P'N_1$ heissen Subtangente und Subnormale. Aus den Gleichungen 1. und 4. folgen die Strecken OT_1 und ON_1 als die Abscissen für die Ordinate $\eta = 0$ zu

$$OT_1 = \frac{xy' - y}{y'}, \quad ON_1 = x + y'y.$$

Hieraus ergeben sich

1. $$\textit{Subtangente} = OP' - OT_1 = \frac{y}{y'},$$

2. $$\textit{Subnormale} = ON_1 - OP' = yy'.$$

Ferner ergeben sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken $T_1P'P$ und $PP'N_1$ die Formeln

3. $$\textit{Tangente} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

4. $$\textit{Normale} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

4. Wenn die Curve sich ins Unendliche erstreckt, so kann man nach den Tangenten fragen, welche die Curve in einem unendlich fernen Punkte berühren. Eine solche Tangente nennt man Asymptote der Curve. Lässt man in der Tangentengleichung 1.

$$\eta = y'\cdot\xi + (y - y'x)$$

die Abscisse x des Berührungspunkts ins Unendliche wachsen, so nähert sich y' einem im Allgemeinen (eindeutig oder mehrdeutig) bestimmten endlichen oder unendlich grossen Werthe; durch denselben ist der Winkel τ und mithin die Richtung der Asymptote (bez. der Asymptoten) gegeben. Der Ausdruck $y - y'x$ ist die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet. Nähert sich diese Grösse bei unendlich wachsendem x einem endlichen realen Grenzwerthe, so ist hierdurch eine im Endlichen liegende Asymptote bestimmt; wird aber $y - y'x$ bei unendlich wachsendem x auch unendlich gross, so hat man eine unendlich ferne Asymptote, doch von bestimmter Richtung.

Nähert sich für ein unendlich wachsendes x die Ordinate y einem endlichen Grenzwerthe b, so ist die Gerade $y = b$ eine Asymptote der Curve; nähert sich für ein unendlich wachsendes y die Abscisse x einem endlichen Grenzwerthe a, so ist die Gerade $x = a$ eine Asymptote.

5. Wir wenden diese Entwicklungen zunächst auf die Kegelschnitte an. Nimmt man die Hauptachse zur Abscissenachse und einen Scheitel zum Nullpunkte, so ist, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung des Kegelschnitts

1. $$y^2 = 2px + qx^2.$$

Hierin ist p die Ordinate im Brennpunkte, und q ist $\varepsilon^2 - 1$, wenn ε die numerische Excentricität bezeichnet; für die Parabel ist $q = 0$. Durch Differentiation der Gleichung 1. erhält man sogleich die Subnormale

$$yy' = p + qx,$$

und hieraus weiter

$$y' = \frac{p + qx}{y}.$$

Die Gleichungen der Tangente und Normale sind daher

$$T \equiv (p + qx)(\xi - x) - y(\eta - y) = 0,$$

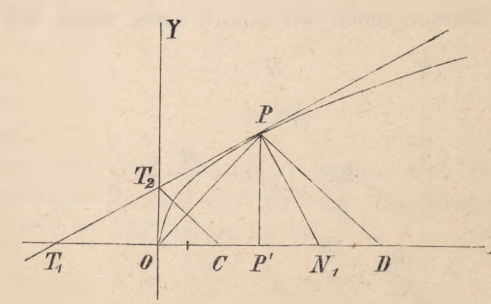
$$N \equiv y(\xi - x) + (p + qx)(\eta - y) = 0.$$

Die Tangentengleichung vereinfacht sich, wenn man berücksichtigt, dass zufolge der Gleichung des Kegelschnitts

$$-(p + qx)x + y^2 = px;$$

man erhält damit

$$T \equiv (p + qx)\xi - y\eta + px = 0.$$



(M. 476.)

Ist T_2 die Verticalspur der Tangente, so ist $OT_2 = px : y$. Macht man $OC = p$, so ist daher $OT_2 : OC = OP' : P'P$, mithin sind die Dreiecke T_2OC und $OP'P$ ähnlich, und folglich CT_2 normal zu OP. Hieraus ergiebt sich eine sehr einfache Tangentenconstruction. Man mache $OC = p$ und ziehe CT_2 normal zu OP, dann ist T_2P die Tangente in P.

Der oben gefundene Werth der Subnormale lässt sich auch schreiben

$$P'N_1 = \frac{y^2}{x} - p.$$

Macht man nun $N_1 D = p$, so ist

$$P'D = P'N_1 + N_1 D = \frac{y^2}{x},$$

$$OP' \cdot P'D = x \cdot \frac{y^2}{x} = P'P^2.$$

Daher ist PD normal zu OP. Macht man also PD normal zu OP und $N_1 D = p$, so ist PN_1 die Normale im Punkte P.

Für die Parabel ist $q = 0$ und daher einfacher $P'N_1 = p$. Die Subnormale der Parabel ist constant.

Um über die Asymptoten des Kegelschnitts Aufschluss zu erhalten, drücken wir y' und OT_2 durch x aus; wir erhalten:

$$y' = (p + qx) : \sqrt{2px + qx^2} = \left(\frac{p}{x} + q\right) : \sqrt{\frac{2p}{x} + q},$$

$$OT_2 = px : \sqrt{2px + qx^2} = p : \sqrt{\frac{2p}{x} + q}.$$

Geht man zur Grenze für ein unendlich wachsendes x über, so erhält man

$$\lim y' = q : \sqrt{q} = \sqrt{q}, \quad \lim OT_2 = p : \sqrt{q}.$$

In beiden Formeln hat $\sqrt{q}$ dasselbe Vorzeichen, da die Wurzeln in y' und OT_2 die Ordinate desselben Curvenpunktes sind; daher folgen zwei Asymptoten, deren Gleichungen sind

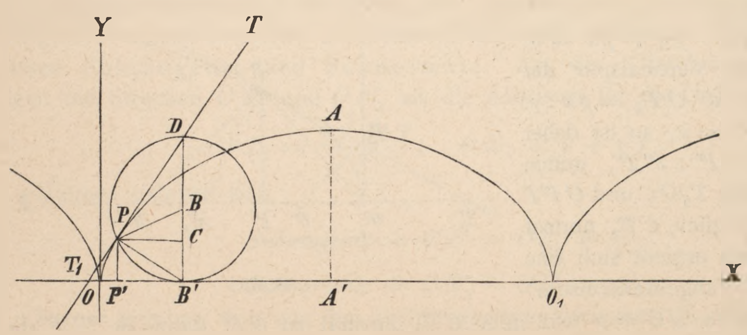
$$\eta = \sqrt{q} \cdot \xi + \frac{p}{\sqrt{q}}, \quad \eta = -\sqrt{q} \cdot \xi - \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Bei der Ellipse ist q negativ, und die Asymptoten sind conjugirt complex; bei der Hyperbel sind sie real; in beiden Fällen ist ihr Schnittpunkt das Centrum der Curve. Bei der Parabel sind sie unendlich fern und parallel der Symmetrieachse.

6. **Die gemeine Cycloide.** Als gemeine Cycloide bezeichnet man die Curve, welche von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, der auf einer Geraden rollt, ohne zu gleiten. Wir nehmen diese Gerade zur X-Achse. Rollt ein Kreis mit dem Radius a entlang derselben, so wird ein Punkt P dieses Kreises der Reihe nach mit unzählig vielen Punkten $O, O_1, O_2 \ldots$ der Abscissenachse zusammenfallen, und es ist

$$OO_1 = O_1 O_2 = O_2 O_3 = \ldots = 2a\pi.$$

Ferner sehen wir sofort, dass, wenn der Kreis auf der positiven Seite der X-Achse rollt, auch die Cycloide ganz auf der positiven Seite der X-Achse gelegen ist. Die grössten Ordinaten haben die Länge $2a$ und gehören zu den Punkten



(M. 477.)

der X-Achse, welche die Strecken OO_1, $O_1 O_2$, $O_2 O_3 \ldots$ halbiren; nehmen wir O zum Nullpunkte, so gehören sie zu den Abscissen $\ldots -3a\pi$, $-a\pi$, $+a\pi$, $+3a\pi \ldots$ oder allgemein zu $(2k+1)a\pi$, während für die Abscissen $2ka\pi$ die Ordinate verschwindet (wobei k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet).

Ist B die Lage des Centrums des rollenden Kreises in dem Augenblicke, in welchem der die Cycloide beschreibende Punkt P die in der Figur bezeichnete Stelle erreicht hat, so folgt aus der Definition, dass der Kreisbogen PB' gleich der Strecke OB' ist. Bezeichnet man mit t den Arcus des Winkels PBB' (des Wälzungswinkels), so ist $PB' = OB' = at$. Ferner ist $x = OP' = OB' - PB \sin t$, $y = P'P = B'B - BP \cos t$, und daher

1. $$x = at - a \sin t = a(t - \sin t),$$ $$y = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Hieraus ergeben sich die Differentiale

2. $$dx = a(1 - \cos t)\,dt = y\,dt,$$ $$dy = a \sin t\,dt = (at - x)\,dt.$$

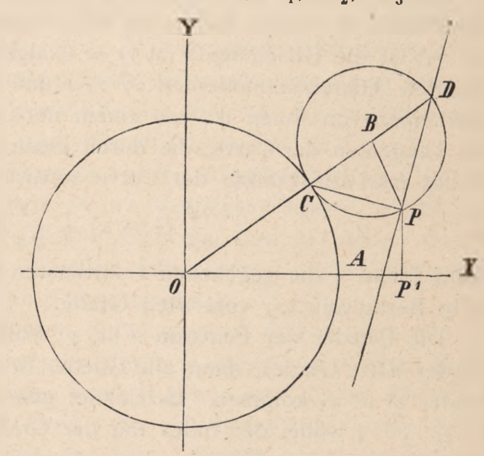
Aus 2. folgt der Differentialquotient

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{at - x}{y}.$$

Dies ergiebt *Subnormale* $= yy' = a \sin t = at - x = P'B'$.

Folglich ist PB' die Normale, und daher PD die Tangente der Cycloide im Punkte P.

7. **Die Epicycloide.** Die Epicycloide wird von einem Punkte P eines Kreises beschrieben, der auf der Peripherie eines festen Kreises rollt, ohne zu gleiten. Der Punkt P kommt dabei unzählige Male auf Punkte A, A_1, A_2, $A_3 \ldots$ des festen Kreises; die zwischen zwei auf einander folgenden dieser Punkte liegenden Bogen des festen Kreises sind dem Umfange des rollenden Kreises gleich. Wir nehmen das Centrum des festen Kreises zum Nullpunkte, und legen die Abscissenachse durch A. Ist B die Lage des Centrums des rollenden Kreises, wenn P die in der Figur bezeichnete Lage erreicht hat, sind b und a die Radien des festen und des rollenden Kreises, und ist $arc\,COA = \varphi$, so ist der Kreisbogen CA gleich $b\varphi$, und ebenso gross ist nach der Definition der Kreisbogen CP; daher ist $arc\,PBC = b\varphi : a$. Die Abscisse und Ordinate von P ergeben sich durch Projection von OBP auf OX, bez. OY. Da nun BP mit der Abscissenachse den Winkel $(PB, x) = PBC + COA - 180°$ bildet, so ist



(M. 478.)

$$arc\,(PB, x) = \frac{b}{a}\varphi + \varphi - \pi = \frac{a+b}{a} \cdot \varphi - \pi.$$

Daher findet man

$$x = OB \cdot \cos\varphi + BP \cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi - \pi\right),$$

$$y = OB \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + BP\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{a}\varphi + \pi\right).$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich

1. $$x = (a+b)\cos\varphi - a\cos\frac{a+b}{a}\varphi,\qquad y = (a+b)\sin\varphi - a\sin\frac{a+b}{a}\varphi.$$

Durch Differentiation erhält man

2. $$dx = (a+b)\left(-\sin\varphi + \sin\frac{a+b}{a}\varphi\right)d\varphi,\qquad dy = (a+b)\left(\cos\varphi - \cos\frac{a+b}{a}\varphi\right)d\varphi.$$

Hieraus folgt weiter

3. $$\frac{dy}{dx} = \left(\cos\varphi - \cos\frac{a+b}{a}\varphi\right) : \left(\sin\frac{a+b}{a}\varphi - \sin\varphi\right).$$

Wendet man die goniometrische Formel an

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

so erhält man

4. $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{b}{2a}\varphi\right).$$

Ist D der Gegenpunkt von C, so ist $arc\,PDB = \frac{1}{2}arc\,PBC = b\varphi : 2a$ und da $(PD, x) = PDB + COA$, so folgt

$$arc\,PD, x = \varphi + \frac{b}{2a}\varphi.$$

Vergleicht man dies mit 4., so ergiebt sich, dass PD die Tangente der Epicycloide in P und mithin PC die Normale ist.

8. Ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ algebraisch vom $n$ten Grade, so sind die partialen Differentialquotienten $\partial F : \partial x$ und $\partial F : \partial y$ beide vom $(n-1)$ten Grade, oder einer von ihnen ist von einem noch niedrigeren Grade. Fragt man nach den Tangenten der Curve, die durch einen gegebenen Punkt Π der Ebene gehen, so hat man die Punkte der Curve aufzusuchen, welche der Gleichung genügen

1. $$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

worin ξ und η die gegebenen Coordinaten des Punktes Π sind. Diese Gleichung ist in Bezug auf x, y vom $n$ten Grade.

Die Glieder der Function $F(x, y)$ wollen wir so gruppiren, dass zuerst alle Glieder $n$ten Grades, dann alle Glieder $(n-1)$ten Grades, dann alle $(n-2)$ten Grades u. s. w. kommen. Bezeichnet man die einzelnen Gruppen mit u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ..., wobei der Index mit der Gradzahl übereinstimmt, so hat man

$$F(x, y) = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots$$

Die Grössen u_n, u_{n-1}, u_{n-2} sind nach der Voraussetzung homogene Functionen der Coordinaten; daher ist (§ 4, No. 10)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}x + \frac{\partial u_k}{\partial y}y = ku_k \quad \text{und mithin}$$

2. $$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y = nu_n + (n-1)u_{n-1} + (n-2)n_{n-2} + \ldots.$$

Die Gleichung 1. kann man ersetzen durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta\right) = 0.$$

Hieraus erhält man in Rücksicht auf 2.

$$nu_n + (n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial y}\eta = 0,$$

und nach Division mit n

3. $$\Phi = u_n + \varphi = 0,$$

worin φ die Function $(n-1)$ten Grades bezeichnet

$$\varphi = \frac{1}{n}\left((n-1)u_{n-1} + (n-2)u_{n-2} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial y}\eta\right).$$

Wir wollen nun zeigen, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn die Gleichungen zweier algebraischen Curven in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen.

Ziehen wir durch den Nullpunkt Parallelen $y = tx$ zu den Asymptoten der Curve $F(x, y) = 0$, so treffen dieselben die Curve in einem unendlich fernen Punkte. Wir erhalten daher die zugehörigen Werthe des Richtungscoefficienten t, wenn wir y in der Gleichung der Curve durch tx ersetzen, dann diese Gleichung durch x^n dividiren und nachher zur Grenze für ein unendliches x übergehen. Durch die Substitution $y = tx$ erhält u_n in allen Gliedern den Faktor x^n, u_{n-1} den Faktor x^{n-1}, . . . ; es ergiebt sich somit

$$F(x, tx) = x^n(u_n) + x^{n-1}(u_{n-1}) + x^{n-2}(u_{n-2}) + \ldots,$$

worin (u_n), (u_{n-1}), (u_{n-2}) . . Functionen von t sind vom Grade n, $(n-1)$, $(n-2)$ . . . , welche aus u_n, u_{n-1} . . . hervorgehen, wenn man x durch 1 und y durch t ersetzt. Entfernt man x^n durch Division, so entsteht

$$(u_n) + \frac{1}{x}(u_{n-1}) + \frac{1}{x^2}(u_{n-2}) + \ldots = 0.$$

Wird x unendlich gross, so bleibt nur übrig

$$(u_n) = 0,$$

Diese Gleichung liefert n Werthe für t. Wir erhalten hieraus den Satz: *Eine algebraische Curve $n$ten Grades hat n (reale oder complexe) Asymptoten; die Tangenten der Winkel, welche sie mit der Abscissenachse einschliessen, sind die Wurzeln der Gleichung $(u_n) = 0$.*

Ferner folgt: *Wenn die Gleichungen zweier algebraischen Curven in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen, so haben sie parallele Asymptoten.* Oder: *Zwei Curven $n$ten Grades, deren Gleichungen in Bezug auf die Glieder höchsten Grades übereinstimmen, haben n unendlich ferne Schnittpunkte.*

Die n unendlich fernen Schnittpunkte der Curven F und Φ sind nun im Allgemeinen nicht Punkte, deren Tangenten durch Π gehen; es bleiben daher als solche Punkte auf F, deren Tangenten durch Π gehen, nur die im Endlichen liegenden Schnittpunkte von F und Φ übrig. Da nun zwei Curven $n$ten Grades n^2 Schnittpunkte haben, so erhalten wir den Satz: *Durch einen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen $n^2 - n = n(n-1)$ Tangenten einer Curve $n$ter Ordnung.* Diese Zahl kann sich, wie wir weiter sehen werden, bei besonderen Lagen des Punktes Π, sowie bei besonderer Beschaffenheit der Curve vermindern.

Bildet man die Differenz $F - \Phi$, so erhält man

$$F - \Phi = \frac{1}{n}\left(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta\right).$$

Die rechte Seite dieser Identität ist eine Function ψ vom $(n-1)$ten Grade. Alle (endlich fernen) Schnittpunkte von F und Φ annulliren auch ψ. Wir haben daher den Satz: Die Punkte einer Curve $n$ter Ordnung, deren Tangenten durch einen gegebenen Punkt gehen, liegen auf einer Curve $(n-1)$ter Ordnung.

Um die Normalen der Curve $F(x, y) = 0$ zu erhalten, die durch Π gehen, haben wir die Curvenpunkte aufzusuchen, die der Gleichung genügen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Diese Gleichung ist vom $n$ten Grade; sie lehrt: Es giebt n^2 Normalen einer Curve $n$ter Ordnung, die durch einen gegebenen Punkt Π gehen; ihre Fusspunkte auf der Curve liegen auf einer vom Punkte Π abhängigen Curve $n$ter Ordnung.

9. Die Coordinaten u, v der Curventangente im Punkte P folgen aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

zu

$$1. \qquad u = \frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right), \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right).$$

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten, d. i. die Bedingungsgleichung dafür, dass u und v Coordinaten einer Tangente der Curve $F = 0$ sind, ist das Resultat der Elimination von x und y aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right) = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right) = v, \quad F(x, y) = 0.$$

Ist $\varphi(u, v) = 0$ die Gleichung einer Curve $m$ter Klasse, also φ eine Function $m$ten Grades, so erhält man die Coordinaten der Tangenten von $\varphi = 0$, die durch den Punkt ξ, η gehen, als die Lösungen der beiden Gleichungen

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \xi u + \eta v - 1 = 0,$$

deren zweite die Gleichung des Punktes Π ist. Die eine dieser Gleichungen ist vom $m$ten Grade, die andere ist linear; daher folgt: Durch jeden Punkt der Ebene gehen m Tangenten einer Curve $m$ter Klasse. Da nun durch jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen $n(n-1)$ Tangenten einer Curve $n$ter Ordnung gehen, so folgt: Eine Curve $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der $n(n-1)$ Klasse. Nur für $n = 2$ ist $n(n-1) = n$; die Curven 3ter, 4ter, 5ter Ordnung sind im Allgemeinen 6ter, 12ter, 20ter Klasse u. w. s.

10. Die Curve, welche von den Normalen einer gegebenen Curve umhüllt wird, heisst die Evolute dieser Curve. Die Coordinaten der Normalen im Curvenpunkte P ergeben sich aus der Gleichung der Normalen zu

$$1. \qquad u = \frac{\partial F}{\partial y} : \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y\right), \quad v = -\frac{\partial F}{\partial x} : \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y\right).$$

Die Gleichung der Evolute in Liniencoordinaten ergiebt sich also, wenn man aus der Curvengleichung $F(x, y) = 0$ und aus den Gleichungen 1. die Coordinaten x, y eliminirt. Da durch jeden Punkt der Ebene n^2 Normalen einer algebraischen Curve $n$ter Ordnung gehen, so folgt: Die Evolute einer Curve $n$ter Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse n^2.

11. Als Beispiele wählen wir die Evolute der Ellipse und der gemeinen Cycloide.

Verlag der **Weidmannschen Buchhandlu**

Lehrbu

der

Differential- u. Integ

Von

Dr. J. Worpitzky,

Professor an der Königl. Kriegs-Akademie und am Friedrichs-Werderschen Gymnasium zu Berlin.

Mit 81 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

(XX und 784 Seiten.) Gross 8., geh. 24 Mark.

Im Verlage von **Eduard Trewendt** in **Breslau** erschien und ist durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Die Theorie

vom

Massendruck aus der Ferne

in ihren Umrissen dargestellt

von

Aurel Anderssohn,

Vorsitzender des Physikalischen Vereins in Breslau.

Lex. 8 Mit 8 lithographischen Tafeln. Preis: Geh. 3 Mark.

Soeben erschien im Verlage von **Eduard Trewendt** in **Breslau** und ist durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Das Erkenntnissproblem.

Mit Rücksicht auf die gegenwärtig herrschenden Schulen

von

Dr. O. Caspari,

Professor der Philosophie an der Universität zu Heidelberg.

Gr. 8. 4 Bogen. Preis geh. 1 Mk. 60 Pf.

Zu vorstehender Schrift gab das hundertjährige Bestehen der Kantschen »Kritik der reinen Vernunft« Veranlassung. Der berühmte Verfasser erörtert in seiner Abhandlung die Frage, welche Fortschritte die philosophische Wissenschaft auf der Grundlage der Kantschen Lehre während dieses Säculums gemacht hat.

Breslau. Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).