ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

ERSTE ABTHEILUNG, 19. LIEFERUNG

ENTHÄLT:

HANDBUCH DER MATHEMATIK

SIEBENTE LIEFERUNG.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

Inhalt der neunzehnten Lieferung:

Fortsetzung des Handbuchs der Mathematik. »Analytische Geometrie der Ebene« von Professor Dr. Heger. (Seite 129—194.)

Ferner: »Analytische Geometrie des Raumes« von Prof. Dr. Heger. (Seite 195—272.)

Entwickelt man die Determinante $\Delta = 0$, so erhält man

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0.$$

Multiplicirt man Δ mit a_{11} und zieht das Produkt von 10. ab, so erhält man

$$\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})} = a_{12}^2a_{13}^2 + a_{11}^2a_{23}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31}a_{11},$$
$$= (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2.$$

Also wird der Coefficient von x_2x_3:

$$\frac{1}{a_{11}}\left[2a_{12}a_{13} \mp 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\right].$$

Damit nun dieser Coefficient mit $2a_{23}$ übereinstimmt, muss das obere Zeichen der Klammer gewählt werden, d. i. man muss setzen

$$\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \cdot \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \text{ (und nicht } -a_{12}a_{13} + a_{11}a_{23}).$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ muss also mit dem Vorzeichen von $a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}$ übereinstimmen.

---

5. Wir führen nun die entsprechenden Untersuchungen für Liniencoordinaten durch.

Eine beliebige Gerade $\mathfrak{T}$ der Ebene durchschneiden wir mit einer andern Geraden T und bestimmen die Tangenten der Curve zweiter Klasse

$$\varphi = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

die durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{T}$ und T gehen.

Die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ seien $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$; die von T seien v_1, v_2, v_3; die Coordinaten von T' ergeben sich dann durch die Formeln (§ 12, No. 11)

$$u_\varkappa = \frac{\lambda_1\mathfrak{u}_\varkappa + \lambda_2 v_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Setzt man dies in φ ein und ordnet, so erhält man zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ die Gleichung

1. $$\varphi_\mathfrak{u}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Hierbei ist

2. $$\varphi_\mathfrak{u} = \alpha_{11}\mathfrak{u}_1^2 + 2\alpha_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 + 2\alpha_{13}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2^2 + 2\alpha_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3^2,$$
3. $$\varphi_v = \alpha_{11}v_1^2 + 2\alpha_{12}v_1v_2 + 2\alpha_{13}v_1v_3 + \alpha_{22}v_2^2 + 2\alpha_{23}v_2v_3 + \alpha_{33}v_3^2,$$
4. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} = \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{u}_3,$$
5. $$\varphi_{2\mathfrak{u}} = \alpha_{12}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_3,$$
6. $$\varphi_{3\mathfrak{u}} = \alpha_{13}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3.$$

Multiplicirt man 4., 5., 6. der Reihe nach mit v_1, v_2, v_3 und addirt, so erhält man die Identität

7. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = \varphi_{1v}\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2v}\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v}\mathfrak{u}_3, \text{ wobei}$$
8. $$\varphi_{1v} = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3,$$
9. $$\varphi_{2v} = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3,$$
10. $$\varphi_{3v} = \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \alpha_{33}v_3.$$

6. Berührt die Gerade $\mathfrak{T}$ die Curve φ, so ist $\varphi_\mathfrak{u} = 0$; die Gleichung No. 5, 1 geht daher über in

1. $$2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $\lambda_2 = 0$; die dazu gehörige Gerade T fällt mit $\mathfrak{T}$ zusammen. Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung 1. ergiebt sich aus der linearen Gleichung

2. $$2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1 + \varphi_v\lambda_2 = 0.$$

Soll auch diese Lösung mit $\mathfrak{T}$ zusammenfallen, so muss die Gerade T so gewählt werden, dass der Coefficient von λ_1 verschwindet, also so, dass

3. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes P; derselbe liegt auf $\mathfrak{T}$, denn es ist $\varphi_{1\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_3 = \varphi_{\mathfrak{u}}$, und dies verschwindet, da $\mathfrak{T}$ die Curve $\varphi = 0$ berührt. Mithin ist $\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = 0$ die Gleichung des auf der Curventangente $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ gelegenen Tangentialpunktes.

7. Der Punkt $\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3 = 0$ ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt; im Allgemeinen giebt es also auf jeder Curventangente $\mathfrak{T}$ nur einen Punkt, der so gelegen ist, dass ausser $\mathfrak{T}$ sich keine Curventangente durch ihn legen lässt. Der Tangentialpunkt wird nur für eine Curventangente unbestimmt, für deren Coordinaten die Coefficienten $\varphi_{1\mathfrak{u}}, \varphi_{2\mathfrak{u}}, \varphi_{3\mathfrak{u}}$ der Gleichung des Tangentialpunktes verschwinden; giebt es eine Gerade, für welche $\varphi_{1\mathfrak{u}}, \varphi_{2\mathfrak{u}}, \varphi_{3\mathfrak{u}}$ verschwinden, so ist dieselbe auch Curventangente, da dann auch $\varphi_{\mathfrak{u}} = \varphi_{1\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\mathfrak{u}_3$ verschwindet.

Soll es ein Werthsystem $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ geben, für welches

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} = \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{u}_3 = 0,$$
$$\varphi_{2\mathfrak{u}} = \alpha_{12}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_3 = 0,$$
$$\varphi_{3\mathfrak{u}} = \alpha_{13}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3 = 0,$$

so muss die Determinante D dieser Gleichungen verschwinden, es ist

1. $$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet

2. $$D = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{12}^2\alpha_{33} - \alpha_{13}^2\alpha_{22} - \alpha_{23}^2\alpha_{11} + 2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13} = 0.$$

Eine Gerade, die so gelegen ist, dass durch jeden ihrer Punkte zwei mit ihr zusammenfallende Tangenten einer Curve φ gehen, heisst Doppeltangente der Curve. Die Bedingung dafür, dass eine Curve zweiter Ordnung eine Doppeltangente hat, ist also $D = 0$. Die Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zweien der Gleichungen $\varphi_{1\mathfrak{u}} = \varphi_{2\mathfrak{u}} = \varphi_{3\mathfrak{u}} = 0$

und aus $$\frac{\rho_1\mathfrak{u}_1}{h_1} + \frac{\rho_2\mathfrak{u}_2}{h_2} + \frac{\rho_3\mathfrak{u}_3}{h_3} = 1.$$

Die Coordinaten der Doppeltangente werden unbestimmt, wenn sämmtliche Subdeterminanten von D verschwinden, d. i. wenn

1. $$\alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{12} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{13} : \alpha_{23} : \alpha_{33}.$$

Wie in No. 3 wird bewiesen, dass φ alsdann das Quadrat einer linearen Function ist. Die Curve besteht daher aus zwei zusammenfallenden Punkten.

Verschwindet D, ohne dass sämmtliche Subdeterminanten gleich Null werden, so ist die Doppeltangente $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt. Legt man durch den Schnittpunkt der Doppeltangente $\mathfrak{T}$ und einer andern Curventangente T eine Gerade T mit den Coordinaten

$$u_\varkappa = \frac{\lambda_1\mathfrak{u}_\varkappa + \lambda_2 v_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so ist auch T eine Tangente der Curve, denn in der Gleichung

$$\varphi_{\mathfrak{u}}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0$$

verschwinden $\varphi_{\mathfrak{u}}$, φ_v und der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$, weil $\mathfrak{T}$ und T die Curve φ berühren und $\mathfrak{T}$ Doppeltangente ist; also ist die Gleichung identisch.

Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{T}$ und T bildet daher einen Theil der Curve φ. Durch irgend einen Punkt der Geraden T geht ausser T noch eine Curventangente T'; es lässt sich nun für den Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$ von T' und $\mathfrak{T}$ ebenso, wie für den von T und $\mathfrak{T}$ beweisen, dass jede durch ihn gehende Gerade der Gleichung $\varphi = 0$ genügt, dass er also ebenfalls einen Theil der Curve $\varphi = 0$ bildet.

Andere Gerade, als die durch einen dieser beiden Punkte gehenden, können der Gleichung $\varphi = 0$ nicht genügen. Denn wäre dies mit der Geraden S der Fall, so würden durch jeden Punkt Q auf S drei Gerade gehen, die $\varphi = 0$ genügen, nämlich S und die beiden Geraden $Q\mathfrak{P}$ und $Q\mathfrak{P}'$, im Widerspruche damit, dass durch jeden Punkt der Ebene nur zwei Gerade gehen, für welche φ verschwindet. Hat daher eine Curve zweiter Ordnung eine Doppelgerade, so zerfällt sie in zwei Punkte; fallen diese beiden Punkte in einen Punkt Π zusammen, so ist jede durch Π gehende Gerade als Doppelgerade zu betrachten; sind sie getrennt, so ist die Doppelgerade die Gerade, auf der sie liegen.

8. Es erübrigt nun noch, im Falle $D = 0$ die beiden linearen Faktoren herzustellen, in welche die Function φ zerfällt.

Die beiden Faktoren seien $\varphi = (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3)(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3)$.

Multiplicirt man die beiden Trinome aus und vergleicht die einzelnen Glieder mit den Gliedern der Function φ, so erhält man durch ganz dieselben Schlüsse, wie in No. 4: Verschwindet die Determinante D, so zerfällt die quadratische Function φ in zwei lineare Faktoren:

$$\varphi = \left[\sqrt{\alpha_{11}}\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{12} + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}\right)\cdot u_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{13} + \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}\right)\cdot u_3\right]$$
$$\times \left[\sqrt{\alpha_{11}}\cdot u_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}}\right) u_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}\left(\alpha_{13} - \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}\right)\cdot u_3\right].$$

Hierbei hat $\sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}$ das Vorzeichen der Differenz $\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}$; die andern Wurzeln sind positiv.

---

9. A. Die Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{P}$ der Curve $f = 0$ ist

1. $$f_{1\mathfrak{x}}\cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}}\cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}}\cdot x_3 = 0.$$

Sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten der Tangente, so sind die Grössen $u_\varkappa : h_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3$, proportional den Grössen $f_{1\mathfrak{x}}, f_{2\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$. Es giebt also einen Faktor m, der den Gleichungen genügt:

2. $$a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3 - \frac{u_1}{h_1}\cdot m = 0,$$

3. $$a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3 - \frac{u_2}{h_2}\cdot m = 0,$$

4. $$a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 - \frac{u_3}{h_3}\cdot m = 0.$$

Da der Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Tangente liegt, so ist noch ausserdem

5. $$\frac{u_1}{h_1}\mathfrak{x}_1 + \frac{u_2}{h_2}\mathfrak{x}_2 + \frac{u_3}{h_3}\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Die Gleichungen 2. . . 5. sind homogen und linear für $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ und m; ihr Verein wird bedingt durch das Verschwinden ihrer Determinante

6. $$\varphi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 : h_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 : h_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 : h_3 \\ u_1 : h_1 & u_2 : h_2 & u_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn also die Coordinaten einer Geraden dieser Bedingungsgleichung genügen, so tangirt die Gerade die Curve $f = 0$. Folglich ist $\varphi = 0$ die Gleichung der Curve $f = 0$ in Liniencoordinaten.

B. Die Gleichung des Tangentialpunktes einer Tangente $\mathfrak{T}$ der Curve zweiter Ordnung $\varphi = 0$ ist (No. 6)

7. $$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des Tangentialpunktes, so sind die Quotienten $x_\varkappa : h_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, 3$ den Grössen $\varphi_{1\mathfrak{u}}$, $\varphi_{2\mathfrak{u}}$, $\varphi_{3\mathfrak{u}}$ proportional; für einen gewissen Faktor m bestehen also die drei Gleichungen

8. $$\alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{13}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_1}{h_1} \cdot m = 0,$$

9. $$\alpha_{12}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_2}{h_2} \cdot m = 0,$$

10. $$\alpha_{13}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{23}\mathfrak{u}_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3 - \frac{x_3}{h_3} \cdot m = 0.$$

Da der Punkt $x_\varkappa$ auf der Tangente $\mathfrak{u}_\varkappa$ liegt, so ist noch ausserdem

11. $$\frac{x_1}{h_1}\mathfrak{u}_1 + \frac{x_2}{h_2}\mathfrak{u}_2 + \frac{x_3}{h_3}\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Die Gleichungen 9. . . 10. sind homogen und linear für $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ und m; ihr Verein wird durch das Verschwinden ihrer Determinante bedingt:

12. $$f = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 : h_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 : h_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 : h_3 \\ x_1 : h_1 & x_2 : h_2 & x_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn also die Coordinaten eines Punktes P diese Gleichung erfüllen, so ist P der Tangentialpunkt einer Tangente der Curve $\varphi = 0$. Daher ist $f = 0$ die Gleichung der Curve $\varphi = 0$ in Punktcoordinaten.

10. A. Wir nehmen jetzt einen Punkt $\mathfrak{P}$ ausserhalb einer Curve $f = 0$ an und fragen nach den durch $\mathfrak{P}$ an die Curve gehenden Tangenten.

Liegt der Punkt Π auf einer der Tangenten, so fallen die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve in einen Punkt zusammen, die Gleichung No. 1, 4 hat also zwei gleiche Wurzeln für $\lambda_1 : \lambda_2$. Die Bedingung hierfür ist

$$f_\mathfrak{x} \cdot f_\xi - (f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)^2 = 0.$$

Ersetzen wir hier die Coordinaten $\xi_\varkappa$ durch $x_\varkappa$, so folgt: Die Gleichung

1. $$f_\mathfrak{x} \cdot f - (f_{1\mathfrak{x}} \cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot x_3)^2 = 0$$

ist die Gleichung der beiden durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten der Curve zweiter Ordnung $f = 0$.

Die linke Seite der Gleichung 1. zerfällt daher in zwei lineare Faktoren T und T_1; und $T = 0$, $T_1 = 0$ sind die Gleichungen der beiden Tangenten.

Ordnet man die Gleichung 1. und bezeichnet die Coefficienten der geordneten Gleichung mit $b_{\iota\varkappa}$, so hat man

$$b_{11} = a_{11}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}^2; \quad b_{22} = a_{22}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}^2; \quad b_{33} = a_{33}f_\mathfrak{x} - f_{3\mathfrak{x}}^2;$$
$$b_{12} = a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}; \quad b_{13} = a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}} \cdot f_{3\mathfrak{x}}; \quad b_{23} = a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}} \cdot f_{3\mathfrak{x}}.$$

Also ist die Determinante Δ' der Gleichung 1.:

2. $$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}^2, & a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}, & a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}, & a_{22}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}^2, & a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13}f_\mathfrak{x} - f_{1\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}}, & a_{23}f_\mathfrak{x} - f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}}, & a_{33}f_\mathfrak{x} - f_{3\mathfrak{x}}^2 \end{vmatrix}.$$

Dieselbe zerfällt in acht Determinanten; nach Absonderung gemeinsamer Faktoren aus Zeilen oder Colonnen erhält man zunächst

$$\Delta' = f_\mathfrak{x}^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - f_\mathfrak{x}^2 \cdot f_{1\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - f_\mathfrak{x}^2 \cdot f_{2\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- f_\mathfrak{x} \cdot f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{4\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix} + f_\mathfrak{x} \cdot f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + f_\mathfrak{x} \cdot f_{1\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix}$$
$$+ f_\mathfrak{x} \cdot f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \end{vmatrix} - f_{1\mathfrak{x}}^2 f_{2\mathfrak{x}}^2 f_{3\mathfrak{x}}^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die letzten vier Determinanten verschwinden, da jede identische Zeilen enthält. Setzt man in der zweiten Determinante die Werthe für $f_{1\mathfrak{x}}f_{2\mathfrak{x}}f_{3\mathfrak{x}}$ ein, so zerlegt sie sich in die Summe von drei Determinanten. Man erhält:

$$\begin{vmatrix} f_{1\mathfrak{x}} & f_{2\mathfrak{x}} & f_{3\mathfrak{x}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathfrak{x}_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathfrak{x}_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die letzten beiden Determinanten haben jede zwei identische Zeilen, verschwinden also, und es bleibt $\mathfrak{x}_1 \cdot \Delta$ als Werth der links stehenden Determinante. Auf gleiche Weise findet man für die dritte und vierte Determinante in der Entwicklung von Δ' die Werthe $\mathfrak{x}_2 \cdot \Delta$, $\mathfrak{x}_3 \cdot \Delta$. Das zweite, dritte und vierte Glied von Δ' vereinen sich daher zu

$$- \Delta \cdot f_\mathfrak{x}^2 (f_{1\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_1 + f_{2\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_2 + f_{3\mathfrak{x}}\mathfrak{x}_3) = - \Delta \cdot f_\mathfrak{x}^3.$$

Mithin ist $\Delta' = 0$, in Uebereinstimmung damit, dass die Gleichung 1. zwei Gerade repräsentirt.

B. Die Gleichung der Tangentialpunkte einer Curve zweiter Klasse $\varphi = 0$, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{T}$ liegen, erhält man durch die Bemerkung, dass eine Gerade T durch einen der Tangentialpunkte geht, wenn die durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{T}$ und T gehenden Tangenten der Curve zusammenfallen. Dann muss die Gleichung No. 5, 1:

$$\varphi_\mathfrak{u}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_2\lambda_2^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln für $\lambda_1 : \lambda_2$ ergeben. Die Bedingung hierfür ist

$$\varphi_\mathfrak{u} \cdot \varphi_v - (\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)^2 = 0.$$

Ersetzt man die Coordinaten $v_\varkappa$ durch $u_\varkappa$, so erhält man: Die Gleichung

1. $$\varphi_\mathfrak{u} \cdot \varphi_u - (\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3)^2 = 0$$

ist die Gleichung der beiden Tangentialpunkte der Curve $\varphi = 0$, die auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ liegen.

Entwickelt und ordnet man die Gleichung 1. und bezeichnet die Coefficienten mit $\beta_{\iota\varkappa}$, so dass die Gleichung ist

$$\beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2 = 0,$$

so beweist man wie im ähnlichen Falle 10 A, dass die Determinante verschwindet

$$D' = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

11. A. Wir verbinden einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene mit einem andern Punkte Π und fragen nach der Bedingungsgleichung, die zwischen den Coordinaten von $\mathfrak{P}$ und Π besteht, wenn die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve zweiter Ordnung $f = 0$ in zwei Punkten schneidet, die zu dem Punktpaar $\mathfrak{P}\Pi$ harmonisch liegen.

Zwei Punkte P' und P'' auf der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$, deren Coordinaten aus den Coordinaten von $\mathfrak{P}$ und Π nach den Formeln folgen:

$$x_\varkappa' = \frac{\lambda_1'\mathfrak{x}_\varkappa + \lambda_2'\xi_\varkappa}{\lambda_1' + \lambda_2'}, \quad x_\varkappa'' = \frac{\lambda_1''\mathfrak{x}_\varkappa + \lambda_2''\xi_\varkappa}{\lambda_1'' + \lambda_2''}; \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

sind bekanntlich harmonisch zu $\mathfrak{P}\Pi$, wenn die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2'$ und $\lambda_1'' : \lambda_2''$ entgegengesetzt gleich sind. Die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ für die Schnittpunkte der

Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve $f = 0$ folgen aus der Gleichung

$$f_{\mathfrak{x}}\lambda_1^2 + 2(f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3)\lambda_1\lambda_2 + f_{\xi}\lambda_2^2 = 0.$$

Soll diese Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln haben, so muss sie rein quadratisch sein, es muss also der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$ verschwinden.

Die Bedingung dafür, dass die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve zweiter Ordnung $f = 0$ harmonisch zu $\mathfrak{P}$ und Π sind, ist daher

1. $$f_{3\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_3 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 \equiv f_{1\xi}\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\mathfrak{x}_2 + f_{3\xi}\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Zwei so gelegene Punkte heissen conjugirt in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung.

B. Unter conjugirten Geraden einer Curve zweiten Grades versteht man zwei Gerade, die zu den durch ihren Schnittpunkt gehenden beiden Tangenten harmonisch sind.

Sind $\mathfrak{T}$ und T zwei Gerade, so sind die Coordinaten der durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten einer Curve zweiter Klasse

$$u_\varkappa = \frac{\lambda_1\mathfrak{u}_\varkappa + \lambda_2\mathfrak{v}_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

wenn sich λ_1 und λ_2 aus der Gleichung bestimmen

2. $$\varphi_{\mathfrak{u}}\lambda_1^2 + 2(\varphi_{1\mathfrak{u}}v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}v_3)\lambda_1\lambda_2 + \varphi_v\lambda_2^2 = 0.$$

Sind $\mathfrak{T}$ und T conjugirt, so liefern die beiden Wurzeln der Gleichung 2. harmonisch zu $\mathfrak{T}$ und T conjugirte Gerade, sind also entgegengesetzt gleich, also ist die Gleichung 2. rein quadratisch; mithin verschwindet der Coefficient von $\lambda_1\lambda_2$. Wir erhalten daher den Satz: Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade $\mathfrak{T}$ und T in Bezug auf eine Curve zweiten Grades $\varphi = 0$ conjugirt sind, ist

3. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}\cdot v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\cdot v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\cdot v_3 \equiv \varphi_{1v}\cdot\mathfrak{u}^1 + \varphi_{2v}\cdot\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v}\cdot\mathfrak{u}_3 = 0.$$

12. A. Die Punkte Π, die einem gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf eine Curve zweiten Grades conjugirt sind, genügen der Gleichung

1. $$f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 = 0,$$

wobei nun $f_{3\mathfrak{x}}, f_{1\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ gegebene Werthe haben. Diese Gleichung ist linear, also liegen diese Punkte auf einer Geraden. Diese Gerade heisst die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Die Polare eines Punktes wird nur dann unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die drei Grössen $f_{1\mathfrak{x}}, f_{2\mathfrak{x}}, f_{3\mathfrak{x}}$ zugleich verschwinden. Wir sehen daher: Bei jeder eigentlichen Curve zweiten Grades (Ellipse, Hyperbel, Parabel) ist die Polare jedes Punktes eindeutig bestimmt.

Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei getrennten Geraden, so ist die Polare des Schnittpunkts dieser Geraden unbestimmt; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so ist die Polare jedes Punktes der Geraden unbestimmt. In diesen beiden Fällen folgt aus der Identität

$$f_{1\mathfrak{x}}\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\xi_3 \equiv f_{1\xi}\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\mathfrak{x}_2 + f_{3\xi}\mathfrak{x}_3,$$

dass der Gleichung der Polaren jedes Punktes $\mathfrak{P}$ durch die Coordinaten des Doppelpunktes genügt wird, da für diesen Punkt die Functionen $f_{1\xi}, f_{2\xi}, f_{3\xi}$ verschwinden. Wir sehen also: Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei sich schneidenden Geraden, so geht die Polare jedes Punktes durch den Schnittpunkt der zwei Geraden; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so fällt die Polare jedes nicht auf der Geraden gelegenen Punktes mit den beiden Geraden zusammen.

Ferner ist aus der Gleichung der Polaren sofort ersichtlich: Liegt ein Punkt auf der Curve $f = 0$, so ist seine Polare die durch ihn gehende Curventangente.

Die Gleichung der durch $\mathfrak{P}$ gehenden (realen oder conjugirt complexen) Tangenten der Curve $f = 0$ ist bekanntlich

$$f_{\mathfrak{x}}\cdot f - (f_{1\mathfrak{x}}x_1 + f_{2\mathfrak{x}}x_2 + f_{3\mathfrak{x}}x_3)^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen diese Tangenten die Curve berühren, befriedigen die Gleichung $f = 0$; also ist für die Coordinaten dieser Punkte auch

$$f_{1\mathfrak{x}}\cdot x_1 + f_{3\mathfrak{x}}\cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}}\cdot x_3 = 0.$$

Wir haben daher: Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf eine Curve zweiten Grades geht durch die Berührungspunkte der von $\mathfrak{P}$ aus an die Curve gelegten Tangenten.

Aus dem Begriff der Polaren sowie aus der Identität:

$$f_{1\mathfrak{x}}\cdot\xi_1 + f_{2\mathfrak{x}}\cdot\xi_2 + f_{3\mathfrak{x}}\cdot\xi_3 \equiv f_{1\xi}\cdot\mathfrak{x}_1 + f_{2\xi}\cdot\mathfrak{x}_2 + f_{3\xi}\cdot\mathfrak{x}_3$$

folgt noch der Satz: Geht die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ durch den Punkt Π, so geht auch die Polare von Π durch $\mathfrak{P}$.

B. Die Geraden T, die einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf eine Curve zweiter Klasse conjugirt sind, genügen der Gleichung

2. $$\varphi_{1\mathfrak{u}}\cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\cdot u_3 = 0,$$

gehen also durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der Pol der Geraden in Bezug auf die Curve $\varphi = 0$.

Der Pol einer Geraden ist eindeutig bestimmt, ausser wenn die Gerade Doppelgerade ist; der Pol einer Doppelgeraden ist unbestimmt, jeder Punkt der Ebene kann dafür gelten. Besteht die Curve nur aus einem Punkte, so ist für jede durch den Punkt gehende Gerade der Pol unbestimmt.

Die Gleichung des Poles kann auch geschrieben werden

3. $$\varphi_{1u}\cdot\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2u}\cdot\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3u}\cdot\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Besteht nun die Curve $\varphi = 0$ aus zwei getrennten oder vereinten Punkten, so wird der Gleichung des Poles durch die Coordinaten einer Doppelgeraden genügt, denn für dieselben ist $\varphi_{1u} = \varphi_{2u} = \varphi_{3u} = 0$. Wir sehen daher: Besteht eine Curve zweiter Klasse aus zwei getrennten Punkten, so liegt der Pol jeder Geraden, die nicht durch einen der beiden Punkte geht, auf der Geraden der beiden Punkte; besteht die Curve aus zwei in P vereinten Punkten, so fällt der Pol jeder Geraden, die nicht durch den Punkt P geht, mit dem Punkte P zusammen.

Aus der Gleichung des Poles folgt: Der Pol einer Tangente einer Curve zweiter Klasse ist ihr Tangentialpunkt. Aus der Identität

$$\varphi_{1\mathfrak{u}}\cdot v_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\cdot v_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\cdot v_3 \equiv \varphi_{1v}\cdot\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2v}\cdot\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3v}\cdot\mathfrak{u}_3$$

folgt: Liegt der Pol der Geraden $\mathfrak{T}$ auf T, so liegt auch der Pol von T auf $\mathfrak{T}$. Die Gleichung der auf $\mathfrak{T}$ liegenden Tangentialpunkte ist

$$\varphi_{\mathfrak{u}}\cdot\varphi - (\varphi_{1\mathfrak{u}}\cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\cdot u_3)^2 = 0.$$

Die Geraden T, welche durch diese beiden Punkte gehen und die Curve $\varphi = 0$ berühren, genügen daher der Gleichung

$$\varphi_{1\mathfrak{u}}\cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}\cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}\cdot u_3 = 0,$$

gehen also durch den Pol der Geraden. Der Pol einer Geraden $\mathfrak{T}$ für eine Curve zweiten Grades ist daher der Schnittpunkt der Geraden, welche die Curve in den Schnittpunkten mit $\mathfrak{T}$ berühren.

Der Vergleich dieses Satzes mit dem analogen Satze in A. zeigt: Die Begriffe Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt gehören zusammen; oder: ist eine Gerade A die Polare eines Punktes B, so ist auch der Punkt B der Pol der Geraden A.

Dies kann auch algebraisch wie folgt bewiesen werden: Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ ist

$$f_{1\mathfrak{x}} \cdot x_1 + f_{2\mathfrak{x}} \cdot x_2 + f_{3\mathfrak{x}} \cdot x_3 = 0.$$

Sind $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ die Coordinaten der Polaren, so sind die Grössen $f_{1\mathfrak{x}}$, $f_{2\mathfrak{x}}$, $f_{3\mathfrak{x}}$ proportional zu $\mathfrak{u}_1 : h_1$, $\mathfrak{u}_2 : h_2$, $\mathfrak{u}_3 : h_3$, also hat man

$$4.\quad \begin{aligned} a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1}, \\ a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_2}{h_2}, \\ a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 &= m\frac{\mathfrak{u}_3}{h_3}. \end{aligned}$$

Aus diesem linearen Systeme folgten das Verhältniss der Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$, ausgedrückt durch die Coefficienten a_{ik} und die Coordinaten der Polaren zu:

$$5.\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten ist

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 : h_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 : h_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 : h_3 \\ u_1 : h_1 & u_2 : h_2 & u_3 : h_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man dies nach den Elementen der letzten Zeile, so entsteht:

$$6.\quad \varphi = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_1}{h_1} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_2}{h_2} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix} \cdot \frac{u_3}{h_3}.$$

Hieraus erhält man leicht

$$\varphi_{1u} = -\frac{1}{h_1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}, \quad \varphi_{2u} = -\frac{1}{h_2}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}, \quad \varphi_{3u} = -\frac{1}{h_3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{u_3}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit 5., so erhält man die Proportion:

$$7.\quad \frac{\mathfrak{x}_1}{h_1} : \frac{\mathfrak{x}_2}{h_2} : \frac{\mathfrak{x}_3}{h_3} = \varphi_{1\mathfrak{u}} : \varphi_{2\mathfrak{u}} : \varphi_{3\mathfrak{u}}.$$

Die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$ ist

$$\frac{\mathfrak{x}_1}{h_1} \cdot u_1 + \frac{\mathfrak{x}_2}{h_2} \cdot u_2 + \frac{\mathfrak{x}_3}{h_3} \cdot u_3 = 0,$$

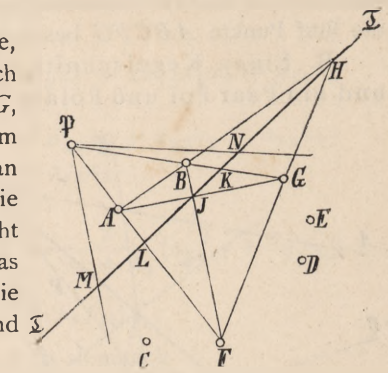
also in Rücksicht auf 7.:

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} \cdot u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 = 0.$$

Mithin ist in der That der Punkt $\mathfrak{P}$ der Pol seiner Polaren.

Wir schliessen hieran zunächst einige Constructionen.

13. A. Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ und die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten eines Kegelschnitts zu construiren, wenn fünf Punkte desselben gegeben sind.

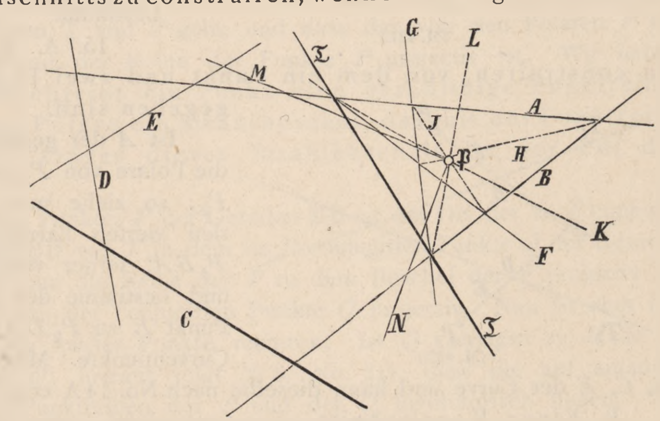


(M. 418.)

Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Punkte, so ziehe man $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ und bestimme nach dem Pascal'schen Satze die Punkte F und G, in welchen diese Gerade den Kegelschnitt zum zweiten Male treffen. Hierauf bestimme man den Schnitt H der Geraden AB und FG, sowie den Schnitt J der Geraden AG und BF. Zieht man nun HJ, so sind nach dem Satze über das vollständige Viereck die Punkte L und K die vierten harmonischen Punkte zu $AF\mathfrak{P}$ und $BG\mathfrak{P}$, also ist LK die gesuchte Polare.

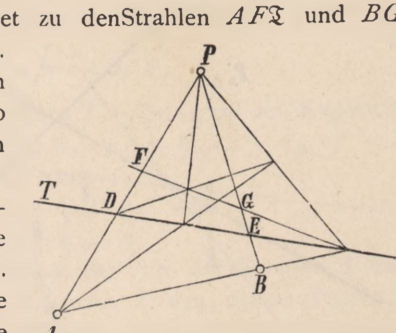
Construirt man nun die Punkte M und N, welche die Polare von $\mathfrak{P}$ mit dem Kegelschnitte gemein hat, so sind $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}N$ die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten des Kegelschnitts und M und N sind ihre Tangentialpunkte.

B. Den Pol einer Geraden $\mathfrak{T}$ und die auf $\mathfrak{T}$ liegenden Tangentialpunkte eines Kegelschnitts zu construiren, wenn fünf Tangenten desselben gegeben sind.



(M. 419.)

Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Tangenten, so construire man zunächst nach dem Brianchon-schen Satze die Tangenten F und G des Kegelschnitts, welche durch die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{T}$ mit zweien der gegebenen Geraden, z. B. mit A und B, gehen. Zieht man nun die Gerade H, welche den Schnitt von A und B mit dem von F und G verbindet, sowie die Gerade J, die durch die Schnittpunkte AG und BF geht, so sind nach dem Satze über das vollständige Vierseit die Geraden K und L harmonisch zugeordnet zu den Strahlen $AF\mathfrak{T}$ und $BG\mathfrak{T}$, also ist ihr Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der gesuchte Pol.



(M. 420.)

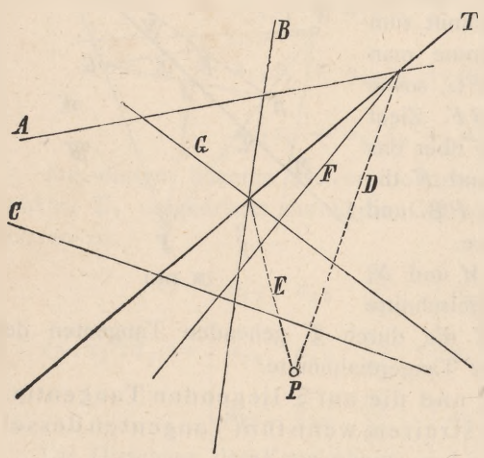
Construirt man die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tangenten des Kegelschnitts M und N, so treffen diese $\mathfrak{T}$ in den auf $\mathfrak{T}$ liegenden Punkten des Kegelschnitts.

14. A. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem drei Punkte, sowie ein Paar Pol und Polare gegeben sind.

Sind A, B, C die gegebenen Punkte und ist T die Polare von P, so verbinde man P mit zweien der gegebenen drei

Punkte, z. B. mit A und B, durchschneide damit T in D und E und construire die vierten harmonischen Punkte F und G zu den Punkten PDA und PEB; dann sind F und G Punkte des gesuchten Kegelschnitts und derselbe nun durch die fünf Punkte $ABCFG$ bestimmt.

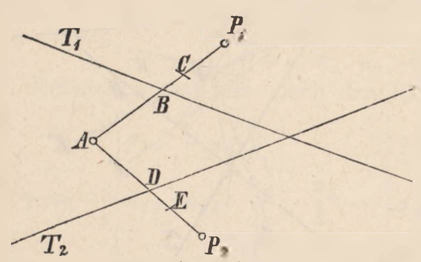
B. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem drei Tangenten und ein Paar Pol und Polare gegeben sind.



(M. 421.)

Sind A, B, C die gegebenen Tangenten und ist P der Pol der Geraden T, so verbinde man den Schnittpunkt von A und T mit dem Punkte P durch eine Gerade D und construire den vierten harmonischen Strahl F zu D, T und A; man verbinde ferner den Schnitt von B und T mit dem Punkte P durch eine Gerade E und construire den vierten harmonischen Strahl G zu E, T und B. Dann sind F und G Tangenten des Kegelschnitts und derselbe ist somit durch fünf Tangenten $ABCFG$ bestimmt.

15. A. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem ein Punkt und zwei Paare Pol und Polare gegeben sind.

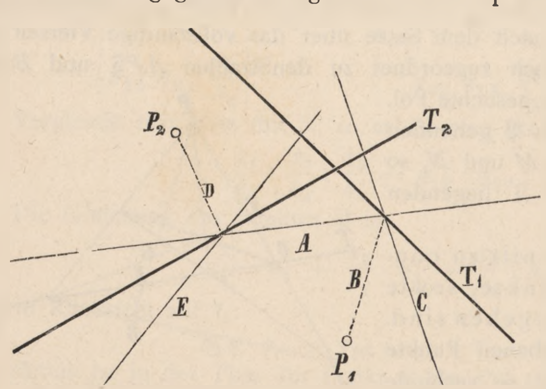


(M. 422.)

Ist A der gegebene Punkt, ferner T_1 die Polare von P_1 und T_2 die Polare von P_2, so ziehe man AP_1 und bestimme den vierten harmonischen Punkt C zu P_1BA; ferner verbinde man A mit P_2 und bestimme den vierten harmonischen Punkt E zu P_2DA; dann sind C und E Curvenpunkte. Man kennt nun drei Punkte A, C, E der Curve und kann dieselbe nach No. 14 A construiren.

B. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem eine Tangente und zwei Paare Pol und Polare gegeben sind.

Ist A die gegebene Tangente und ist P_1 der Pol von T_1 und P_2 der Pol von T_2, so verbinde man den Schnittpunkt von T_1 und A mit P_1 durch eine Gerade B und suche den vierten harmonischen Strahl C zu BT_1A; ferner verbinde man den Schnittpunkt von T_2 und A mit P_2 durch eine Gerade D und construire den vierten harmonischen Strahl E zu DT_2A. Dann sind C und E Tangenten der Curve. Man kennt somit drei Curventangenten A, C, E und kann dieselbe nach No. 14 B construiren. —



(M. 423.)

16. A. Ein Punkt P der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ hat die Coordinaten

1. $$x = \frac{\lambda_1 \mathfrak{x}_\varkappa + \lambda_2 \xi_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Die zu der quadratischen Function

2. $$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

gehörenden linearen Functionen

3. $$f_{1x} \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \quad f_{2x} \equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad f_{3x} \equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

werden daher für den Punkt P:

4. $$f_{1x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{1\xi}), \quad f_{2x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{2\xi})$$
$$f_{3x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{3\xi}).$$

Die Gleichung der Polaren des Punktes P ist demnach

$$T \equiv (\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{1\xi})\, x_1 + (\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{2\xi})\, x_2 + (\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}} + \lambda_2 f_{3\xi})\, x_3 = 0.$$

Setzt man $$\mathfrak{T} \equiv f_{1\mathfrak{x}} x_1 + f_{2\mathfrak{x}} x_2 + f_{3\mathfrak{x}} x_3, \quad T \equiv f_{1\xi} x_1 + f_{2\xi} x_2 + f_{3\xi} x_3,$$

so sind $\mathfrak{T} = 0$ und $T = 0$ die Gleichungen der Polaren der Punkte $\mathfrak{P}$ und Π, und man erhält $T \equiv \lambda_1 \mathfrak{T} + \lambda_2 T = 0$ für die Polare des Punktes von P. Hieraus folgt in Uebereinstimmung mit No. 12 A, dass die Polare von P durch den Schnittpunkt der Polaren $\mathfrak{T}$ und T geht, und dass das von den Polaren P gebildete Strahlbüschel mit der Reihe der Punkte P projectiv ist. Wir haben daher den Satz: Beschreibt ein Punkt eine geradlinige Punktreihe, so beschreibt seine Polare ein Strahlbüschel, das mit der Punktreihe projectiv ist; der Träger dieses Strahlbüschels ist der Pol der Punktreihe.

Die Polare T eines Punktes P der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ ist der Ort der zu P conjugirten Punkte; also wird $\mathfrak{P}\Pi$ von T in dem zu P conjugirten Punkte Q der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ geschnitten. Da nun die Reihe der P zu dem Büschel der T projectiv ist, so ist sie auch zur Reihe der conjugirten Punkte Q projectiv. Nun ist aber der Begriff der Conjugation zweier Punkte reciprok: Ist Q conjugirt zu P, so ist auch P conjugirt zu Q; hieraus folgt (§ 6, No. 21), dass die auf einander liegenden projectiven Punktreihen der P und der Q involutorisch liegen. Wir haben daher den Satz: Die Paare conjugirter Punkte, die auf einer Geraden liegen, bilden eine qnadratische Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Schnittpunkte der Geraden und der Curve.

B. Eine Gerade T, die durch den Schnitt zweier Geraden $\mathfrak{T}$ und T geht, hat die Coordinaten $u_\varkappa = \dfrac{\lambda_1 \mathfrak{u}_\varkappa + \lambda_2 v_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\varkappa = 1, 2, 3$.

Also ist die Gleichung des Poles der Geraden T in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\varphi \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

$$P \equiv \lambda_1 \mathfrak{P} + \lambda_2 \Pi = 0, \quad \text{wenn}$$
$$\mathfrak{P} \equiv \varphi_{1\mathfrak{u}}\, u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}} \cdot u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}} \cdot u_3 \quad \text{und}$$
$$\Pi \equiv \varphi_{1v}\, u_1 + \varphi_{2v} \cdot u_2 + \varphi_{3v} \cdot u_3,$$

wenn also $\mathfrak{P} = 0$ und $\Pi = 0$ die Gleichungen der Pole der Geraden $\mathfrak{T}$ und T sind. Hieraus folgt: Dreht sich eine Gerade T um einen Punkt, so beschreibt ihr Pol P eine Gerade, die Polare des Punktes; das Strahlbüschel der Geraden T ist mit der Punktreihe der Pole P projectiv.

Durch den Pol P einer Geraden T, die den Punkt $\mathfrak{T}T$ enthält, gehen bekanntlich alle zu T conjugirten Geraden. Die zu T conjugirte Gerade S, die durch den Schnittpunkt $\mathfrak{T}T$ geht, verbindet daher den Punkt $\mathfrak{T}T$ mit P. Da nun die P und die T projectiv sind, so sind auch die S und die T projectiv. Der Begriff der Conjugation zweier Geraden ist aber wie der Begriff der Conjugation zweier Punkte reciprok; im Büschel der T ist S der conjugirte Strahl zu T und T der conjugirte zu S; folglich sind die beiden auf einander liegenden Strahlbüschel der T und S involutorisch. Wir schliessen daher: Die Paare conjugirter Geraden einer Curve zweiter Ordnung, die durch einen Punkt gehen, bilden eine quadratische Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind Tangenten der Curve.

Zwei conjugirte Durchmesser α und β eines Kegelschnitts sind conjugirte Gerade, denn die Curvensehnen, die durch den unendlich fernen Punkt von β gehen, haben ihre Mitten auf α, werden also von α in dem Punkte getroffen, der harmonisch zu den auf jeder Sehne liegenden beiden Curvenpunkten und dem auf ihr liegenden unendlich fernen Punkte von β ist; also geht β durch den Pol von α, also sind α und β conjugirt. Hieraus folgt: Die Paare conjugirter Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung bilden eine quadratische Involution. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Asymptoten der Curve.

17. Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ ist unendlich fern, wenn die Coefficienten der Gleichung der Polaren $f_{1\mathfrak{x}}$, $f_{2\mathfrak{x}}$, $f_{3\mathfrak{x}}$ proportional den Coefficienten $1:h_1$, $1:h_2$, $1:h_3$ der Gleichung der unendlich fernen Geraden sind (§ 12 No. 10), also wenn für einen gewissen Werth m

1.
$$\begin{aligned} a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_1}, \\ a_{12}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_2}, \\ a_{13}\mathfrak{x}_1 + a_{23}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 &= m\cdot\frac{1}{h_3}. \end{aligned}$$

Für die Coordinaten des Punktes, dessen Polare unendlich fern ist, ergiebt sich hiernach die Proportion:

2.
$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{1}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{1}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{1}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}.$$

Ist $\varphi = 0$ die Gleichung derselben Curve zweiten Grades in Liniencoordinaten, so ist die Gleichung des Punktes $\mathfrak{P}$, d. i. die Gleichung des Poles der Geraden $\mathfrak{T}$, deren Coordinaten $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 = 1$ sind

3.
$$\varphi_{1u} + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} = 1.$$

Zu zwei Punkten einer Geraden und dem unendlich fernen Punkte derselben Geraden ist die Mitte der beiden Punkte der vierte harmonische Punkt; und zu zwei Tangenten einer Curve zweiter Klasse, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden, d. i. parallel sind, und der unendlich fernen Geraden ist die Mittellinie des von den beiden Tangenten begrenzten Streifens der vierte harmonische Strahl.

Die durch den Pol der unendlich fernen Geraden gehenden Curvensehnen

haben also denselben zur gemeinschaftlichen Mitte; und durch ihn gehen die Mittellinien der Streifen, die von je zwei parallelen Curvensehnen begrenzt werden.

Hierdurch ist der Pol der unendlich fernen Geraden als das Centrum der Curve charakterisirt. Die Gleichung des Centrums einer Curve zweiten Grades $\varphi = 0$ ist daher

$$\varphi_{1u} + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} = (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13})u_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{23})u_2 + (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33})u_3 = 0$$

und die Coordinaten des Centrums bestimmen sich durch die Coefficienten der Curvengleichung in Punktcoordinaten $f = 0$ aus

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \frac{1}{h_1} \\ a_{22} & a_{23} & \frac{1}{h_2} \\ a_{23} & a_{33} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \frac{1}{h_1} \\ a_{23} & a_{12} & \frac{1}{h_2} \\ a_{33} & a_{13} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & \frac{1}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{1}{h_3} \end{vmatrix}.$$

18. Das Centrum einer Curve zweiter Ordnung $\varphi = 0$ ist unendlich fern, wenn die Summe der Coefficienten in der Gleichung des Centrums verschwindet (§ 12 No. 10), also wenn

1.
$$\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} + \alpha_{22} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} = 0.$$

Diese Summe ist zugleich die Summe der Coefficienten der Curvengleichung $\varphi = 0$; ihr Verschwinden zeigt an, dass die Curvengleichung durch die Coordinaten der unendlich fernen Geraden, deren Coordinaten $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ sind, erfüllt wird. Hierdurch wird diese Curve als Parabel charakterisirt.

19. A. Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ kann bekanntlich geschrieben werden No. 11, 1

1.
$$f_{1x}\cdot\mathfrak{x}_1 + f_{2x}\cdot\mathfrak{x}_2 + f_{3x}\cdot\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Die Coordinaten einer Ecke $A_\varkappa$ des Achsendreiecks sind $\mathfrak{x}_\varkappa = h_\varkappa$, die andern beiden $\mathfrak{x}_\iota = \mathfrak{x}_\lambda = 0$. Daher sind die Gleichungen der

$$\begin{aligned} &\text{Polaren von } A_1: & f_{1x} &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ &\quad ,, \quad ,, \quad A_2: & f_{2x} &\equiv a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ &\quad ,, \quad ,, \quad A_3: & f_{3x} &\equiv a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{aligned}$$

B. Die Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ kann man schreiben

2.
$$\varphi_{1u}\cdot\mathfrak{u}_1 + \varphi_{2u}\cdot\mathfrak{u}_2 + \varphi_{3u}\cdot\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Die Coordinaten einer Seite $g_\varkappa$ des Achsendreiecks sind $u_\varkappa = h_\varkappa : \rho_\varkappa$, die andern beiden $u_\iota = u_\lambda = 0$. Setzt man diese Werthe in 2. ein, so erhält man für

$$\begin{aligned} &\text{den Pol von } A_2A_3: & \varphi_{1u} &\equiv \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_1 + \alpha_{13}u_3 = 0, \\ &\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad A_3A_1: & \varphi_{2u} &\equiv \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 = 0, \\ &\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad A_1A_2: & \varphi_{3u} &\equiv \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ist die geometrische Bedeutung der linearen Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} und φ_{1u}, φ_{2u}, φ_{3u} ersichtlich.

20. Ist eine Seite des Achsendreiecks, z. B. A_2A_3, die Polare der gegenüberliegenden Ecke (A_1), so reducirt sich die Gleichung der Polaren von A_1 auf die Gleichung $x_1 = 0$, also ist $a_{12} = a_{13} = 0$, und die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten ist

1.
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung des Poles von A_2A_3 reducirt sich zugleich auf die Gleichung $u_1 = 0$, also ist $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$ und die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten ist von der Form

2.
$$\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0.$$

21. Ist $\mathfrak{T}_1$ die Polare eines Punktes A_1, und $\mathfrak{T}_2$ die Polare eines auf $\mathfrak{T}_1$ gelegenen Punktes A_2, so geht $\mathfrak{T}_2$ durch A_1; die Polare $\mathfrak{T}_3$ des Punktes A_3, in welchem $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sich schneiden, geht durch die Punkte A_1 und A_2. Wir erhalten somit ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken sind. Ein solches Dreieck heisst ein Polarendreieck.

Eine Ecke eines Polarendreiecks (A_1) kann ganz beliebig gewählt werden; die zweite Ecke (A_2) kann auf der Polaren von A_1 beliebig gewählt werden; die dritte ist durch die beiden andern bestimmt.

Wählt man ein Polarendreieck zum Achsendreieck, so gewinnt die Gleichung des Kegelschnitts eine sehr einfache Gestalt. Die drei Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} (No. 19 A) reduciren sich jetzt der Reihe nach auf $a_{11}x_1$, $a_{22}x_2$, $a_{33}x_3$, es ist also $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Die Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten in Bezug auf ein Polarendreieck ist daher

1. $$f \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung der Polaren eines nicht auf f gelegenen Punktes $\mathfrak{P}$ und die Gleichung der Tangente in einem auf f gelegenen Punkte $\mathfrak{P}$ ist

2. $$\mathfrak{T} \equiv a_{11}\mathfrak{x}_1 \cdot x_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 \cdot x_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 \cdot x_3 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente bestimmen sich daher aus der Proportion
$$\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} : \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} : \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} = a_{11}\mathfrak{x}_1 : a_{22}\mathfrak{x}_2 : a_{33}\mathfrak{x}_3 .$$
Hieraus folgt weiter

3. $$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \frac{\mathfrak{u}_1}{a_{11}h_1} : \frac{\mathfrak{u}_2}{a_{22}h_2} : \frac{\mathfrak{u}_3}{a_{33}h_3} .$$

Da $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{T}$ liegt, so besteht die Gleichung
$$\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{u}_1}{h_1} + \frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{u}_2}{h_2} + \frac{\mathfrak{x}_3\mathfrak{u}_3}{h_3} = 0 .$$
Setzt man hier die Werthe aus der Proportion 3. ein, so erhält man die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten, indem man nun die Veränderlichen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet

4. $$\varphi \equiv \frac{u_1^2}{a_{11}h_1^2} + \frac{u_2^2}{a_{22}h_2^2} + \frac{u_3^2}{a_{33}h_3^2} = 0 .$$

Schreibt man dafür

5. $$\varphi \equiv \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

so gelten die Beziehungen:

6. $$a_{11}\alpha_{11} = \frac{1}{h_1^2}, \quad a_{22}\alpha_{22} = \frac{1}{h_2^2}, \quad a_{33}\alpha_{33} = \frac{1}{h_3^2} .$$

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten 5. findet man auch leicht ohne Benutzung der Gleichung $f = 0$ aus dem Umstande, dass die Ecken A_1, A_2, A_3 die Pole der gegenüberliegenden Seiten sind.

Die Gleichung des Poles einer die Curve φ nicht tangirenden Geraden und die Gleichung des Tangentialpunkts einer Tangente $\mathfrak{T}$ ergiebt sich aus 5. zu:

7. $$\mathfrak{T} \equiv \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 \cdot u_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 \cdot u_2 + \alpha_{33}\mathfrak{u}_3 \cdot u_3 = 0.$$

22. Die Gleichung des Centrums in Bezug auf ein Polarendreieck folgt hieraus für $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 = 1$ zu

1. $$\alpha_{11}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{33}u_3 = 0.$$

Für die Coordinaten des Centrums hat man daher

2. $$\mathfrak{x}_1 = \frac{\alpha_{11}h_1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}, \quad \mathfrak{x}_2 = \frac{\alpha_{22}h_2}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}, \quad \mathfrak{x}_3 = \frac{\alpha_{33}h_3}{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}} .$$

23. Die drei Coefficienten $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$ können nicht dasselbe Zeichen haben,

denn dann könnte die Summe $\alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + \alpha_{33}u_3^2$ nicht für reale Werthe von u_1, u_2, u_3 verschwinden; es haben folglich zwei dieser Coefficienten dasselbe Zeichen, der dritte das entgegengesetzte.

Ist $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$, so ist die Curve, wie schon früher bewiesen (No. 18), eine Parabel. Die Richtung der Achse bestimmt sich aus dem Verhältniss der Coordinaten des unendlich fernen Centrums der Parabel:
$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \alpha_{11}h_1 : \alpha_{22}h_2 : \alpha_{33}h_3 .$$
Wir wollen nun voraussetzen, dass die Summe $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = +1$ ist; dieser Voraussetzung kann immer genügt werden, denn liegt eine Gleichung vor, in welcher $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \gtrless 1$, so braucht man dieselbe nur mit der reciproken Coefficientensumme zu multipliciren.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden: a) zwei Coefficienten sind positiv, der dritte negativ; b) zwei Coefficienten sind negativ, der dritte positiv.

a) Durch Wahl der Bezeichnung kann α_{33} der negative Coefficient sein. Setzt man, um dies deutlicher zu machen $\alpha_{11} = \alpha_1^2$, $\alpha_{22} = \alpha_2^2$, $\alpha_{33} = -\alpha_3^2$, so ist die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten $\varphi \equiv \alpha_1^2u_1^2 + \alpha_2^2u_2^2 - \alpha_3^2u_3^2 = 0$ und in Punktcoordinaten:
$$f \equiv \frac{1}{\alpha_1^2h_1^2}x_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2h_2^2}x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2h_3^2}x_3^2 = 0 .$$
Die Coordinaten des Centrums sind $\mathfrak{x}_1 = \alpha_1^2h_1$, $\mathfrak{x}_2 = \alpha_2^2h_2$, $\mathfrak{x}_3 = -\alpha_3^2h_3$.

Da zwei Coordinaten positiv sind, so liegt das Centrum in dem an A_1A_2 aussen anliegenden zweieckigen Felde.

Die Function f hat für jeden Punkt der Ebene einen bestimmten Werth; ändert sich die Lage eines Punktes P stetig, so bleibt entweder die für die Coordinaten von P berechnete Function f unverändert, oder sie ändert ihren Werth stetig; bewegt sich ein Punkt von einer Lage A in eine andere B entlang der Strecke AB, und ändert dabei die Function f ihr Vorzeichen, so muss sie daher für einen Punkt der Strecke AB (und nicht für mehr als einen) den Werth Null erreicht haben, d. i. ein und nur ein Punkt der Strecke AB liegt auf der Curve $f = 0$.

Setzt man nun die Coordinaten der Ecken des Achsendreiecks in die Function f ein, so erhält f folgende Werthe:

Für den Punkt A_1: $f = \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot h_1^2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$, also positiv:

" " " A_2: $f = \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot h_2^2 = \frac{1}{\alpha_2^2}$, " positiv;

" " " A_3: $f = \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} \cdot h_3^2 = -\frac{1}{\alpha_3^2}$, " negativ.

Da beim Uebergange von A_3 zu A_1 oder A_2 die Function f ihr Zeichen wechselt, so folgt, dass die Strecken A_3A_1 und A_3A_2 die Curve je einmal schneiden.

Für jeden Punkt von A_1A_2 ist $x_3 = 0$, die Function f wird
$$\frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot x_2^2 ,$$
also positiv für jeden Punkt auf A_1A_2; die Seite A_1A_2 schneidet daher die Curve nicht.

Durch jede Curve $f = 0$ wird die Ebene in getrennte (endliche oder unendlich grosse) Gebiete zerschnitten, z. B. in zwei Theile durchedie Ellipse, in drei Theile durch die Hyperbel. Da man von jedem Punkte eines Gebietes zu jedem andern Punkte desselben Gebietes auf einer stetigen Linie gelangen kann, ohne die Curve zu überschreiten, so folgt, dass für alle Punkte eines Gebietes die Function f dasselbe Zeichen hat. Man kann also je nach dem Vorzeichen der Function f jedes Gebiet als ein positives oder als ein negatives bezeichnen. Von zwei Punkten in Gebieten gleichen Vorzeichens können wir nun sagen, dass sie auf derselben Seite der Curve liegen.

Zwei Ecken des Polarendreiecks $A_1 A_2$ liegen also auf der einen, die dritte Ecke A_3 auf der andern Seite der Curve. Für das Centrum erhält f den Werth

$$\frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot \alpha_1^4 h_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot \alpha_2^4 h_2^4 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} \cdot \alpha_3^4 h_3^4 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = +1,$$

folglich liegt das Centrum auf derselben Seite mit A_1 und A_2; also in dem Gebiet der Ebene, durch welches unbegrenzte Gerade (z. B. $A_1 A_2$) gezogen werden können, die die Curve nicht schneiden.

Hierdurch ist die Curve als Hyperbel charakterisirt. Wir sehen daher: Jedes Polarendreieck einer Hyperbel hat zwei Ecken auf derselben Seite, wie das Centrum, die dritte auf der andern; das Centrum liegt in dem durch die Seiten des Polarendreiecks begrenzten zweieckigen Felde, welches der mit dem Centrum nicht auf derselben Seite liegenden Ecke gegenüberliegt.

Rückt das Centrum in eine der Ecken eines Polarendreiecks, in die es überhaupt nur gelangen kann, d. i. in A_1 oder A_2, z. B. in A_1, so wird die Seite $A_2 A_3$ unendlich fern und für das endliche Gebiet wird x_1 zu einer unendlich grossen Constanten; soll die Gleichung der Hyperbel durch endliche Werthe der Coordinaten x_2, x_3 erfüllbar sein, so muss α_1 ebenfalls unendlich gross werden, so dass $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 wird; die beiden andern Seiten des Polarendreiecks $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ sind dann conjugirte Diameter. Sind die Höhenverhältnisse $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : m : n$, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$\gamma^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 m^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 n^2} x_3^2 = 0.$$

Führt man statt x_3 und x_2 schiefwinkelige Parallelcoordinaten x und y ein und setzt $A_2 A_1 A_3 = \omega$, so ist $x_3 = x \sin\omega$, $x_2 = y \sin\omega$, also wird die Gleichung der Hyperbel, nach Division durch γ^2 und passende Umstellung:

$$\frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha^2 n^2} \cdot x^2 - \frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 m^2} \cdot y^2 - 1 = 0$$

in Uebereinstimmung mit § 9, No. 13.

b) Sind zwei Coefficienten negativ, der dritte positiv, so kann die Curvengleichung in Liniencoordinaten geschrieben werden

$$\varphi = \alpha_1^2 u_1^2 - \alpha_2^2 u_2^2 - \alpha_3^2 u_3^2 = 0;$$

woraus die Gleichung in Punktcoordinaten folgt:

$$f = \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0.$$

Die Coordinaten des Centrums ergeben sich jetzt zu:

$$\mathfrak{x}_1 = \alpha_1^2 h_1, \quad \mathfrak{x}_2 = -\alpha_2^2 h_2, \quad \mathfrak{x}_3 = -\alpha_3^2 h_3.$$

Die Function f erhält für die Ecken des Coordinatendreiecks, für das Centrum und für irgend einen Punkt von $A_2 A_3$ die Werthe:

Für den Punkt A_1: $\quad f = \frac{1}{\alpha_1^2}$, also positiv;

„ „ „ A_2: $\quad f = -\frac{1}{\alpha_2^2}$, „ negativ;

„ „ „ A_3: $\quad f = -\frac{1}{\alpha_3^2}$, „ negativ;

für das Centrum: $\quad f = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = +1$, also positiv,

„ einen Punkt von $A_2 A_3$: $\quad f = -\frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2$, „ negativ.

Die Eckpunkte $A_2 A_3$ liegen jetzt auf derselben Seite der Curve und die Gerade $A_2 A_3$ schneidet die Curve nicht; die Ecke A_1 und das Centrum liegen auf der andern Seite der Curve. Jede durch das Centrum nach einem Punkte von $A_2 A_3$ gezogene, d. i. jede durch das Centrum gehende Gerade, schneidet die Curve, denn auf der von dem Centrum und der Geraden $A_2 A_3$ begrenzten Strecke findet ein Vorzeichenwechsel der Function f statt.

Hierdurch wird die Curve als Ellipse charakterisirt.

In jedem Polarendreieck einer Ellipse liegen eine Ecke und das Centrum der Curve auf der Seite derselben Curve, nämlich auf dem ringsum begrenzten, endlichen Gebiete; die andern beiden Ecken und die sie verbindende Gerade liegen auf dem andern, unendlich grossen Gebiete; da zwei Coordinaten des Centrums negativ sind, so liegt das Centrum im Scheitelwinkel desjenigen Dreieckswinkels, dessen Scheitel mit dem Centrum auf derselben Seite der Curve liegt.

Rückt das Centrum in den Punkt A_1, so wird $A_2 A_3$ unendlich fern; wenn der Gleichung durch endliche Werthe von x_2 und x_3 genügt werden soll, so muss $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 werden, und die Verhältnisse der Höhen $h_1 : h_2 : h_2$ müssen endliche Werthe $1 : n : m$ annehmen; die Geraden $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ werden conjugirte Durchmesser. Führt man dieselben Coordinaten ein, wie unter a), so erhält man die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha_3^2 m^2} x^2 + \frac{\sin^2\omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 n^2} y^2 - 1 = 0.$$

Durch die Schlussbetrachtungen von a) und b) ist angedeutet, wie man ein zweiachsiges Coordinatensystem (wobei es unwesentlich ist, ob die Coordinaten parallel oder normal zu den Achsen gemessen werden) als eine Ausartung eines dreiachsigen Systems betrachten kann, nämlich als ein dreiachsiges System, von welchem eine Achse die unendlich ferne Gerade ist.

24. A. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck $A_1 A_2 A_3$ und ein Punkt B gegeben sind, so sind noch weitere drei Punkte der Curve bekannt; dieselben liegen auf den Geraden, welche B mit A_1, A_2 und A_3 verbinden und sind die vierten harmonischen Punkte zu den beiden Schnitten einer solchen Geraden und des Perimeter des Polarendreiecks und zu B; sie bilden mit B die Ecken eines vollständigen Vierecks, für welches A_1 A_2 A_3 die Diagonalpunkte sind, und können durch Ziehen einiger Geraden in bekannter Weise leicht gefunden werden.

Durch ein Polarendreieck und durch zwei Punkte, die aber nicht mit einer Ecke des Polarendreiecks auf einer Geraden liegen dürfen, ist die Curve bestimmt; denn es sind dann im ganzen acht Punkte der Curve bekannt, also mehr als nöthig zur Construction mit Hülfe des Pascal'schen Satzes.

B. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck $A_1 A_2 A_3$ und eine Tangente B gegeben ist, so kennt man noch weitere drei Tangenten; diese sind die vierten harmonischen Strahlen zu je einer Seite des Achsendreiecks, dem Strahl, welcher die Spur von B auf dieser Seite mit dem Pole dieser Seite verbindet, und von B, und können daher leicht construirt werden. Sie bilden die Seiten eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen die Seiten des Achsendreiecks sind.

Kennt man von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck und zwei Tangenten, deren Schnittpunkt aber nicht auf einer Seite des Achsendreiecks liegen darf, so ist die Curve bestimmt; denn man kennt dann im Ganzen acht Tangenten und kann die Curve daher nach dem BRIANCHON'schen Satze construiren.

25. Wir untersuchen nun, ob **zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Paar Pol und Polare haben.**

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte seien in Punktcoordinaten:

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0,$$

in Liniencoordinaten:

$$\varphi' \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0;$$
$$\varphi'' \equiv \beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2 = 0.$$

Für die Coordinaten der Polaren eines Punktes x_1, x_2, x_3 in Bezug auf den ersten Kegelschnitt gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_{1x'} : f_{2x'} : f_{3x'},$$

und für die Coordinaten der Polaren desselben Punktes in Bezug auf f''

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_{1x''} : f_{2x''} : f_{3x''}.$$

Sollen beide Polaren zusammenfallen, so muss die Proportion erfüllt werden:

$$f_{1x'} : f_{2x'} : f_{3x'} = f_{1x''} : f_{2x''} : f_{3x''},$$

also giebt es dann eine Zahl λ, für welche

$$f_{1x'} = \lambda f_{1x''}, \quad f_{2x'} = \lambda f_{2x''}, \quad f_{3x'} = \lambda f_{3x''}.$$

Reducirt man diese drei Gleichungen auf Null, so erhält man

1. $(a_{11} - \lambda b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda b_{13})x_3 = 0,$
2. $(a_{12} - \lambda b_{12})x_1 + (a_{22} - \lambda b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_3 = 0,$
3. $(a_{13} - \lambda b_{13})x_1 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_2 + (a_{33} - \lambda b_{33})x_3 = 0.$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

4. $$L \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13}, & a_{23} - \lambda b_{23}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für λ.

Ist λ_0 eine reale Wurzel der Gleichung $L = 0$, so setze man dieselbe in zwei der drei Gleichungen 1., 2., 3., z. B. in die ersten beiden ein; aus

$$(a_{11} - \lambda_0 b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda_0 b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda_0 b_{13})x_3 = 0,$$

und $$(a_{12} - \lambda_0 b_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda_0 b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda_0 b_{23})x_3 = 0,$$

erhält man dann die Verhältnisse der Coordinaten des zu λ_0 gehörigen Punktes, dessen Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen.

Man kann bei dieser Untersuchung auch von den Gleichungen in Liniencoordinaten ausgehen. Ist T eine Gerade, deren Pole für beide Kegelschnitte zusammenfallen, und sind $u_1u_2u_3$ die Coordinaten von T, so gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = \varphi_{1u'} : \varphi_{2u'} : \varphi_{3u'} = \varphi_{1u''} : \varphi_{2u''} : \varphi_{3u''},$$

also giebt es eine Zahl μ, für welche die Gleichungen bestehen

$$\varphi_{1u'} - \mu\varphi_{1u''} = 0, \quad \varphi_{2u'} - \mu\varphi_{2u''} = 0, \quad \varphi_{3u'} - \mu\varphi_{3u''} = 0, \quad \text{oder}$$

5. $(\alpha_{11} - \mu\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_3 = 0,$
6. $(\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_3 = 0,$
7. $(\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_1 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_2 + (\alpha_{33} - \mu\beta_{33})u_3 = 0.$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

8. $$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \mu\beta_{11}, & \alpha_{12} - \mu\beta_{12}, & \alpha_{13} - \mu\beta_{13} \\ \alpha_{12} - \mu\beta_{12}, & \alpha_{22} - \mu\beta_{22}, & \alpha_{23} - \mu\beta_{23} \\ \alpha_{13} - \mu\beta_{13}, & \alpha_{23} - \mu\beta_{23}, & \alpha_{33} - \mu\beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Jeder realen Wurzel dieser cubischen Gleichung für μ entspringt ein reales gemeinsames Paar Pol und Polare der beiden Kegelschnitte. Die Verhältnisse der Coordinaten der Polaren bestimmen sich, wenn μ_0 eine reale Wurzel von $M = 0$ ist, aus zweien der Gleichungen 5. 6. 7. z. B. aus

$$(\alpha_{11} - \mu_0\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu_0\beta_{13})u_3 = 0,$$

und $$(\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu_0\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu_3\beta_{23})u_3 = 0.$$

Die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ haben also immer die gleiche Anzahl realer Wurzeln.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so giebt es drei Punkte $P_1P_2P_3$, die für beide Kegelschnitte dieselben Polaren $T_1T_2T_3$ haben. Hieraus folgt dann weiter, dass die Ecken des Dreiecks $T_1T_2T_3$ die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ für beide Kegelschnitte zu Polaren haben. Da aber nicht mehr als die drei Punkte $P_1P_2P_3$ existiren, deren Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen, so folgt, dass die Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $T_1T_2T_3$ zusammenfallen. **Haben also die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so besitzen die beiden Kegelschnitte ein reales gemeinsames Polarendreieck.**

Durch Transformation zu diesem gemeinsamen Polarendreieck als Achsendreieck wird jede der quadratischen Formen f', f'', φ' und φ'' in eine Summe von drei Quadraten transformirt.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ zwei conjugirt complexe Wurzeln, so kann man immer noch von einem gemeinsamen Polarendreiecke der beiden Kegelschnitte sprechen; nur sind jetzt zwei Ecken und die ihnen gegenüberliegenden Seiten imaginär, während die dritte Ecke und Seite real sind.

---

26. A. Sind P_1, P_2, .. P_6 Punkte eines Kegelschnitts und $x_{1\varkappa}$, $x_{2\varkappa}$, $x_{3\varkappa}$ die Coordinaten von $P_\varkappa$, so verschwindet die Determinante (§ 11, No. 2)

1. $$\begin{vmatrix} x_{11}^2 & x_{11}x_{21} & x_{11}x_{31} & x_{21}^2 & x_{21}x_{31} & x_{31}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{16}^2 & x_{16}x_{26} & x_{16}x_{36} & x_{26}^2 & x_{23}x_{36} & x_{36}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt, dass es sechs Zahlen $\mu_1 \ldots \mu_6$ giebt, die nicht sämmtlich verschwinden, und für welche

2. $$\begin{aligned} x_{11}^2\mu_1 &+ x_{12}^2\mu_2 + \ldots + x_{16}^2\mu_6 = 0, \\ x_{11}x_{21}\mu_1 &+ x_{12}x_{22}\mu_2 + \ldots + x_{16}x_{26}\mu_6 = 0, \\ x_{11}x_{31}\mu_1 &+ x_{12}x_{32}\mu_2 + \ldots + x_{16}x_{36}\mu_6 = 0, \\ x_{21}^2\mu_1 &+ x_{22}^2\mu_2 + \ldots + x_{26}^2\mu_6 = 0, \\ x_{21}x_{31}\mu_1 &+ x_{22}x_{32}\mu_2 + \ldots + x_{26}x_{36}\mu_6 = 0, \\ x_{31}^2\mu_1 &+ x_{32}^2\mu_2 + \ldots + x_{36}^2\mu_6 = 0. \end{aligned}$$

Es seien u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer willkürlichen Geraden. Multiplicirt man 2. der Reihe nach mit

$$\frac{u_1^2}{h_1^2}, \quad \frac{u_1u_2}{h_1h_2}, \quad \frac{u_1u_3}{h_1h_3}, \quad \frac{u_2^2}{h_2^2}, \quad \frac{u_2u_3}{h_2h_3}, \quad \frac{u_3^2}{h_3^2}$$

und addirt, so erhält man die Identität

3. $$\mu_1P_1^2 + \mu_2P_2^2 + \mu_3P_3^2 + \mu_4P_4^2 + \mu_5P_5^2 + \mu_6P_6^2 \equiv 0,$$

wobei $$P_\varkappa = \frac{1}{h_1}x_{1\varkappa}u_1 + \frac{1}{h_2}x_{2\varkappa}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{3\varkappa}u_3 = 0$$
die Gleichung des Punktes $P_\varkappa$ ist. Wenn also sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so erfüllen sie die Identität 2., wobei die Verhältnisse der Zahlen $\mu_\varkappa$ eindeutig bestimmt sind.

B.*) Wenn sechs Gerade $T_1 \ldots T_6$ einen Kegelschnitt berühren, so erfüllen ihre Gleichungen eine Identität von der Form

4. $$\mu_1 T_1^2 + \mu_2 T_2^2 + \ldots + \mu_6 T_6^2 = 0,$$
wobei die Verhältnisse der $\mu_\varkappa$ eindeutig bestimmt sind.

27. *A.* Sind T_1, T_2, ... T_n willkürliche Gerade, so ist

1. $$\Sigma a_{ik} T_i T_k = 0,$$
wobei für ik jede Variation zweiter Klasse der Zahlen $1 \ldots n$ und $a_{ik} = a_{ki}$ vorausgesetzt werde, die Gleichung eines Kegelschnitts. Die Bedingungsgleichung dafür, dass die Punkte P und Π in Bezug auf 1. conjugirt sind, ergiebt sich aus No. 11, 1 A ohne Schwierigkeit zu

2. $$\Sigma(a_{1i}T_{1x} + a_{2i}T_{2x} + a_{3i}T_{3x} + \ldots + a_{ni}T_{nx})\,T_{i\xi} = 0, \quad i = 1 \ldots n.$$

B. Sind P_1, P_2, ... P_n willkürliche Punkte, so ist

3. $$\Sigma a_{ik} P_i P_k = 0$$
die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten. Die Bedingung dafür, dass T und $\mathfrak{T}$ in Bezug auf denselben conjugirt sind, ist (No. 11, 1 B)

4. $$\Sigma(a_{1i}P_{1u} + a_{2i}P_{2u} + \ldots + a_{ni}P_{nu})\,P_{i\mathfrak{u}} = 0, \quad i = 1 \ldots n.$$

28. A. Für den Kegelschnitt

1. $$K \equiv a_{11}T_1^2 + a_{22}T_2^2 + a_{33}T_3^2 = 0$$
wird die Gleichung No. 27, 2

2. $$a_{11}T_{1x}T_{1\xi} + a_{22}T_{2x}T_{2\xi} + a_{33}T_{3x}T_{3\xi} = 0.$$

Dem Punkte $T_{1x} = T_{2x} = 0$ ist daher jeder Punkt von $T_{3\xi} = 0$ conjugirt u. s. w.; folglich ist $T_1T_2T_3$ ein Polarendreieck von K.

Für den Kegelschnitt

3. $$K \equiv a_{11}T_1^2 + a_{22}T_2^2 + a_{33}T_3^2 + a_{44}T_4^2 = 0$$
geht No. 27, 2 über in

4. $$a_{11}T_{1x}T_{1\xi} + a_{22}T_{2x}T_{2\xi} + a_{33}T_{3x}T_{3\xi} + a_{44}T_{4x}T_{4\xi} = 0.$$

Ist i, k, l, m eine Permutation von 1 2 3 4, so lehrt diese Gleichung, dass dem Punkte $T_{ix} = T_{kx} = 0$ der Punkt $T_{l\xi} = T_{m\xi} = 0$ conjugirt ist; das Vierseit $T_1T_2T_3T_4$ ist daher dem Kegelschnitte K conjugirt, d. h. je zwei Gegenecken sind conjugirt.

Umgekehrt: Wenn für einen Kegelschnitt K zwei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar. Denn sind A, B und C, D Punktpaare zweier Diagonalen des Vierseits, die den Gegenecken, die mit ihnen auf derselben Diagonale liegen, harmonisch zugeordnet sind, und beschränkt man die Coefficienten a_{ii} in $K = 0$ so, dass der Gleichung durch A und C genügt wird, so sind nach dem soeben bewiesenen Satze auch B und D auf K enthalten. Man kann nun die Verhältnisse $a_{11} : a_{22} : a_{33} : a_{44}$ immer so wählen, dass K noch einen beliebigen fünften Punkt enthält, es lässt sich also die Gleichung jedes durch A, B, C und D gehenden Kegelschnitts in der Form 4. darstellen, w. z. b. w.

B. Der Kegelschnitt $K \equiv \Sigma a_{\varkappa\varkappa}P_\varkappa^2 = 0$ hat, wenn $\varkappa = 3$, das Polarendreieck $P_1P_2P_3$; ist $\varkappa = 4$, so ist er dem Vierecke $P_1P_2P_3P_4$ conjugirt,

*) Die Beweise der unter B mitgetheilten Sätze sind denen unter A leicht nachzubilden.

d. h. jedes Paar Gegenseiten dieses Vierecks ist conjugirt. Umgekehrt: Wenn zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks einem Kegelschnitte conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar.

29. Die Identität No. 26, 3 kann geschrieben werden

1. $$\mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 \equiv -\mu_4 P_4^2 - \mu_5 P_5^2 - \mu_6 P_6^2.$$

Alle Geraden, für welche $\mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 = 0$, berühren einen Kegelschnitt, für welchen $P_1P_2P_3$ ein Polarendreieck ist; nach 1. ist für diesen Kegelschnitt auch $\mu_4 P_4^2 + \mu_5 P_5^2 + \mu_6 P_6^2 = 0$, es ist also auch $P_4P_5P_6$ ein Polarendreieck desselben. Wir erkennen daher: Wenn zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt, für den sie Polarendreiecke sind.

Umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte eingeschrieben. Denn sind $P_1P_2P_3$ und $P_4P_5P_6$ Polarendreiecke eines Kegelschnitts, so kann die Gleichung desselben in den beiden Formen geschrieben werden
$$a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 = 0, \quad a_4P_4^2 + a_5P_5^2 + a_6P_6^2 = 0.$$

Daher giebt es eine Zahl n, durch welche die Identität hergestellt wird
$$a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 - na_4P_4^2 - na_5P_5^2 - na_6P_6^2 = 0,$$
folglich liegen die Punkte $P_1 \ldots P_6$ auf einem Kegelschnitte.

B. Wenn zwei Dreiecke demselben Kegelschnitte umschrieben sind, so sind sie Polarendreiecke für einen bestimmten anderen Kegelschnitt; und umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte umschrieben.

§ 14. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

1. A. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichungen in Punktcoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebener Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden
$$f = \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0,$$
heisst ein Kegelschnittbüschel. Man erhält alle Kegelschnitte des Büschels, indem man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe giebt.

Die Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ gehören zum Büschel; sie gehen aus f hervor, wenn man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ setzt.

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels. Sind nämlich $f_\mathfrak{x}'$ und $f_\mathfrak{x}''$ die Werthe, welche die Functionen f' und f'' für einen gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene erhalten, so nehme man $\lambda_1 = f_\mathfrak{x}''$, $\lambda_2 = -f_\mathfrak{x}'$, bilde also den Kegelschnitt $f \equiv f_\mathfrak{x}'' \cdot f' - f_\mathfrak{x}' \cdot f'' = 0$.

Setzt man in f' und f'' statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$, so verschwindet f identisch, also liegt $\mathfrak{P}$ auf $f = 0$.

Hiervon machen nur solche Punkte eine Ausnahme, für welche zugleich $f_\mathfrak{x}' = 0$ und $f_\mathfrak{x}'' = 0$, die also den Kegelschnitten f' und f'' gemein sind. Für dieselben verschwindet auch die Function $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$, sie gehören also allen Kegelschnitten des Büschels an; sie heissen die Träger des Büschels.

B. Die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichung in Liniencoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebenen Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden
$$\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' = 0,$$
heisst eine Kegelschnittschaar. Man erhält alle Kegelschnitte der Schaar, wenn man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe beilegt.

Die gegebenen Kegelschnitte gehören zur Schaar, denn ihre Gleichungen gehen aus φ hervor, wenn man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ setzt.

Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte der Schaar berührt. Denn sind φ_u' und φ_u'' die Werthe, welche die Functionen φ' und φ'' für die Coordinaten einer gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$ annehmen, so wähle man

$$\lambda_1 = \varphi_u'', \quad \lambda_2 = -\varphi_u',$$

bilde also den Kegelschnitt der Schaar

$$\varphi \equiv \varphi_u'' \cdot \varphi' - \varphi_u' \cdot \varphi'' = 0.$$

Ersetzt man die laufenden Coordinaten u_x in φ' und φ'' durch die Coordinaten $\mathfrak{u}_x$ der gegebenen Geraden $\mathfrak{T}$, so verschwindet φ identisch, also berührt $\mathfrak{T}$ den Kegelschnittt $\varphi = 0$.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die gegebene Gerade die beiden gegebenen Kegelschnitte berührt; denn dann ist $\varphi_u' = \varphi_u'' = 0$. Für die Coordinaten jeder solchen Geraden verschwindet auch die Function $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi''$, also wird diese Gerade von allen Kegelschnitten der Schaar berührt. Eine solche Gerade heisst Träger der Schaar.

2. A. Ist ein Punkt zwei Kegelschnitten des Büschels gemein, so ist er allen Kegelschnitten des Büschels gemein.

Beweis. Sind $f''' \equiv \lambda_{13}f' + \lambda_{23}f'' = 0$ und $f'''' \equiv \lambda_{14}f' + \lambda_{24}f'' = 0$ zwei verschiedene Kegelschnitte, so sind die Verhältnisse $\lambda_{13} : \lambda_{23}$ und $\lambda_{14} : \lambda_{24}$ ungleich, folglich ist die Differenz $\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}$ von Null verschieden. Aus

$$\lambda_{13}f' + \lambda_{23}f'' = f''', \quad \lambda_{14}f' + \lambda_{24}f'' = f''''$$

folgt

$$f' = \frac{1}{\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}}(\lambda_{24}f''' - \lambda_{23}f''''),$$

$$f'' = \frac{1}{\lambda_{13}\lambda_{24} - \lambda_{23}\lambda_{14}}(-\lambda_{14}f''' + \lambda_{13}f'''').$$

Diese Formeln zeigen, dass jeder Punkt, dessen Coordinaten den Gleichungen $f''' = 0$, $f'''' = 0$ genügt, auch auf $f' = 0$ und $f'' = 0$ liegt; sowie, dass man die Functionen f' und f'' und damit auch alle linear aus f' und f'' zusammengesetzten quadratischen Functionen f, die gleich Null gesetzt die Gleichungen der Büschelkegelschnitte ergeben, linear durch f''' und f'''', d. i. durch die linken Seiten der Gleichungen von irgend zwei Büschelkegelschnitten ausdrücken kann.

B. Ebenso ergiebt sich: Ist eine Tangente zwei Kegelschnitten einer Schaar gemein, so ist sie allen Kegelschnitten der Schaar gemein.

3. A. Die linearen Functionen $f_{1\mathfrak{x}}$, $f_{2\mathfrak{x}}$, $f_{3\mathfrak{x}}$ (§ 13, No. 1) für die quadratische Form $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$ sind

$$f_{1\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{1\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{1\mathfrak{x}}', \quad f_{2\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{2\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{2\mathfrak{x}}'', \quad f_{3\mathfrak{x}} = \lambda_1 f_{3\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{3\mathfrak{x}}''.$$

Die Gleichung der Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Büschelkegelschnitt $f = 0$ ist also

$$\mathfrak{T} \equiv (\lambda_1 f_{1\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{1\mathfrak{x}}'')\,x_1 + (\lambda_1 f_{2\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{2\mathfrak{x}}'')\,x_2 + (\lambda_1 f_{3\mathfrak{x}}' + \lambda_2 f_{3\mathfrak{x}}'')\,x_3 = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{T}' \equiv f_{1\mathfrak{x}}'x_1 + f_{2\mathfrak{x}}'x_2 + f_{3\mathfrak{x}}'x_3, \quad \mathfrak{T}'' \equiv f_{1\mathfrak{x}}''x_1 + f_{2\mathfrak{x}}''x_2 + f_{3\mathfrak{x}}''x_3,$$

so sind $\mathfrak{T}' = 0$ und $\mathfrak{T}'' = 0$ die Gleichungen der Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' und man hat $\mathfrak{T} \equiv \lambda_1\mathfrak{T}' + \lambda_2\mathfrak{T}''$.

Hieraus folgt, dass die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kegelschnitt f durch den Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' geht; dies ergiebt den Satz: Die Polaren eines Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen

Punkt a; die Punkte A und a sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; es gehen daher auch die Polaren des Punktes a in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels durch A.

Fallen die Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf f' und f'' in eine Gerade $\mathfrak{T}$ zusammen, so geht die Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt f des Büschels durch jeden Punkt von $\mathfrak{T}$, fällt also mit $\mathfrak{T}$ zusammen. Es giebt daher ein Polarendreieck, das allen Kegelschnitten eines Büschels gemeinsam ist; von diesem Dreieck ist entweder eine Ecke und die gegenüberliegende Seite real oder das ganze Dreieck ist real.

Ferner folgt aus der Gleichung der Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf einen Büschelkegelschnitt: Die Strahlenbüschel S_a, S_b, S_c, ... welche von den Polaren der Punkte A, B, C ... der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gebildet werden, sind projectiv; es entsprechen sich die Polaren der Punkte A, B, C .. in Bezug auf denselben Kegelschnitt.

Der Pol einer Geraden AB in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels ist der Schnittpunkt der Polaren von A und B, also der Schnitt zweier entsprechenden Strahlen der collinearen Polarenbüschel S_a und S_b. Hieraus folgt der Satz: Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte. Dieser Kegelschnitt geht durch die Träger der Strahlenbüschel S_a und S_b, d. i. durch die Punkte a und b, welche den Punkten A und B in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind. Der Kegelschnitt, welcher die Pole einer Geraden T in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels enthält, ist also auch der Ort der Punkte, die den Punkten der Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind.

Dem Schnittpunkt der Geraden T mit einer Seite α des Polarendreiecks ist wie allen Punkten von α die gegenüberliegende Ecke A conjugirt, also folgt: Jeder Kegelschnitt, welcher die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels, sowie die Conjugirten der Punkte einer Geraden in Bezug auf das Büschel enthält, ist dem gemeinsamen Polarendreiecke des Büschels umschrieben.

Ist der Punkt A der Geraden AB eine Ecke des Polarendreiecks des Büschels, so fallen die Strahlen des Polarenbüschels von A in eine Gerade zusammen, nämlich in die dem Punkte A gegenüberliegende Seite α des Polarendreiecks. Hieraus folgt: Die Pole jeder durch einen Eckpunkt A des Polarendreiecks gehenden Geraden fallen in die A gegenüberliegende Seite des Polarendreiecks. Um zu erfahren, wo die Punkte liegen, die den Punkten der Geraden AB in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind, bemerken wir, dass die Polaren der Punktreihe AB in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' zwei projective Strahlbüschel bilden, deren Träger auf der dem Punkte A gegenüberliegenden Seite α des Polarendreiecks liegen. Da nun α die Polare von A in Bezug auf f' und f'' ist, so fallen in α zwei entsprechende Strahlen dieser beiden Polarenbüschel zusammen; die beiden Büschel sind daher perspectiv; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, d. i. die den Punkten von AB in Bezug auf f' und f'' und daher in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirten Punkte liegen folglich auf einer Geraden T. Dem auf α gelegenen Punkte der Geraden AB ist A conjugirt, folglich geht T durch A. Wir haben daher den Satz: Den Punkten einer Geraden, die durch eine

Ecke des gemeinsamen Polarendreiecks geht, sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels die Punkte einer andern durch dieselbe Ecke des Polarendreiecks gehenden Geraden conjugirt.

Der Kegelschnitt, auf dem im Allgemeinen die Conjugirten der Punkte einer Geraden liegen, zerfällt in diesem Falle in die Geraden T und α; die Conjugirten für alle Punkte von AB liegen auf T, ausgenommen für den Punkt A, denn diesem sind alle Punkte der Geraden α conjugirt.

B. Die linearen Functionen $\varphi_{1\mathfrak{u}}$, $\varphi_{2\mathfrak{u}}$, $\varphi_{3\mathfrak{u}}$ für die quadratische Form $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi''$ sind

$$\varphi_{1\mathfrak{u}} = \lambda_1\varphi_{1\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{1\mathfrak{u}}'', \quad \varphi_{2\mathfrak{u}} = \lambda_1\varphi_{2\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{2\mathfrak{u}}'', \quad \varphi_{3\mathfrak{u}} = \lambda_1\varphi_{3\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{3\mathfrak{u}}''.$$

Die Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi = 0$ ist daher

$$\mathfrak{P} \equiv (\lambda_1\varphi_{1\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{1\mathfrak{u}}'')\,u_1 + (\lambda_1\varphi_{2\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{2\mathfrak{u}}'')\,u_2 + \lambda_1\varphi_{3\mathfrak{u}}' + \lambda_2\varphi_{3\mathfrak{u}}'')\,u_3 = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{P}' \equiv \varphi_{1\mathfrak{u}}'u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}'u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}'u_3, \quad \mathfrak{P}'' \equiv \varphi_{1\mathfrak{u}}''u_1 + \varphi_{2\mathfrak{u}}''u_2 + \varphi_{3\mathfrak{u}}''u_3,$$

so sind $\mathfrak{P}' = 0$ und $\mathfrak{P}'' = 0$ die Gleichungen der Pole der Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ und man hat

$$\mathfrak{P} \equiv \lambda_1\mathfrak{P}' + \lambda_2\mathfrak{P}''.$$

Also liegt der Pol von $\mathfrak{P}$ auf der Geraden $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$. Wir schliessen daher: Die Pole einer Geraden A in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden α; die Geraden A und α sind daher in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt; es liegen daher auch umgekehrt die Pole der Geraden α in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar auf der Geraden A.

Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn die Pole für die Kegelschnitte φ' und φ'' zusammenfallen; dann fallen die Pole von A in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar zusammen. Hieraus ergiebt sich: Die Kegelschnitte einer Schaar haben ein gemeinsames Polarendreieck; von demselben ist entweder eine Seite und die gegenüberliegende Ecke real, oder das ganze Dreieck ist real.

Aus der Gleichung des Poles einer Geraden $\mathfrak{T}$ für einen Kegelschnitt der Schaar $\varphi = 0$ ergiebt sich ferner: Die Pole der Geraden A, B, Γ, Δ . . . . für die Kegelschnitte einer Schaar bilden projective Punktreihen Σ_α, Σ_β, Σ_γ, Σ_δ, ... und zwar entsprechen sich die Pole derselben Geraden in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte der Schaar.

Die Polaren des Schnittpunktes zweier Geraden AB in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar sind die Geraden, welche die Pole der Geraden A und B verbinden, sind also die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der den Geraden A und B zugehörenden projectiven Polreihen Σ_α und Σ_β; dies ergiebt: Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt. Derselbe wird auch von den Geraden berührt, die den durch P gehenden Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt sind.

Eine Ausnahme von diesen beiden Sätzen tritt nur ein, wenn der Punkt auf einer Seite A des gemeinsamen Polarendreiecks der Schaar liegt. Denn die zu A gehörige Polreihe schrumpft in einen Punkt zusammen, nämlich in den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks. Hieraus folgt: Die Polaren eines Punktes, der auf einer Seite A des Polarendreiecks der Schaar liegt, umhüllen den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks.

Der Geraden, die P mit einer Ecke a des der Schaar gemeinsamen Polarendreiecks verbindet, ist, wie allen durch a gehenden Geraden, die gegenüberliegende Seite A für alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt.

Jeder Kegelschnitt, den die Polaren eines Punktes, sowie die Conjugirten der durch diesen Punkt gehenden Strahlen, in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar umhüllen, ist dem gemeinsamen Polarendreieck der Schaar eingeschrieben.

Ebenso wie der entsprechende Satz für Kegelschnittbüschel ergiebt sich ferner: Den Strahlen eines Büschels, dessen Träger auf einer Seite A des gemeinsamen Polarendreiecks liegt, sind in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar die Strahlen eines andern Büschels conjugirt, dessen Träger P auf derselben Seite des Polarendreiecks liegt. Der Kegelschnitt, den im Allgemeinen die Conjugirten der Strahlen eines Büschels umhüllen, zerfällt in diesem Falle in zwei Strahlbüschel (zwei Punkte); den Strahlen des Büschels, die nicht mit der Geraden A zusammenfallen, sind die Strahlen conjugirt, die durch P gehen; dem Strahl A ist das ganze Strahlbüschel conjugirt, dessen Träger der A gegenüberliegende Eckpunkt des Polarendreiecks ist.

4. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar sind die Pole der unendlich fernen Geraden. Daher folgt (No. 3): Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, der dem Polarendreiecke des Büschels umgeschrieben ist. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden.

Ferner folgt: Die Diameter der Kegelschnitte eines Büschels, die einer festen Diameterrichtung conjugirt sind, gehen durch einen Punkt. Die Diameter der Kegelschnitte einer Schaar, die einer festen Diameterrichtung conjugirt sind, umhüllen einen Kegelschnitt.

5. A. Wir fragen nun nach den Doppelpunkten der Kegelschnitte eines Büschels, oder nach solchen Kegelschnitten eines Büschels, die in zwei Gerade zerfallen.

Hat der Kegelschnitt $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0$ einen Doppelpunkt, und ist

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_1 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2,$$

so verschwindet die Determinante (§ 13, No. 3)

$$1. \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}, & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12}, & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12}, & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten des Doppelpunkts bestimmen sich aus zweien der Gleichungen

$$2. \quad \lambda_1 f_{1x}' + \lambda_2 f_{1x}'' \equiv (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})x_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})x_2 + (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13})x_3 = 0,$$
$$3. \quad \lambda_1 f_{2x}' + \lambda_2 f_{2x}'' \equiv (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12})x_1 + (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})x_2 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23})x_3 = 0,$$
$$4. \quad \lambda_1 f_{3x}' + \lambda_2 f_{3x}'' \equiv (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13})x_1 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23})x_2 + (\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33})x_3 = 0.$$

Ersetzt man hier das Verhältniss $-\lambda_2 : \lambda_1$ durch λ, so werden die Determinante und die Gleichungen 2., 3., 4. mit der Determinante L und den Gleichungen 1., 2., 3. in § 13, No. 25 identisch. Wir haben daher den Satz: Es giebt in jedem Kegelschnittbüschel drei (reale oder imaginäre) Kegelschnitte, die in Geradenpaare zerfallen; die Doppelpunkte dieser Geradenpaare sind die Ecken des gemeinsamen Polarendreiecks.

Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, dass aus der Realität eines Doppelpunktes nicht geschlossen werden kann, dass auch das zugehörige Geradenpaar real ist. Wählt man einen realen Eckpunkt des gemeinsamen Polarendreiecks zur Ecke A_1 und die gegenüberliegende Seite zur Seite A_2A_3 des Coordinatendreiecks, so wird (§ 13, No. 20)

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung 1. wird jetzt

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}, & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ 0 & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}) \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{22} + \lambda_1 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung, die dem Doppelpunkte A_1 entspricht, ist $\lambda_1 : \lambda_2 = b_{11} : -a_{11}$; das zugehörige Geradenpaar hat die Gleichung:

5. $$f \equiv b_{11}f' - a_{11}f'' \equiv (b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22})\,x_2^2 + 2(b_{11}a_{23} - a_{11}b_{23})\,x_2x_3 + (b_{11}a_{33} - a_{11}b_{33})\,x_3^2 = 0.$$

Ist das ganze Polarendreieck real, so wird in Bezug auf dasselbe

$$f' \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$
$$f'' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2.$$

Die Determinante 1. reducirt sich jetzt auf das Produkt der Diagonalglieder

6. $$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})(\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})(\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33}) = 0$$

und liefert für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ die drei realen Wurzeln $b_{11} : (-a_{11})$, $b_{22} : (-a_{22})$, $b_{33} : (-a_{33})$; diesen entsprechen die drei Geradenpaare

7. $$(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})\,x_2^2 - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})\,x_3^2 = 0,$$

8. $$-(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})\,x_1^2 + (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})\,x_3^2 = 0,$$

9. $$(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})\,x_1^2 - (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})\,x_3^2 = 0.$$

Sind die Grössen $(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})$, $(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})$, $(a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})$ alle drei positiv, oder alle drei negativ, so sind die drei Geradenpaare 7., 8., 9. real; sind zwei der Grössen positiv (z. B. die erste und zweite) und die dritte negativ, oder sind zwei negativ (die erste und die zweite) und die dritte positiv, so ist ein Geradenpaar real (in beiden Fällen das Geradenpaar 7.), die andern beiden sind conjugirt complex. Wenn ein Kegelschnittbündel ein reales Polarendreieck hat, so ist entweder ein, oder es sind drei reale Geradenpaare im Büschel enthalten.

B. Der Kegelschnitt $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' = 0$ hat eine Doppeltangente, zerfällt also in zwei Punkte, wenn die Determinante verschwindet

10. $$\begin{vmatrix} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\beta_{22}, & \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{12}, & \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{12} \\ \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{11}, & \lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22}, & \lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23} \\ \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13}, & \lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23}, & \lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zweien der drei Gleichungen:

11. $$(\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\beta_{11})\,u_1 + (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_1\beta_{12})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13})\,u_3 = 0,$$

12. $$(\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\beta_{12})\,u_1 + (\lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})\,u_3 = 0,$$

13. $$(\lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\beta_{13})\,n_1 + (\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})\,u_2 + (\lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33})\,u_3 = 0.$$

Ersetzt man $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $-\mu$, so werden die Determinante 10. und die Gleichungen 11., 12., 13. mit der Determinante M und mit den Gleichungen 5., 6., 7. in § 13, No. 25 identisch. Hieraus folgt: Unter den Kegelschnitten einer Schaar giebt es drei Punktpaare; die Doppeltangenten derselben sind die Seiten des den Kegelschnitten der Schaar gemeinsamen Polarendreiecks.

Ferner folgt ähnlich wie in A: Ist das ganze Polarendreieck real, so sind entweder alle drei Punktpaare real, oder es ist eines real und die andern beiden sind conjugirt complex.

6. A. Mögen nun die drei Geradenpaare, welche einem Kegelschnittbüschel angehören, aus realen Geraden bestehen, oder mögen imaginäre unter ihnen sein, in jedem Falle schneiden sich zwei dieser drei Paare in vier realen oder imaginären Punkten; folglich gehen die Geraden des andern Paares und alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Punkte. Heben wir insbesondere irgend zwei Kegelschnitte des Büschels hervor, so haben wir den Satz: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder complexe Schnittpunkte.

Sind vier reale Schnittpunkte vorhanden, so hat das zu diesen beiden Kegelschnitten gehörige Büschel drei reale Geradenpaare, nämlich die drei Paare Gegenseiten des durch die vier Schnittpunkte bestimmten vollständigen Vierecks, — und ein reales Polarendreieck, dessen Ecken die Diagonalpunkte dieses Vierecks sind.

Um über die Realität der zum Büschel der beiden Kegelschnitte gehörenden Geradenpaare und über die complexen Schnittpunkte weiter zu entscheiden, wollen wir uns die Gleichungen der Kegelschnitte f' und f'' auf ein rechtwinkeliges System bezogen denken. Die Gleichung von f' sei

$$f' \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0.$$

Wird dieser Gleichung durch den imaginären Punkt genügt, der die Coordinaten hat $x = \xi + i\mathfrak{x}$, $y = \eta + i\mathfrak{y}$, so ist

$$x^2 = \xi^2 + 2i\xi\mathfrak{x}, \quad xy = \xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y} + i(\mathfrak{x}\eta + \xi\mathfrak{y}), \quad y^2 = \eta^2 - \mathfrak{y}^2 + 2i\eta\mathfrak{y}.$$

Setzt man diese Werthe in $f' = 0$ ein, so erhält man:

$$a(\xi^2 - \mathfrak{x}^2) + 2b(\xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y}) + c(\eta^2 - \mathfrak{y}^2) + 2d\xi + 2e\eta + k + 2i(a\xi\mathfrak{x} + b\eta\mathfrak{x} + b\xi\mathfrak{y} + c\eta\mathfrak{y} + d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y}) = 0.$$

Also sind die beiden Gleichungen einzeln erfüllt

1. $$a(\xi^2 - \mathfrak{x}^2) = 2b(\xi\eta - \mathfrak{x}\mathfrak{y}) + c(\eta^2 - \mathfrak{y}^2) + 2d\xi + 2e\eta + k = 0,$$

2. $$a\xi\mathfrak{x} + b(\eta\mathfrak{x} + \xi\mathfrak{y}) + c\eta\mathfrak{y} + d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} = 0.$$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch $-\mathfrak{x}$ und $-\mathfrak{y}$, so bleibt die Gleichung 1. ungeändert, und in 2. wechseln alle Glieder die Vorzeichen. Wir schliessen daher: Wenn ein complexer Punkt auf einem Kegelschnitte liegt, so liegt auch der conjugirt complexe auf dem Kegelschnitte. Hieraus folgt weiter: Die complexen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind paarweise conjugirt.

Da nun zwei conjugirt complexe Punkte immer auf einer realen Geraden enthalten sind, so folgt: Sind die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte complex, so zerfallen sie in zwei Paar conjugirte und das Büschel der beiden Kegelschnitte enthält ein reales Geradenpaar.

Bestehen die vier Schnittpunkte aus den beiden Paaren conjugirt complexer Punkte P_1P_1' und P_2P_2', welche die Coordinaten haben $\xi_1 + i\mathfrak{x}_1$, $\eta_1 + i\mathfrak{y}_1$, $\xi_1 - i\mathfrak{x}_1$, $\eta_1 - i\mathfrak{y}_1$; $\xi_2 + i\mathfrak{x}_2$, $\eta_2 + i\mathfrak{y}_2$; $\xi_2 - i\mathfrak{x}_2$, $\eta_2 - i\mathfrak{y}_2$, so sind die Geraden P_1P_1' und P_2P_2' real; die Gleichungen der Geraden P_1P_2 und $P_1'P_2'$ sind:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 + i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 + i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 + i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 + i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 - i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 - i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 - i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 - i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Geraden sind, wie man sieht, conjugirt complex, haben also einen realen Schnittpunkt. Ebenso sind die Geraden P_1P_2' und P_2P_1' conjugirt complex, denn sie haben die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 + i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 + i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 + i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 + i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 - i\mathfrak{x}_1, & \eta_1 - i\mathfrak{y}_1, & 1 \\ \xi_2 - i\mathfrak{x}_2, & \eta_2 - i\mathfrak{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir schliessen hieraus: Wenn zwei Kegelschnitte keinen realen Schnittpunkt haben, so sind alle drei Ecken des gemeinsamen Polarendreiecks real. Hieraus und aus § 13, 24 A folgt weiter: Haben zwei Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale Schnittpunkte oder zwei Paare conjugirt complexe.

Ist nur eine Ecke des Polarendreiecks real und haben die Kegelschnitte einen realen Schnittpunkt, so haben sie (§ 13, No. 14 A) noch einen realen Schnittpunkt; beide Schnittpunkte liegen auf einer durch die reale Ecke des Polarendreiecks gehenden Geraden, und diese Gerade ist ein Theil eines in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitts. Ein dritter realer Schnittpunkt kann nicht existiren, da sonst noch ein zu diesen gehöriger vierter, also ein reales Polarendreieck vorhanden wäre, im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Da die Gleichung des Geradenpaares, das zu dem Büschel der beiden Kegelschnitte gehört, und den realen Eckpunkt des Polarendreiecks zum Doppelpunkte hat, reale Coefficienten hat und im Falle zweier realen Schnittpunkte eine Gerade des Paares real ist, so folgt, dass auch die andere Gerade real ist. Die andern beiden Geradenpaare können reale Gerade nicht enthalten, da dieselben weitere reale Schnittpunkte mit dem realen Geradenpaare erzeugen würden.

Wenn also nur eine Ecke des zwei Kegelschnitten gemeinsamen Polarendreiecks real ist, so haben die beiden Kegelschnitte zwei reale Schnittpunkte. In jedem Falle ist in einem Kegelschnittbüschel wenigstens ein reales Geradenpaar enthalten.

B. Ebenso ergeben sich die dual entsprechenden Sätze: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder paarweis conjugirt complexe gemeinsame Tangenten. — Wenn die vier gemeinsamen Tangenten real sind, so enthält die zu den beiden Kegelschnitten gehörige Schaar drei Paare realer Punkte, die Gegenecken des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits, und ein reales Polarendreieck, dessen Seiten die Diagonalen dieses Vierseits sind. — Haben die beiden Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale gemeinsame Tangenten, oder keine reale gemeinsame Tangente. Ist nur eine Seite des Polarendreiecks real, so haben die Kegelschnitte zwei reale gemeinsame Tangenten, die sich auf der realen Seite des Polarendreiecks schneiden. In jedem Falle gehört zu der von zwei Kegelschnitten bestimmten Schaar ein reales Punktpaar.

7. A. Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer quadratischen Involution.

Beweis. Nimmt man die Gerade zur Seite A_2A_3 eines Coordinatendreiecks, so bestimmen sich die Coordinaten der Schnittpunkte des Kegelschnitts $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0$ und der Achse A_2A_3 aus den Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad f = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1,$$

also aus den beiden Gleichungen

1. $\lambda_1(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + \lambda_2(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) = 0.$

2. $$\frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der zweiten in die erste

$$\frac{x_3}{h_3} = 1 - \frac{x_2}{h_2},$$

so geben die trinomischen Faktoren von λ_1 und λ_2 quadratische Functionen von x_2 allein; bezeichnet man den Abstand eines Punktes P der Geraden A_2A_3 von A_2 mit z, und den Winkel $A_2A_3A_1$ mit α, so kann man durch die Substitution $x_2 = z\,sin\,\alpha$ die Faktoren von λ_1 und λ_2 in quadratische Functionen von z überführen. Ersetzt man nun in § 7, No. 1 und 2 die Grössen λ, r_1, r_2 durch z, λ_1, λ_2, so folgt die Richtigkeit des behaupteten Satzes.

B. Die Tangentenpaare, die von einem Punkte aus an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, bilden eine quadratische Involution.

Wählt man den Punkt als die Ecke A_1 eines Coordinatendreiecks, so erhält man die Coordinaten der von A_1 an den Kegelschnitt $\varphi \equiv \lambda_1\varphi' + \lambda_2\varphi'' = 0$ gelegten Tangenten aus den Gleichungen

3. $(\lambda_1\alpha_{22} + \lambda_2\beta_{22})u_2^2 + 2(\lambda_1\alpha_{23} + \lambda_2\beta_{23})u_3u_3 + (\lambda_1\alpha_{33} + \lambda_2\beta_{33})u_3^2 = 0,$

4. $$\frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Ersetzt man in 3. u_2 und u_3 durch $r_2 : r$ und $r_3 : r$ (§ 12, No. 10, 1), so erhält man die Gleichung

5. $\lambda_1(\alpha_{22}r_2^2 + 2\alpha_{23}r_2r_3 + \alpha_{33}r_3^2) + \lambda_2(\beta_{22}r_2^2 + 2\beta_{23}r_2r_3 + \beta_{33}r_3^2) = 0.$

Bezeichnet man die Strecken A_1A_2 und A_1A_3 mit g_3 und g_2, und die Winkel g_3T und g_3g_2 mit ψ und α, so hat man

6. $r_2 = g_3\,sin\psi, \quad r_3 = g_2\,sin(\psi - \alpha) = g_2\,cos\alpha \cdot sin\psi - g_2\,sin\alpha \cdot cos\psi.$

Durch diese Substitution geht eine homogene quadratische Function von r_2 und r_3 in eine homogene quadratische Function von $sin\psi$ und $cos\psi$ über. Dividirt man die durch die Formeln 6. transformirte Gleichung 5. durch $cos^2\psi$, so werden die mit λ_1 und λ_2 multiplicirten Trinome quadratische Functionen von $tang\varphi$. Aus § 7, No. 2 ergiebt sich nun die Richtigkeit des Lehrsatzes.

8. A. Von zwei Kegelschnitten f' und f'' sind zwei Schnittpunkte und ausserdem noch von jedem drei Punkte gegeben; man soll die andern beiden Schnittpunkte construiren.

Sind A, B die beiden gegebenen Schnittpunkte und C, D, E die drei andern gegebenen Punkte von f', C_1, D_1, E_1 die des andern Kegelschnitts f'', so ziehe man die Gerade CC_1 und bestimme (nach Pascal) die beiden andern Schnittpunkte C' und C_1' dieser Geraden und der Kegelschnitte f' und f''. Durch die beiden Paare CC' und C_1C_1' ist nun die quadratische Involution J bestimmt, welche die Schnittpunkte der Geraden CC_1 und des Curvenbüschels $f'f''$ bilden. Zu diesem Curvenbüschel gehört auch das Geradenpaar, welches aus der Geraden AB und der Verbindungslinie T der unbekannten beiden andern Schnittpunkte besteht; dieses Geradenpaar schneidet die Transversale CC_1 in einem Punktpaare der Involution J; da nun von diesem Punktpaare ein Punkt — der Schnittpunkt von CC_1 und AB — bekannt ist, so kann man nach § 7, No. 5 den andern Punkt dieses Paares, d. i. den Schnitt von CC_1 und T, construiren. Nachdem man so einen Punkt von T gefunden hat, zieht man eine andere Transversale, z. B. DD_1, und bestimmt in gleicher Weise ihren Schnittpunkt mit T. Nun hat man T, und es erübrigt nur noch, nach § 11, No. 13 die Schnittpunkte der Geraden T mit f' oder f'' zu construiren; diese sind die gesuchten Punkte.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn A und B nicht real, sondern conjugirt complex (etwa die complexen Doppelpunkte einer auf einer gegebenen Geraden liegenden quadratischen Involution) sind.

B. Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinsame Tangenten und ausserdem von jedem drei Tangenten gegeben, man soll die beiden andern gemeinsamen Tangenten construiren, ist an der Hand der soeben mitgetheilten Construction leicht aufzufinden.

9. A. Den Kegelschnitt eines Büschels zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht.

α) Hat das Büschel vier reale Träger A, B, C, D, so sind von dem gesuchten Kegelschnitte fünf reale Punkte bekannt, also kann derselbe (nach Pascal) construirt werden.

β) Hat das Büschel nur zwei reale Träger A, B, so bestimme man zunächst nach No. 8 A die Gerade T, auf welcher die beiden conjugirt complexen Träger liegen. Projicirt man drei weitere Punkte C, D, E eines Büschelkegelschnitts f' von A und von B aus auf T, so sind die beiden imaginären Träger die Doppelpunkte der durch die Projectionen $C'D'E'$ und $C''D''E''$ bestimmten projectiven Reihen. Der gesuchte Kegelschnitt kann nun aus den drei realen Punkten P, A, B und den beiden conjugirt complexen nach § 11, No. 14 construirt werden.

γ) Ist keiner der Träger gegeben, so verbinde man den gegebenen Punkt P mit einem gegebenen Punkte A des einen Büschelkegelschnitts f' und bestimme den zweiten Schnittpunkt A_1 der Geraden PA und der Curve f', sowie die beiden Schnittpunkte B und B_1 von PA und einer zweiten Büschelcurve f''. Hierauf construirt man den Punkt Q so, dass das Paar PQ zu der durch die Paare AA_1 und BB_1 bestimmten Involution gehört. Alsdann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Wenn man nun P mit drei weiteren Punkten C, D, E von f' verbindet, und dieselbe Construction wiederholt ausführt, so bekommt man weitere drei Punkte R, S, T des gesuchten Kegelschnitts und kann denselben nun aus den fünf realen Punkten P, Q, R, S, T construiren.

Wenn eine der Geraden, z. B. PA den Kegelschnitt f'' nicht in realen Punkten schneidet, sondern die Schnittpunkte als die conjugirt complexen Doppelpunkte zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen auftreten, so hat man von der Involution, in welcher PA das Kegelschnittbüschel schneidet, ein reales Punktpaar AA_1 und ein conjugirt complexes, und es kommt nun zur Ergänzung dieser Involution darauf an, durch dieses complexe Punktpaar und einen ausserhalb PA liegenden beliebig angenommenen realen Punkt F einen Kreis zu legen.

Sind $GHJ \barwedge G'H'J'$ drei Paare entsprechender Punkte der projectiven Punktreihen, durch deren Doppelpunkte der gesuchte Kreis gehen soll, so verbinde man F mit G, H und J; construire den Kreis, in welchem der auf der Sehne $G'H'$ stehende Peripheriewinkel dem Winkel GFH gleich ist, sowie den Kreis, der HJ zur Sehne und auf derselben einen Peripheriewinkel gleich HFJ hat. Diese beiden Kreise haben ausser H' noch einen realen Punkt K gemein. Da nun in den beiden Büscheln F und K die entsprechenden Winkel gleich sind, so liegen die Punkte F und K und die Schnittpunkte der drei Paar entsprechenden Strahlen auf einem Kreise, und die Strahlen, welche von F und von K aus die Punkte dieses Kreises projiciren, treffen die Gerade GG' in entsprechenden Punkten der beiden projectiven Punktreihen. Also ist dieser Kreis der gesuchte.

B. Die Construction des Kegelschnitts einer Schaar, der eine gegebene Gerade berührt, lässt sich der soeben mitgetheilten leicht nachbilden.

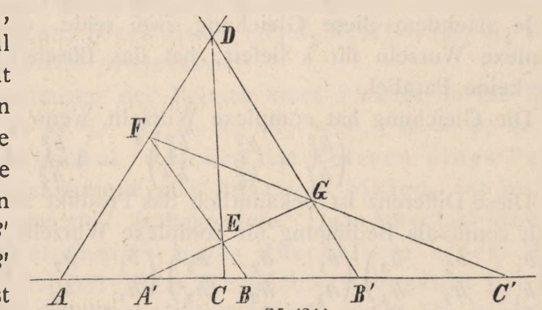
10. A. Wenn eine Gerade T ein Büschelkegelschnitt f berührt, so fallen in den Berührungspunkt die beiden Schnittpunkte von f und T, also zwei Punkte eines Paares der Involution zusammen, welche auf T von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird, folglich ist der Berührungspunkt ein Doppelpunkt dieser Involution. Umgekehrt: Bestimmt man auf einer Geraden T die Involution, in welcher sie die Kegelschnitte eines Büschels durchsetzt, und legt einen Kegelschnitt f des Büschels durch einen Doppelpunkt Δ dieser Involution, so fällt auch der andere Schnittpunkt von f und T in den Punkt Δ, der Kegelschnitt f berührt also die Gerade T.

Hieraus sieht man, dass es zwei Kegelschnitte (die beide real oder beide imaginär sind) eines Büschels giebt, die eine gegebene Gerade berühren; und zugleich, wie man diese Kegelschnitte construirt.

B. Construirt man in der Strahleninvolution der Tangentenpaare, welche von einem Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, die Doppelstrahlen, und construirt den Kegelschnitt φ der Schaar, welcher einen dieser Doppelstrahlen Δ berührt, so kann durch P ausser Δ keine weitere Tangente an φ gezogen werden, also ist P der Berührungspunkt, also geht φ durch P. Hieraus folgt: Es giebt zwei Kegelschnitte einer Schaar, die durch einen gegebenen Punkt gehen, sie berühren die Doppelstrahlen der Strahleninvolution, welche die von dem Punkte an die Kegelschnitte der Schaar gelegten Tangentenpaare bilden.

11. Wenn ein Kegelschnittbüschel die Ecken D, F, E, G eines Vierecks zu Trägern hat, so sind die drei Paare Gegenseiten DE und FG, DF und EG, DG und EF besondere Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt: Die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden in drei Punktpaaren einer Involution geschnitten.

Dies ergiebt eine Methode, eine quadratische Involution linear zu ergänzen: Sind A und A', B und B' zwei Paare und soll man den zu C gehörigen Punkt construiren, so verbinde man A, B' und C mit einem Punkte D ausserhalb AB', projicire einen Punkt E der Geraden CD von A' und B aus auf DB' und DA, und durchschneide AB' mit der Geraden FG; dann ist CC' ein Paar der Involution.



(M. 424.)

12. Wir knüpfen hieran die Frage nach den Parabeln, die in einem Kegelschnittbüschel enthalten sind und beschränken uns auf den Fall, dass die Kegelschnitte des Büschels vier reale Schnittpunkte $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ haben. (Vergl. § 11, No. 6).

Wählt man das gemeinsame Polarendreieck zum Achsendreieck, so enthält jeder Kegelschnitt $K \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$, der durch einen der vier Punkte B geht, auch die drei andern; werden die Coordinaten von B_i mit $x_{1i}\, x_{2i}\, x_{3i}$ bezeichnet, so folgt daher für diese Coordinaten die Proportion:

$$x_{11}^2 : x_{21}^2 : x_{31}^2 = x_{12}^2 : x_{22}^2 : x_{32}^2 = x_{13}^2 : x_{23}^2 : x_{33}^2 = x_{14}^2 : x_{24}^2 : x_{34}^2 .$$

Bezeichnet man die positiven Wurzeln aus x_{11}^2, x_{21}^2, x_{31}^2 der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3, so haben daher die Coordinaten der Punkte B_i die Werthe

1. $$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3,$$

2. $$x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{-b_3}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}},$$

3. $$x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_2} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{-b_2}{\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}},$$

4. $$x_1 = \frac{-b_1}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}.$$

Die erste Coordinatengruppe enthält lauter positive Werthe; von jedem Viereck liegt also ein Eckpunkt im Innern des Dreiecks der Diagonalpunkte. Dieser Punkt werde mit B_1 bezeichnet.

Die Gleichungen der drei Paare Gegenseiten des Vierecks $B_1 B_2 B_3 B_4$ sind

$$b_3x_2 - b_2x_3 = 0, \quad b_3x_2 + b_2x_3 = 0,$$
$$b_1x_3 - b_3x_1 = 0, \quad b_1x_3 + b_3x_1 = 0,$$
$$b_2x_1 - b_1x_2 = 0, \quad b_2x_1 + b_1x_2 = 0.$$

Als Gebilde zweiter Ordnung haben das erste und das zweite Paar die Gleichungen: $(b_3x_2 - b_2x_3)(b_3x_2 + b_2x_3) = b_3^2x_2^2 - b_2^2x_3^2 = 0$,

$$(b_1x_3 - b_3x_1)(b_1x_3 + b_3x_1) = b_1^2x_3^2 - b_3^2x_1^2 = 0.$$

Die Gleichung jedes durch die Punkte B gehenden Kegelschnitts wird daher in der Form erhalten: $(b_3^2x_2^2 - b_2^2x_3^2) + \lambda(b_1^2x_3^2 - b_3^2x_1^2) = 0$, oder geordnet

$$-\lambda b_3^2x_1^2 + b_3^2x_2^2 + (\lambda b_1^2 - b_2^2)x_3^2 = 0.$$

Ist diese Curve eine Parabel, so ist (§ 13, No. 18 und 23):

$$-\frac{1}{\lambda b_3^2 h_1^2} + \frac{1}{b_3^2 h_2^2} + \frac{1}{(\lambda b_1^2 - b_2^2) h_3^2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für λ die quadratische Gleichung

1. $$\frac{b_1^2}{h_2^2}\lambda^2 - \left(\frac{b_1^2}{h_1^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2}\right)\lambda + \frac{b_2^2}{h_1^2} = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung zwei reale, eine reale, oder zwei conjugirt complexe Wurzeln für λ liefert, hat das Büschel zwei Parabeln, eine Parabel oder keine Parabel.

Die Gleichung hat complexe Wurzeln, wenn

$$\left(\frac{b_1^2}{h_1^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2}\right)^2 - 4\frac{b_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{b_2^2}{h_1^2} < 0.$$

Diese Differenz ist bekanntlich das Produkt aus vier linearen Faktoren; man erhält somit als Bedingung für complexe Wurzeln:

2. $$\left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right) > 0.$$

Der erste Faktor ist der positiven Einheit gleich. Von den andern drei Faktoren haben je zwei eine positive Summe, es können also nicht zwei von ihnen negativ sein; die Bedingung 2. erfordert daher, dass jedes der Trinome

$$\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3} = 1 - \frac{2b_3}{h_3},$$
$$\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} = 1 - \frac{2b_2}{h_2},$$
$$-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} = 1 - \frac{2b_1}{h_1},$$

positiv ist, dass mithin b_1, b_2, b_3 kleiner sind, als $\frac{1}{2}h_1$, $\frac{1}{2}h_2$, $\frac{1}{2}h_3$

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Falle die drei andern Punkte B_2, B_3, B_4 in den an den Seiten des Achsendreiecks anliegenden zweieckigen Feldern sich befinden, und dass B_1 im Innern des Dreiecks $B_2 B_3 B_4$ liegt. Auch sieht man leicht, dass, wenn ein Eckpunkt B_1 eines Vierecks im Innern des Dreiecks der drei andern liegt, dieser Punkt positive Coordinaten in Bezug auf das Dreieck der Diagonalpunkte hat, und daher die Gleichung 2. erfüllt ist. Wir schliessen daher: Durch vier im Endlichen liegende Punkte lassen sich nur dann zwei Parabeln legen, wenn keiner sich im Dreiecke der drei andern befindet.

Der Fall, dass durch die vier Punkte nur eine Parabel möglich ist, tritt ein, wenn $\left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)\left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right)\left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}\right) = 0$, also wenn eine von den drei Gleichungen gilt:

$$b_1 = \tfrac{1}{2}h_1, \quad b_2 = \tfrac{1}{2}h_2, \quad b_3 = \tfrac{1}{2}h_3.$$

Wie man leicht sieht, ist dann einer der Punkte $B_2\, B_3\, B_4$ unendlich fern.

Durch drei im Endlichen und einen (in bestimmter Richtung) unendlich fern liegenden Punkt ist eine Parabel eindeutig bestimmt.

13. Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, so kann man bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $r_1 : r_2$ die Gleichung jedes vierten Kegelschnitts des Büschels oder der Schaar in der Form schreiben $K = r_1\gamma_1 K_1 + r_2\gamma_2 K_2 = 0$.

Der Quotient $r_1 : r_2$ heisst das Doppelverhältniss der vier Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3 K_4$ und wird durch $(K_1 K_2 K_3 K)$ bezeichnet.

Auf Grund dieser Definition können Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren in den Kreis projectiver Gebilde gezogen werden: Sind $R_1 R_2 R_3$ und $R_1' R_2' R_3'$ die Gleichungen für je drei Punkte einer Geraden, oder Strahlen eines Büschels, oder Punktepaare einer Punktinvolution, oder Strahlenpaare einer Strahleninvolution, oder Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, und werden je zwei Elemente (Punkte, Strahlen, Punktpaare, Strahlenpaare, Kegelschnitte) der beiden Gebilde auf einander bezogen, für welche $(R_1 R_2 R_3 R) = (R_1' R_2' R_3' R')$, so heissen die beiden Gebilde projectiv.

Beachtet man die Gleichungen der Polaren eines Punktes für die Kegelschnitte eines Büschels $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, $K = 0$, so findet man sofort: Das Polarenbüschel, welches die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden, ist mit dem Kegelschnittbüschel projectiv. Insbesondere: Das Büschel der Tangenten, welche die Kegelschnitte eines Büschels in einem Träger des Büschels berühren, ist mit dem Kegelschnittbüschel projectiv. Ferner folgt aus No. 7: Ein Kegelschnittbüschel und alle die Punktinvolutionen, in denen das Büschel von den Geraden einer Ebene geschnitten wird, sind projectiv, und zwar entspricht einem Kegelschnitt des Büschels das Punktepaar jeder Involution, das auf dem Kegelschnitte liegt.

Die Punktreihe, in welcher eine durch einen Träger gehende Gerade die Kegelschnitte eines Büschels schneidet, ist mit dem Büschel projectiv.

Ebenso findet man: Die geradlinige Punktreihe, welche die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar bilden, ist mit der Schaar projectiv. — Die Reihe der Punkte, in welchen die Kegelschnitte einer Schaar einen Träger der Schaar berühren, ist mit der Schaar projectiv. — Die Strahleninvolutionen, welche von den Tangentenpaaren gebildet werden, die man von den Punkten der Ebene an die Kegelschnitte einer Schaar legt, sind mit der Schaar projectiv. — Das Tangentenbüschel, welches von einem Punkte eines Trägers an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden kann, ist mit der Schaar projectiv.

14. Die Aufgabe: Drei Paare entsprechende Elemente einer Punktreihe und eines projectiven Kegelschnittbüschels sind gegeben; man soll zu einem Punkte der Reihe den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels construiren — wird auf folgendem Wege gelöst.

Es seien $P_1 P_2 P_3$ die gegebenen Punkte, und $K_1 K_2 K_3$ die gegebenen entsprechenden Kegelschnitte.

α) Ist ein realer Träger des Büschels bekannt, so ziehe man durch denselben eine Gerade und bestimme die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, in welchen diese Gerade die Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$ schneidet. Hierauf construire man den Punkt Q der Punktreihe $Q_1 Q_2 Q_3$ so, dass $(Q_1 Q_2 Q_3 Q) = (P_1 P_2 P_3 P)$. Dann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Führt man diese Construction an vier durch den Träger gezogenen Geraden aus, so hat man mit dem Träger fünf reale Punkte und kann dann nach Pascal weiter construiren.

β) Ist kein realer Träger bekannt, so construire man die Polaren $T_1 T_2 T_3$ eines beliebigen Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$ und construire den Strahl T so, dass $(T_1 T_2 T_3 T) = (P_1 P_2 P_3 P)$. Ferner construire man die Schnittpunktpaare $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ einer durch A gehenden Geraden a und der Kegelschnitte K_1 und K_2. Man hat nun das Punktepaar XY der durch $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ bestimmten Involution aufzusuchen, das zu dem Punkte A und zu dem Schnittpunkte A' der Geraden a und T harmonisch liegt; dieses Paar ist der Durchschnitt der Geraden a und des gesuchten Kegelschnitts.

Alle Paare, welche zu AA' harmonisch sind, bilden eine Involution, welche A und A' zu Asymptotenpunkten hat. Construirt man zwei in realen Punkten D und E sich schneidende Kreise, welche a in A und A' berühren, so bestimmen dieselben das Kreisbüschel, welches die Gerade a in den Punktepaaren der zu A und A' gehörenden Involution schneidet. Construirt man ferner zwei Kreise, von denen einer durch $B_1 C_1$, der andere durch $B_2 C_2$ geht, und die beide den Punkt D enthalten, so haben diese Kreise noch einen realen Punkt F gemein. Der durch die drei Punkte D, E, F bestimmte Kreis trifft alsdann a in dem gesuchten Punktepaare XY. Wiederholt man diese Construction an noch zwei durch A gehenden Geraden, so hat man dann sechs reale Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel und einer projectiven Kegelschnittschaar sind drei Strahlen und die entsprechenden Kegelschnitte gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren, der einem Strahle des Büschels entspricht — lässt sich der soeben mitgetheilten Construction leicht nachbilden.

15. Wir schliessen noch einige Betrachtungen über das System von Kegelschnitten einer Ebene an, die zwei Punkte gemein haben, sowie über das dual entsprechende System von Kegelschnitten, die zwei Tangenten gemein haben. Die Gesammtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei Punkte gemein haben,

wollen wir als ein System mit zwei Trägern, oder kürzer als ein zweipunktiges System (von Kegelschnitten) bezeichnen.

Die Kreise einer Ebene haben die beiden imaginären Kreispunkte gemein, bilden also einen besonderen Fall eines zweipunktigen Systems.

Die Gerade, welche die realen oder conjugirt complexen Grundpunkte enthält, heisse die Achse des Systems. Je zwei Kegelschnitte des Systems haben ausser der Achse noch eine gemeinsame Secante; sie mag die zweite Secante der beiden Kegelschnitte heissen.

Wählt man die Träger zu Ecken A_2 und A_3 des Coordinatendreiecks, so genügen die Coordinaten $x_1 = x_2 = 0$, und $x_1 = x_3 = 0$ der Gleichung jedes Systemkegelschnitts; also ist die allgemeine Form der Gleichung

1. $$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Soll der Kegelschnitt nicht in die Achse und eine weitere Gerade degeneriren, so muss a_{23} von Null verschieden sein, und man kann der Gleichung die Form geben

2. $$K \equiv a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Ein zweiter Kegelschnitt des Systems habe die Gleichung

3. $$K' \equiv b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Hieraus folgt

4. $$K - K_1 \equiv x_1\left[(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3\right] = 0.$$

Hieraus schliessen wir, dass

5. $$L \equiv (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3 = 0$$

die Gleichung der zweiten Secante von K und K_1 ist.

Die zweiten gemeinsamen Secanten der drei Paare Kegelschnitte des Systems K_1K_2, K_2K_3, K_3K_1 seien $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$; dann ist

$$x_1\mathfrak{L}_1 \equiv K_2 - K_3, \quad x_1\mathfrak{L}_2 \equiv K_3 - K_1, \quad x_1\mathfrak{L}_3 \equiv K_1 - K_2.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 = 0$. Dies ergiebt den Satz: Die drei zweiten Secanten dreier Kegelschnitte eines zweipunktigen Systems schneiden sich in einem Punkte.

16. Ein Kegelschnitt K des durch zwei Kegelschnitte $K_1 K_2$ des Systems bestimmten Büschels hat die Gleichung $K \equiv \lambda_1K_1 + \lambda_2K_2 = 0$, wobei wir ohne Beschränkung $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ voraussetzen können.

Die Gleichung irgend eines andern Systemkegelschnitts sei $K' = 0$; für die Gleichung der zweiten Secante L' von K und K' ist alsdann

$$x_1 L' \equiv K - K' = 0.$$

Nun ist $K \equiv \lambda_1K_1 + \lambda_2K_2$; da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so kann man für K' schreiben $(\lambda_1 + \lambda_2)K'$; hierdurch erhält man

$$x_1 L' \equiv \lambda_1(K_1 - K') + \lambda_2(K_2 - K').$$

Sind $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ die zweiten Secanten von K_1K' und K_2K', so ist daher

$$L' \equiv \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2.$$

Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auch auf L' liegt. Da nun der Schnittpunkt von L_1 und L_2 nach No. 14 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels (d. i. auf der zweiten Secante von K_1 und K_2) liegt, so haben wir den Satz: Ein Büschel in einem zweipunktigen Kegelschnittsysteme wird von einem andern Systemkegelschnitte K' so geschnitten, dass die zweiten Secanten von K' und den Kegelschnitten des Büschels sich in einem Punkte der zweiten Secante des Büschels treffen.

17. Der soeben entwickelte Satz lehrt die Construction der Kegelschnitte eines Büschels, die einen Kegelschnitt K' berühren, der durch zwei Träger des Büschels geht. Es seien $ABCD$ die Träger des Büschels, und K' gehe durch A und B. Man construire die zweite Secante L eines Büschelkegelschnitts und des Kegelschnitts K'; vom Schnittpunkte der Geraden L und CD aus lege man Tangenten an K'; und construire die Büschelkegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen.

18. Die Gesammtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei gemeinsame Tangenten haben, heisse ein System mit zwei Grundlinien, oder kürzer ein zweiliniges System. In ähnlicher Weise, wie die analogen Sätze für das zweipunktige System, findet man für das zweilinige System:

Legt man ein Coordinatendreieck zu Grunde, in welchem die gemeinsamen Tangenten die durch A_1 gehenden Seiten sind, so ist die Gleichung eines Systemkegelschnitts $\mathfrak{K} \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_3 u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0$.

Die Gleichung des Schnittpunktes des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares M der Systemcurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist

$$M \equiv \frac{1}{u_1}(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2) = 0.$$

In einem zweilinigen System liegen die drei Schnittpunkte der drei zweiten gemeinsamen Tangentenpaare dreier Kegelschnitte auf einer Geraden; die Schnittpunkte der zweiten gemeinsamen Tangentenpaare eines Kegelschnitts mit den Kegelschnitten einer Schaar liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares der Schaar geht.

Mit Hülfe dieser Sätze kann man die beiden Kegelschnitte einer Schaar finden, die einen Kegelschnitt tangiren, der von zwei Grundlinien der Schaar berührt wird.

§ 15. Curven dritter Ordnung. Construction derselben aus neun gegebenen Punkten.

1. Wir geben in den folgenden Abschnitten eine Reihe von Entwicklungen aus der Geometrie der Curven dritter Ordnung, die sich an das bisher Mitgetheilte zunächst anschliessen.

Unter einer Curve $n$ter Ordnung versteht man eine Curve, deren Gleichung in Punktcoordinaten vom Grade n ist.

Die allgemeine Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf ein homogenes Coordinatensystem ist

$$\begin{aligned} f \equiv\ & a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 \\ & + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0. \end{aligned}$$

Bildet man die Summe $\Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l$, indem man für jeden der Indices i, k, l der Reihe nach die Nummern 1, 2, 3 nimmt, und setzt dann die Coefficienten a_{ikl} einander gleich, die sich nur durch die Anordnung der Indices unterscheiden, so erhält man die Function f; es mag daher unter dieser Voraussetzung die Function f durch die Summe $\Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l$ bezeichnet werden.

Soll eine Curve dritter Ordnung durch einen gegebenen Punkt P' gehen, so sind die Coefficienten a_{ikl} so zu wählen, dass der Gleichung $\Sigma a_{ikl}x_i'x_k'x_l' = 0$ genügt wird; dies ist eine homogene lineare Gleichung für die zehn Grössen a_{ikl}. Durch neun solcher Gleichungen sind die Verhältnisse

$$a_{111} : a_{112} : a_{113} : a_{122} : a_{123} : {}_{133} : a_{222} : d_{223} : a_{233} : a_{333}$$

bestimmt. Hieraus folgt: Eine Curve dritter Ordnung ist durch neun Punkte bestimmt.

Die Gleichung einer durch neun Punkte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_9$ gehenden Curve dritter Ordnung ist die Bedingung dafür, dass der veränderliche Punkt derselben cubischen Gleichung genügt, wie die gegebenen, dass also die zehn Gleichungen vereint sind

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l &= 0, \\ \Sigma a_{ikl}x_{i1}x_{k1}x_{l1} &= 0, \\ \Sigma a_{ikl}x_{i2}x_{k2}x_{l2} &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ \Sigma a_{ikl}x_{i9}x_{k9}x_{l9} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung für den Verein dieser zehn Gleichungen ist

$$f \equiv \begin{vmatrix} x_1^3, & x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_{11}^3, & x_{11}^2x_{21}, & \cdots & & & & & & & x_{31}^3 \\ x_{12}^3, & x_{12}^2x_{22}, & \cdots & & & & & & & x_{32}^3 \\ \cdots & & & & & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & & & \cdots \\ x_{19}^3, & x_{19}^2x_{29}, & \cdots & & & & & & & x_{39}^3 \end{vmatrix} = 0,$$

also ist $f = 0$ die gesuchte Curvengleichung.

2. Die Coordinaten der Punkte, in denen sich zwei Curven dritter Ordnung schneiden, werden auf folgendem Wege ermittelt:

Die Gleichungen der beiden Curven seien

1. $\quad f' \equiv \Sigma a_{ikl}x_ix_kx_l = 0, \qquad$ 2. $\quad f'' \equiv \Sigma b_{ikl}x_ix_kx_l = 0.$

Die Coordinaten der Schnittpunkte von f' und f'' sind die Werthe von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen 1. und 2. und der Gleichung

3. $$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$$

genügen. Aus 3. zieht man

4. $$x_3 = h_3\left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{x_2}\right)$$

und setzt dies in 1. und 2. ein; dann erhält man zwei nicht homogene cubische Gleichungen zwischen x_1 und x_2, die nach Potenzen von x_2 geordnet in der Form erscheinen

5. $\quad F' \equiv A_0x_2^3 + A_1x_2^2 + A_2x_2 + A_3 = 0,$

6. $\quad F'' \equiv B_0x_2^3 + B_1x_2^2 + B_2x_2 + B_3 = 0.$

Hierin sind A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 Ausdrücke von demselben Grade in x_1, den der Index angiebt; A_0 und B_0 sind von den Coordinaten unabhängige Zahlen.

Um aus diesen beiden Gleichungen x_2 zu eliminiren, multipliciren wir die Gleichungen 5. und 6. der Reihe nach mit x_2 und x_2^2 und erhalten so im Ganzen die sechs Gleichungen:

7. $$\begin{aligned} F' &\equiv A_3 + A_2x_2 + A_1x_2^2 + A_0x_2^3 &&= 0, \\ x_2F' &\equiv A_3x_2 + A_2x_2^2 + A_1x_2^3 + A_0x_2^4 &&= 0, \\ x_2^2F' &\equiv A_3x_2^2 + A_2x_2^3 + A_1x_2^4 + A_0x_2^5 &&= 0, \\ F'' &\equiv B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2 + B_0x_2^3 &&= 0, \\ x_2F'' &\equiv B_3x_2 + B_2x_2^2 + B_1x_2^3 + B_0x_2^4 &&= 0, \\ x_2^2F'' &\equiv B_3x_2^2 + B_2x_2^3 + B_1x_2^4 + B_0x_2^5 &&= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man diese sechs Gleichungen als homogene lineare Gleichungen der sechs Grössen x_2^0, x_2^1, x_2^2, $\ldots$ x_2^5, so folgt

$$8. \qquad R = \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich statt R zunächst eine andere Determinante R', welche aus R hervorgeht, indem man die Nullen jeder Zeile durch Symbole A und B ersetzt, die man derart mit Indices versieht, dass die absteigende Folge der Indices in jeder Zeile nicht gestört wird (so dass man also die Nullen der ersten Zeile der Reihe nach durch A_{-1} und A_{-2}, die der letzten durch B_5 und B_4 ersetzt), und bezeichnet dann das Element, welches der $i$ten Zeile und der $k$ten Colonne angehört, mit c_{ik}, so überzeugt man sich leicht, dass in den Elementenpaaren $c_{ik}c_{rs}$ und $c_{is}c_{rk}$, wenn man die c wieder durch die Elemente von R' ersetzt, die Summe der unteren Indices dieselbe ist; z. B. ist $c_{23}c_{46} = A_2B_{-2}$, und $c_{26}c_{43} = A_{-1}B_1$, die Summe der Indices also in beiden Paaren gleich Null.

Hieraus folgt sofort, dass in der Determinante R' die Summe der Indices aller Glieder gleich der Indexsumme des Diagonalgliedes, also $= 9$ ist. Diese Thatsache wird nicht geändert, wenn man $A_5 = A_4 = A_{-1} = A_{-2} = B_5 = B_4 = B_{-1} = B_{-2} = 0$ setzt, und dadurch zur Determinante R zurückkehrt. Da nun der Index an A oder B den Grad dieser Funtion in Bezug auf die Coordinate x_1 angiebt, so folgt: Die Determinante R ist vom neunten Grade bezüglich der Unbekannten x_1.

Wählt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln der Gleichung $R = 0$, und setzt diese in die beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ ein, so lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen wenigstens eine gemeinsame Wurzel x_2 haben. Denn multiplicirt man die Colonnen in R der Reihe nach mit x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5 und addirt die zweite etc. zur ersten Colonne, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} F', & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ x_2F', & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ x_2^2F', & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ F'', & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x^2F'', & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ x_2^2F'', & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = PF' + QF''.$$

Hierin sind P und Q quadratische Functionen von x_2. Nimmt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln von $R = 0$, sowie für x_2 der Reihe nach die zugehörigen Wurzeln von $F'' = 0$, so wird $R = PF' + QF'' = 0$, und $F'' = 0$, also auch $PF' = 0$. Da nun P vom zweiten Grade ist, so muss für wenigstens eine der drei Wurzeln x_2 die Function F' verschwinden.

Um diese Wurzel zu bestimmen geht man auf die Gleichungen zurück

$$\begin{aligned} F' &= A_3 + A_2x_2 + A_1x_2^2 + A_0x_2^3 &&= 0, \\ x_2F' &= \phantom{A_3 + {}} A_3x_2 + A_2x_2^2 + A_1x_2 + A_0 &&= 0, \\ F'' &= B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2 + B_0x_2^3 &&= 0, \\ x_2F'' &= \phantom{B_3 + {}} B_3x_2 + B_2x_2^2 + B_1x_2^3 + B_0 &&= 0. \end{aligned}$$

Man schliesst aus ihnen das Verschwinden der Determinante

$$9. \qquad S = \begin{vmatrix} A_3 + A_2x_2, & A_1 & A_0 & 0 \\ A_3x_2, & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 + B_3x_2, & B_1 & B_2 & 0 \\ B_3x_2, & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = S_0 + S_1x_2 = 0,$$

und erhält die gesuchte Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$.

Haben die Gleichungen F' und F'' zu der Wurzel x_1 zwei gemeinsame Wurzeln für x_2, so verschwindet S identisch, und zur Berechnung der beiden Wurzeln genügen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F' &= A_3 + A_2x_2 + A_1x_2^2 + A_0x_2^3 = 0, \\ F'' &= B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2 + B_0x_2^3 = 0, \end{aligned}$$

aus denen man durch Elimination von x_2^3 die quadratische Gleichung erhält

$$A_0(B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2) - B_0(A_3 + A_2x_2^2) = 0,$$

welche die beiden gemeinsamen Wurzeln x_2 ergiebt.

Im Allgemeinen gehört zu jeder Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ eine gemeinsame Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$ der Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$. Wir schliessen hieraus: Zwei Curven dritter Ordnung haben neun Schnittpunkte; davon ist wenigstens einer real.

3. Soll eine Curve III. O. durch acht Punkte P_1, P_2 . . . P_8 gelegt werden, so stelle man die neun Gleichungen auf

$$\begin{array}{ll} 1. & a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2\,x_2 + 3a_{113}x_1^2\,x_3 + \ldots + a_{333}x_3^3 = 0, \\ 2. & a_{111}x_{11}^3 + 3a_{112}x_{11}^2x_{21} + 3a_{113}x_{11}^3x_{31} + \ldots + a_{333}x_{31}^3 = 0, \\ 3. & a_{111}x_{12}^3 + 3a_{111}x_{12}^2x_{22} + 3a_{113}x_{12}^2x_{32} + \ldots + a_{333}x_{32}^3 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9. & a_{111}x_{18}^3 + 3a_{112}x_{18}^2x_{28} + 3a_{113}x_{18}^2x_{38} + \ldots + a_{333}x_{38}^3 = 0. \end{array}$$

Man schliesst hieraus das Verschwinden der Determinante

$$10.\; f = \begin{vmatrix} a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2\,x_2, & x_1^2\,x_3, & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ a_{111}x_{11}^3 + 3a_{112}x_{11}^2x_{21}, & x_{11}^2x_{31}, & \ldots & & & & & & x_{31}^3 \\ a_{111}x_{12}^3 + 3a_{112}x_{12}^2x_{22}, & x_{12}^2x_{32}, & \ldots & & & & & & x_{32}^2 \\ \ldots & & & & & & & & \ldots \\ a_{111}x_{18}^3 + 3a_{112}x_{18}^2x_{28}, & x_{18}^2x_{38}, & \ldots & & & & & & x_{38}^3 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante zerfällt in die Summe zweier Determinanten

$$11. \qquad f = a_{111}f' + 3a_{112}f'',$$

wobei f' und f'' die Functionen dritten Grades sind

$$12. \quad f' = \begin{vmatrix} x_1^3, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_{11}^3, & x_{11}^2x_{31}, & \ldots & & & & & & x_{31}^3 \\ x_{12}^3, & x_{12}^2x_{32}, & \ldots & & & & & & x_{32}^3 \\ \ldots & & & & & & & & \ldots \\ x_{18}^3, & x_{18}^2x_{38}, & \ldots & & & & & & x_{38}^3 \end{vmatrix},$$

$$13. \quad f'' = \begin{vmatrix} x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_3^2, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_{11}^2x_{21}, & x_{11}^2x_{31}, & \ldots & & & & & & x_{31}^3 \\ x_{12}^2x_{22}, & x_{12}^2x_{32}, & \ldots & & & & & & \ldots \\ \ldots & & & & & & & & \ldots \\ x_{18}^2x_{28}, & x_{18}^2x_{38}, & \ldots & & & & & & x_{38}^2 \end{vmatrix}.$$

Die Gesammtheit der durch die gegebenen acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung ergiebt sich, wenn man in 11. dem Verhältniss der beiden unbestimmt gebliebenen Coefficienten $a_{111} : 3a_{112}$ alle möglichen Werthe giebt.

Aus 11. folgt, dass alle Punkte, für welche $f' = 0$ und $f'' = 0$ ist, auch auf der Curve $f = 0$ liegen. Nun sind $f' = 0$ und $f'' = 0$ zwei völlig bestimmte Curven dritter Ordnung, haben also neun bestimmte Schnittpunkte. Unter diesen sind die acht gegebenen Punkte, da für jeden derselben die erste Zeile in f' und f'' mit einer der übrigen identisch wird, und daher f' und f'' verschwinden. Wir schliessen daher: Alle Curven dritter Ordnung, die durch acht gegebene Punkte gehen, haben noch einen durch die gegebenen Punkte bestimmten neunten realen Punkt gemein.

Oder: Wenn zwei Curven III. O. A und B durch acht Punkte einer Curve III. O. C gehen, so liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C.

4. Die Coordinaten der Schnittpunkte der Curve $\Sigma a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$ und der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

1. $\Sigma a_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$, 2. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, 3. $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$.

Aus den Gleichungen 2. und 3. kann man x_2 und x_3 linear durch x_1 ausdrücken. Setzt man diese Werthe in 1., so erhält man eine cubische Gleichung für x_1; zu jeder der drei Wurzeln folgen dann aus 2. und 3. die zugehörigen Werthe von x_2 und x_3. Wir sehen daher: Eine Curve dritter Ordnung hat mit einer Geraden drei Schnittpunkte, von denen wenigstens einer real ist.

Legt man eine Gerade durch zwei Punkte PP_1 einer Curve III. O. C''', so hat dieselbe mit C''' noch einen Punkt Q gemein. Rückt man P_1 an P, bis der Abstand PP_1 verschwindet, so bleibt Q im Allgemeinen in endlicher Entfernung von P_1 und die Gerade PP_1 wird zur Tangente der Curve. Wir finden daher: Eine Gerade, die eine Curve dritter Ordnung in einem Punkte P berührt, schneidet die Curve noch in einem realen Punkte Q.

Dieser Punkt Q wird der Begleiter des Punktes P genannt.

Um die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und eines Kegelschnittes zu finden, setze man

4. $$x_3 = h_3 \left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2}\right)$$

in die Gleichung der C''' und des Kegelschnitts ein und ordne die nun entstehenden Gleichungen nach Potenzen von x_2. Man erhält aus den Gleichungen der C''' und des Kegelschnitts

5. $$F \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_2 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$

6. $$G \equiv B_2 + B_1 x_1 + B_0 x_2^2 = 0,$$

wobei für die A und B dasselbe gilt wie in No. 2.

Aus dem Verein der Gleichungen

$$\begin{aligned} F &\equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 &&= 0,\\ x_2 F &\equiv A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_3^3 + A_0 x_2^4 &&= 0,\\ G &\equiv B_2 + B_1 x_2 + B_0 x_2^2 &&= 0,\\ x_2 G &\equiv B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 &&= 0,\\ x_2^2 G &\equiv B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 x_2^4 &&= 0, \end{aligned}$$

folgt das Verschwinden der Determinante

7. $$R \equiv \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & B_1 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht leicht, dass R sechsten Grades für x_1 ist.

Multiplicirt man die Colonnen in R von der zweiten an der Reihe nach mit x_2, x_2^2, x_2^3, x_2^4 und addirt sie dann zur ersten, so entsteht

8. $$R \equiv \begin{vmatrix} F & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ x_2 F & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ G & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x_2 G & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ x_2^2 G & 0 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv PF + QG,$$

wobei P eine lineare Function von x_2 ist. Setzt man nun in $PF + QG$ für x_1 eine Wurzel der Gleichung 7. und alsdann für x_2 der Reihe nach die beiden zugehörigen Wurzeln der Gleichung $G = 0$ ein, so folgt, dass auch $PF = 0$ ist; da nun P linear in x_2 ist, so muss wenigstens für einen der beiden Werthe von x_2 die Function F verschwinden. Diese gemeinsame Wurzel der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ findet man durch Zusammenstellung der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} F &\equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 &&= 0,\\ G &\equiv B_2 + B_1 x_2 + B_0 x_2^2 &&= 0,\\ x_2 G &\equiv B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 &&= 0, \end{aligned}$$

aus deren Verein sich ergiebt

$$S \equiv \begin{vmatrix} A_3 + A_2 x_2, & A_1 & A_0 \\ B_2 + B_1 x_1, & B_0 & 0 \\ B_2 x_2, & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv S_0 + S_1 x_2 = 0.$$

Hieraus folgt die gesuchte Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$. Verschwinden S_0 und S_1 identisch, so haben F und G zu der ausgewählten Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ zwei zugehörige gemeinsame Wurzeln x_2, nämlich die Wurzeln der Gleichung $G = 0$. Im Allgemeinen gehört zu jeder der sechs Wurzeln x_1 (der Gleichung 7) eine gemeinsame Wurzel $x_2 = - S_0 : S_1$ der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$; berechnet man zu jedem dieser Werthe von x_1 und x_2 noch die Coordinate x_3 nach der Gleichung 4., so hat man die Coordinaten eines Schnittpunktes. Wir haben also gefunden: Eine Curve dritter Ordnung und ein Kegelschnitt haben sechs Schnittpunkte.

5. Schneidet man eine C''' durch eine Gerade T_1 in den Punkten 1, 2, 3 und durch eine andere Gerade T_2 in 4, 5, 6, verbindet diese Punkte paarweis durch die drei Geraden $S_1 S_2 S_3$, und verbindet die dritten Schnittpunkte 7 und 8 der Geraden S_1 und S_2 mit C''' durch eine Gerade T_3, so hat man zwei Curven III. O., nämlich die Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und $S_1 S_2 S_3$, die acht Schnittpunkte, nämlich die Punkte 1 . . . 8, auf C''' haben; also liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''', d. i. T_3 geht durch den Punkt 9, in welchem C''' von S_3 geschnitten wird. Werden also die Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und zweier Geraden paarweis durch drei Gerade verbunden, so schneiden diese die Curve in drei Punkten einer Geraden.

Rückt T_2 unendlich nahe an T_1, so werden $S_1 S_2 S_3$ zu Tangenten der Curve, und 7, 8, 9 werden die Begleiter von 1, 2, 3. Liegen drei Punkte einer Curve dritter Ordnung auf einer Geraden, so liegen auch ihre Begleiter auf einer Geraden.

Es kann sich ereignen, dass eine Gerade mit einer Curve dritter Ordnung drei zusammenfallende Punkte gemein hat. Eine solche Gerade heisst Wendetangente der Curve, der Punkt heisst Wendepunkt. Denkt man sich jeden von zwei Wendepunkten in drei unendlich nahe Punkte aufgelöst, so schneiden die drei Geraden, welche diese Punkte paarweis verbinden, die Curve wieder in drei unendlich nahen Punkten; da nun diese auf einer Geraden liegen, so folgt: Eine Gerade, die zwei Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung verbindet, trifft die Curve noch in einem dritten Wendepunkte.

6. Verbindet man die sechs Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer Curve dritter Ordnung C''' und eines Kegelschnitts K paarweis durch drei Gerade $T_1 T_2 T_3$, durchschneidet mit diesen C''' in den Punkten 7 8 9 und verbindet 7 und 8 durch eine Gerade S, so hat man zwei Curven dritter Ordnung, nämlich das Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und den Verein des Kegelschnitts K und der Geraden S,

welche acht Schnittpunkte $1 \ldots 8$ auf C''' haben; also liegt auch der neunte Schnittpunkt auf C''', d. i. S geht durch 9. Wir schliessen daher: Die drei Geraden, welche die sechs Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Curve III. O. paarweis verbinden, schneiden die Curve in drei Punkten einer Geraden. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve III. O. in drei Punkten berührt, so liegen die Begleiter der Berührungspunkte in einer Geraden.

Legt man durch die Schnittpunkte 1, 2, 3 einer Curve III. O. und einer Geraden S drei Gerade $T_1 T_2 T_3$, welche die C''' in den sechs weiteren Punkten 4, 5, 6, 7, 8, 9 treffen, und legt durch die fünf Punkte 4, 5, 6, 7, 8 einen Kegelschnitt K, so haben das Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und der Verein von S und K acht Schnittpunkte $1 \ldots 8$ auf C'''; also liegt auch der neunte auf C''', d. i. K geht durch 9. Hieraus folgen die Sätze: Liegen von den neun Punkten, in welchen eine Curve III. O. von drei Geraden geschnitten wird, drei auf einer Geraden, so liegen die andern sechs auf einem Kegelschnitte. — Zieht man durch jeden dreier auf einer Geraden liegenden Punkte einer C''' eine Tangente an dieselbe, so wird sie in diesen drei Punkten von einem Kegelschnitte berührt. — Zwei durch einen Punkt einer C''' gezogene Gerade und eine durch den Begleiter gehende treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts. — Drei durch einen Wendepunkt einer C''' gehende Gerade treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts.

7. Legt man durch vier Punkte $ABCD$ einer C''' einen Kegelschnitt K_1, und verbindet die beiden fernen Schnittpunkte 5, 6 von K_1 und C''' durch eine Gerade T_1; legt man ferner durch $ABCD$ einen andern Kegelschnitt K_2, und zieht die Gerade T_2 durch die ferneren beiden Schnittpunkte 7, 8 der Curven C''' und K_2; so hat man zwei Curven III. O. nämlich den Verein von K_1 und T_2 und den von K_2 und T_1, welche die acht Schnittpunkte $ABCD\,5\,6\,7\,8$ auf der Curve C''' haben; mithin liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''', also schneiden sich T_1 und T_2 in einem Punkte E der Curve C'''.

Dieser Punkt E ist nur von K_1 abhängig; denn durch K_1 sind die Punkte 5 und 6, also die Gerade T_1, also ihr weiterer Schnittpunkt E mit C''' bestimmt. Setzt man nun für K_2 nach einander alle Kegelschnitte des Büschels mit den Trägern $ABCD$, so ändert T_2 seine Lage, geht aber immer durch E, beschreibt also ein Strahlbüschel, dessen Träger E auf C''' liegt. Wir haben daher: Liegen die Träger eines Kegelschnittbüschels auf einer Curve III. O. so bilden die Geraden, welche die weiteren zwei Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts und der Curve verbinden, ein Strahlbüschel, dessen Träger auf der Curve liegt.

8. Die Gleichung jeder Curve III. O. C''', die durch die neun Punkte $ABCD\,5\,6\,7\,8\,E$ geht, ist unter der Form enthalten

1. $$f = a_1 K_1 T_2 + a_2 K_2 T_1 = 0;$$

denn man kann das Verhältniss $a_1 : a_2$ immer so bestimmen, dass der Gleichung $f = 0$ durch einen beliebigen Punkt P_0 der Curve C''' genügt wird, der mit keinem der Punkte $A \ldots E$ zusammenfällt. Bezeichnet man nämlich die Werthe, welche die Functionen $K_2 K_1 T_2 T_1$ für die Coordinaten von P_0 annehmen, mit $K_{20} K_{10} T_{20} T_{10}$, so nehme man $a_1 : a_2 = K_{20} T_{10} : - K_{10} T_{20}$, also

2. $$f = K_{20} T_{10} \cdot K_1 T_2 - K_{10} T_{20} \cdot K_2 T_1 = 0;$$

diese wird durch die Coordinaten von P_0 identisch. Da nun die Curve f mit C''' zehn Punkte gemein hat, nämlich $ABCD\,5\,6\,7\,8\,EP_0$, so ist f mit C''' identisch.

Irgend ein Kegelschnitt des Büschels $ABCD$ hat die Gleichung

3. $$K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

Um die Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit f zu erhalten, ersetzen wir gemäss der Gleichung 3. in der Gleichung 1. die Grösse K_2 durch $- \lambda_1 K_1 : \lambda_2$ und erhalten

5. $$(\lambda_2 a_1 T_2 - \lambda_1 a_2 T_1) K_1 = 0.$$

Die Schnittpunkte von K und f befriedigen also theils $K_1 = 0$, theils die lineare Gleichung

6. $$T = \lambda_2 a_1 T_2 - \lambda_1 a_2 T_1 = 0;$$

die ersteren sind die vier Träger des Kegelschnittbüschels; die letztere Gleichung, welche von den beiden übrigen Schnittpunkten der Curven K und f erfüllt wird, ist die Gleichung eines Strahles des Strahlbüschels $T_2 T_1$, dessen Träger E ist. Aus den Gleichungen 3. und 6. ergiebt sich sofort:

Ein Kegelschnittbüschel, dessen Träger auf einer Curve III. O. liegen, und das Büschel der Strahlen, welche die beiden übrigen Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts und der Curve III. O. enthalten, sind projectiv.

Jede Curve III. O. kann also auf unendlich vielfache Weise als Ort der Schnittpunkte eines Kegelschnittbüschels und eines projectiven Strahlbüschels angesehen werden. Man kann dabei die Träger des Kegelschnittbüschels $ABCD$ beliebig auf der Curve auswählen; der Träger E des Strahlbüschels ist durch $ABCD$ eindeutig bestimmt.

Der Punkt E heisst der den vier Punkten $ABCD$ gegenüberliegende Punkt.

9. Im vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, wie man bei einem Strahlbüschel und dazu projectiven Kegelschnittbüschel zu jedem Strahle T den zugehörigen Kegelschnitt K construirt; und früher wurde gezeigt, wie man die Schnittpunkte eines Strahles mit einem Kegelschnitte findet.

Die Aufgabe, eine Curve dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten zu construiren, ist daher gelöst, sobald man im Stande ist, aus neun gegebenen Punkten einer Curve dritter Ordnung zu vieren derselben den gegenüberliegenden Punkt zu construiren.

Sind $ABCD\,5\,6\,7\,8\,9$ die gegebenen Punkte, und nimmt man wieder $ABCD$ zu Trägern des Kegelschnittbüschels, so kommt es darauf an, zu den fünf Kegelschnitten $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ des Büschels, die der Reihe nach durch die Punkte 5, 6, 7, 8, 9 gehen, einen Punkt E zu construiren, so dass die Strahlen $T_5 T_6 T_7 T_8 T_9$, die durch E und der Reihe nach durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, mit den Kegelschnitten $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ projectiv sind. Dies ist erreicht, wenn die beiden Doppelverhältnissgleichheiten bestehen.

1. $$(T_5 T_6 T_7 T_8) = (K_5 K_6 K_7 K_8) \quad \text{und}$$

2. $$(T_5 T_6 T_7 T_9) = (K_5 K_6 K_7 K_9).$$

Das Doppelverhältniss von vier Kegelschnitten eines Büschels ist dem Doppelverhältniss der Tangenten gleich, welche die Kegelschnitte in einem Träger des Büschels berühren. Wir sehen uns daher durch die Forderungen 1. und 2. zunächst vor die Aufgabe gestellt: Den Ort der Punkte zu construiren, von denen aus vier gegebene Punkte α, β, γ, δ durch Strahlen projicirt werden, die das Doppelverhältniss von vier gegebenen Strahlen haben.

Diese Aufgabe haben wir bereits gelöst; wir haben in § 11, No. 15 A gefunden, dass dieser Ort ein Kegelschnitt ist, der durch die vier Punkte α, β, γ, δ geht. Construirt man nun die Tangenten $S_5S_6S_7S_8S_9$, welche die Kegelschnitte $K_5K_6K_7K_8K_9$ z. B. in A berühren, und hierauf den Kegelschnitt H_1, auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 8 unter dem Doppelverhältniss $(S_5S_6S_7S_8)$ projicirt werden; sowie den Kegelschnitt H_2, auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 9 unter dem Doppelverhältniss $(S_5S_6S_7S_9)$ projicirt werden, so geht H_1 durch 5, 6, 7, 8 und H_2 durch 5, 6, 7, 9; H_1 und H_2 haben die drei gegebenen Punkte 5, 6, 7 gemein, und schneiden sich daher in einem vierten realen Punkte; die Strahlen, welche denselben mit 5, 6, 7, 8, 9 verbinden, genügen den beiden Gleichungen

$$(T_5T_6T_7T_8) = (S_5S_6S_7S_8), \quad (T_5T_6T_7T_9) = (S_5S_6S_7S_9),$$

also auch den Gleichungen 1. und 2. Der vierte Schnittpunkt, den die Kegelschnitte H_1 und H_2 ausser den Punkten 5, 6, 7 gemein haben, ist daher der gesuchte Punkt E, der den Punkten A, B, C, D gegenüberliegt.

Hiermit ist die Aufgabe, eine Curve dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten zu construiren, erledigt.

10. Diese Entwicklungen lassen noch einige brauchbare Folgerungen zu:

Der Ort der Punkte, welche vier Punkten $ABCD$ von acht gegebenen Punkten $ABCD\,5\,6\,7\,8$ in allen durch diese acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung gegenüberliegen, ist der Kegelschnitt H_1, von dem aus die Punkte 5, 6, 7, 8 durch Strahlen projicirt werden, die dasselbe Doppelverhältniss haben, wie die durch diese Punkte gehenden Kegelschnitte des Büschels $ABCD$.

Ist 9 der neunte Schnittpunkt aller durch $ABCD\,5\,6\,7\,8$ gehenden Curven dritter Ordnung, sind E und E_1 Punkte des Kegelschnitts H_1, und bezeichnet man die von E aus durch 5, 6 . . . gehenden Strahlen durch $E\,(5, 6\ldots)$, sowie die durch $ABCD$ nach 5, 6 . . . gehenden Kegelschnitte durch $ABCD\;(5, 6\ldots)$, so ist $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E(5, 6, 7, 8, 9)$, $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E'(5, 6, 7, 8, 9)$, mithin hat man die projective Beziehung $E(5, 6, 7, 8, 9) \barwedge E'(5, 6, 7, 8, 9)$, also liegen die Punkte $5\,6\,7\,8\,EE'$ und 9 auf demselben Kegelschnitte. Der neunte Schnittpunkt aller durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung liegt also auf dem Kegelschnitte der Punkte, die vieren von den acht Punkten in allen diesen Curven gegenüberliegen.

Construirt man den Kegelschnitt J der Punkte, die den Punkten A, B, C, 5 in den durch A, B, C, D, 5, 6, 7, 8 gehenden Curven III. O. gegenüberliegen, so liegt der neunte Schnittpunkt 9 dieser Curven auch auf J. Die Kegelschnitte H_1 und J haben die gegebenen Punkte 6, 7, 8 gemein, mithin ist 9 der vierte Schnittpunkt von H_1 und J. Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Den neunten Punkt zu construiren, in dem sich alle durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung schneiden.

11. Die Aufgabe: Von den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts K und einer Curve dritter Ordnung sind vier gegeben, man soll die beiden andern construiren, ist nun leicht zu lösen. Man sucht den Punkt E, der den vier gegebenen Punkten $ABCD$ in C''' gegenüberliegt, und construirt den Strahl T des Büschels E, der dem Kegelschnitt K des Büschels $ABCD$ entspricht; die Schnittpunkte von T und K sind die gesuchten Punkte.

12. Sind vier Schnittpunkte $ABCD$ zweier Curven dritter Ordnung C''' und Γ''' gegeben, und von jeder noch fünf Punkte, so kann man den Kegelschnitt construiren, auf dem die übrigen fünf Schnittpunkte 5, 6, 7, 8, 9 liegen.

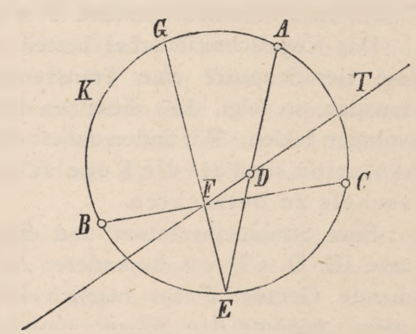
Man construire die Punkte E und E_1, die den Punkten $ABCD$ in C''' und Γ''' gegenüberliegen. Die Strahlbüschel E und E', die mit dem Kegelschnittbüschel die Curven C''' und Γ''' erzeugen, sind projectiv mit dem Kegelschnittbüschel, also auch unter einander projectiv; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bilden also einen Kegelschnitt K. Die Strahlen beider Büschel, die durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, entsprechen den durch diese Punkte gehenden Kegelschnitten, sind also entsprechende Strahlen; also liegen diese fünf Punkte auf dem Kegelschnitte K.

Die Construction der fehlenden vier Schnittpunkte 6, 7, 8, 9 zweier Curven dritter Ordnung C''' und Γ''', von denen fünf Schnittpunkte A, B, C, D, 5 gegeben sind, kann auf die Construction der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückgeführt werden; denn construirt man zu den gegebenen Schnittpunkten $ABCD$ den Kegelschnitt K, auf dem die Punkte 5, 6, 7, 8, 9 liegen, sowie zu den gegebenen Punkten $ABC\,5$ den Kegelschnitt K', der die Punkte D, 6, 7, 8, 9 enthält, so sind die unbekannten vier Punkte die gemeinsamen Punkte von K und K'.

Sind sechs von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung gegeben, so construire man zu fünf von ihnen die Kegelschnitte K und K'; diese haben dann den sechsten bekannten Punkt gemein und unsere Aufgabe ist daher darauf reducirt, die drei unbekannten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu construiren, die einen gegebenen Punkt gemein haben.

Sind sieben von den neun Schnittpunkten gegeben, so kennt man von den Kegelschnitten K und K' bereits zwei Schnittpunkte, und kann daher die beiden andern Schnittpunkte der Curven III. O. mit Lineal und Zirkel construiren.

13. Die Aufgabe: Zu drei gegebenen Schnittpunkten eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung die fehlenden drei zu construiren, kann zugleich mit der Aufgabe gelöst werden: Die beiden fehlenden Schnittpunkte einer Geraden mit einer C''' zu finden, wenn der dritte Schnittpunkt gegeben ist.



(M. 425.)

Besteht eine Curve III. O. C''' aus einem Kegelschnitte K und einer Geraden T, so kann der Punkt, der drei Punkten ABC des Kegelschnitts und einem Punkte D der Geraden gegenüberliegt, in einfachster Weise dadurch gefunden werden, dass man aus dem Kegelschnittbüschel $ABCD$ einen möglichst einfachen Kegelschnitt, ein Geradenpaar, herausgreift. Wählt man z. B. das Geradenpaar AD, BC, und durchschneidet K mit AD in E, und T mit BC in F, so ist der Schnittpunkt G von K und EF der gesuchte Punkt. Führt man die gleiche Construction mit den Geradenpaaren DB, AC und DC, AB aus, so bestimmt man dadurch zugleich die projective Beziehung des Strahlbüschels G und des Kegelschnittbüschels $ABCD$.

Ist nun eine Curve dritter Ordnung Γ''' durch die Punkte A, B, C, D und fünf weitere Punkte bestimmt, und soll man den Kegelschnitt construiren, der die fünf übrigen Schnittpunkte von C''' und Γ''' enthält, so bestimme man den Punkt H, der $ABCD$ in Γ''' gegenüberliegt, sowie die Strahlen des Büschels H, die den drei Geradenpaaren des Büschels $ABCD$ entsprechen; dadurch ist die projective Beziehung der Strahlbüschel G und H bestimmt, und mithin der von ihnen erzeugte, gesuchte Kegelschnitt gefunden.

Dieser Kegelschnitt enthält die drei fehlenden Schnittpunkte von Γ''' und K, sowie die beiden fehlenden von Γ''' und T.

Hierdurch ist die zweite der gestellten beiden Aufgaben gelöst, und die erste ist auf das Fundamentalproblem cubischer Aufgaben zurückgeführt: *Ein Schnittpunkt zweier Kegelschnitte* (G) *ist gegeben, man soll die drei andern finden.*

14. Zwei Strahlenpaare, welche einen gemeinsamen Träger haben, sind Ausartungen von Curven zweiter Ordnung, und können ebenso, wie zwei eigentliche Kegelschnitte, zur Erzeugung eines Kegelschnittbüschels dienen.

Sind T und T' die Strahlen des einen Paares, so sind die Gleichungen der Strahlen des andern Paares von der Form $aT + a'T' = 0$, $bT + b'T' = 0$, mithin sind die Gleichungen der beiden Paare

1. $$TT' = 0 \quad \text{und} \quad (aT + a'T')(bT + b'T') = 0.$$

Die Gleichung irgend eines Kegelschnitts des von den beiden Paaren bestimmten Kegelschnittbüschels ist

2. $$K \equiv \lambda_1 TT' + \lambda_2 (aT + a'T')(bT + b'T') = 0.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man
$$K \equiv \lambda_2 ab \cdot T^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab')\, TT' + \lambda_2 a'b' \cdot T'^2 = 0.$$

Die Function K ist eine homogene quadratische Function der Grössen T und T', und kann daher in zwei in Bezug auf T, T' homogene lineare Faktoren zerlegt werden, die sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

3. $$\lambda_2 ab \left(\frac{T}{T'}\right)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab') \frac{T}{T'} + \lambda_2 a'b' = 0$$

in Bezug auf die Unbekannte $T : T'$ ergeben; findet man aus 3. die Wurzeln α und β, so zerfällt K, abgesehen von einem constanten Faktor, in das Produkt der linearen Functionen $T - \alpha T'$ und $T - \beta T'$, also zerfällt der Kegelschnitt $K = 0$ in die beiden Geraden $T - \alpha T' = 0$ und $T - \beta T' = 0$.

Das Kegelschnittbüschel besteht daher aus lauter Geradenpaaren. Da nun diese Geradenpaare eine Transversale in einer quadratischen Punktinvolution schneiden, so folgt, dass dieselben die Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution bilden. Wir finden daher: *Die Strahlenpaare einer quadratischen Involution sind als die Kegelschnitte eines ausgearteten Kegelschnittbüschels zu betrachten.*

Eine Strahleninvolution und ein projectives Strahlenbüschel erzeugen eine Curve III. O. C''' von besonderer Art; jede durch den Träger D der Involution gehende Gerade T hat nämlich mit C''' ausser D nur noch einen Punkt gemein, nämlich den Schnitt von T mit dem Strahl des projectiven Büschels, welches dem Strahlenpaare der Involution entspricht, zu welchem T gehört. Bei allen durch D gehenden Geraden fallen daher zwei Schnittpunkte derselben mit der Curve C''' in D zusammen; folglich hat C''' in D einen Doppelpunkt.

Eine quadratische Strahleninvolution und ein projectives Strahlbüschel erzeugen also eine Curve dritter Ordnung, welche den Träger der Involution zum Doppelpunkte hat.

15. Sind die Involution und das Strahlbüschel derart auf einander bezogen, dass dem Strahle T, der durch den Träger der Strahleninvolution geht, das Strahlenpaar entspricht, zu welchem dieser Strahl gehört, so sagt man, *das Büschel und die Involution sind in reducirter Lage.* Ist T_1 die Gerade, die mit T ein Strahlenpaar der Involution bildet, so entspricht bei reducirter Lage der Strahl T dem Paare TT_1. Ist ferner $(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0$ ein anderes Paar der Involution und entspricht ihm der Strahl $\mathfrak{T}$, entspricht ferner dem Strahle $\alpha T + \alpha_1 \mathfrak{T} = 0$ das Paar
$$\beta TT_1 + \beta_1 (aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0,$$
so entsprechen sich allgemein
$$\lambda_1 \alpha T + \lambda_2 \alpha_1 \mathfrak{T} = 0 \text{ und } \lambda_1 \beta TT_1 + \lambda_2 \beta_1 (aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen λ_1 und λ_2, so erhält man die Gleichung der Curve, welche durch das Strahlbüschel und die Involution erzeugt wird, nämlich
$$\alpha_1\beta \cdot \mathfrak{T}TT_1 - \alpha\beta_1 T (aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in ein Produkt:
$$T[\alpha_1\beta\mathfrak{T}T_1 - \alpha\beta_1 (aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1)] = 0.$$

Die Curve III. O., welche eine quadratische Strahleninvolution und ein dazu projectives Strahlbüschel in reducirter Lage erzeugen, zerfällt also in eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Umgekehrt schliesst man: *Liegt der Träger einer quadratischen Strahleninvolution auf einem Kegelschnitte K, so gehen die Geraden, welche die Schnittpunkte jedes Paares der Involution verbinden, durch einen Punkt und bilden ein mit der Involution projectives Strahlbüschel.* Sind nämlich M_1 und M_2 zwei Paare der Involution und S_1 und S_2 die Geraden, welche die Schnittpunkte der Paare M_1 und M_2 und des Kegelschnitts K verbinden, ist ferner A der Träger der Involution, B der Schnitt von S_1 und S_2 und T der Strahl AB, und bezieht man das Büschel B projectiv auf die Involution, so dass $S_1, S_2 \barwedge M_1, M_2$ und T dem Paare entspricht, zu welchem T gehört, so befinden sich die Involution und das projective Büschel in reducirter Lage; sie erzeugen also einen Kegelschnitt K', der durch A und durch die vier Punkte geht, in denen K von S_1 und S_2 geschnitten wird. Da nun K' diese fünf Punkte mit K gemein hat, so ist K' mit K identisch.

Hieraus folgt eine einfache Construction der Aufgabe, *eine quadratische Strahleninvolution zu ergänzen.* Man construire einen Kreis K, der den Träger A der Involution enthält, und zwei Sehnen, deren jede die Schnittpunkte eines Strahlenpaares der Involution mit K enthält. Legt man durch den Schnittpunkt dieser Sehnen eine Gerade, die K in B und B_1 schneidet, so ist AB, AB_1 ein Strahlenpaar der Involution.

16. Mit Hülfe dieser Sätze kann die Aufgabe: *Die drei Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung C''' und einer geraden Linie T zu construiren,* auf das cubische Fundamentalproblem zurückgeführt werden.

Wir construiren ein Kegelschnittbüschel und ein projectives Strahlenbüschel, welche die Curve C''' erzeugen. Dieselben schneiden T in einer quadratischen Punktinvolution und einer dazu projectiven Punktreihe. Die Schnittpunkte von T und C''' sind nun die Punkte der Reihe, welche mit einem Punkte des entsprechenden Punktpaares zusammenfallen. Unsere Aufgabe ist daher auf die folgende reducirt: Auf einer Geraden T liegen eine quadratische Punktinvolution und eine dazu projective Punktreihe; man soll die Punkte X der Reihe finden, die mit einem Punkte des entsprechenden Paares zusammenfallen.

Wir projiciren von einem willkürlich gewählten Punkte A aus die Punktinvolution und die Punktreihe und erhalten so in A eine Strahleninvolution J und ein dazu projectives Strahlbüschel S; die Strahlen des Büschels, welche nach einem der gesuchten Punkte X gehen, fallen mit einem Strahle des entsprechenden Paares der Strahleninvolution zusammen. Legen wir einen Kreis K durch A, und verbinden die Punkte, in welchem der Kreis von jedem Strahlenpaare der Involution getroffen wird, so bilden diese Verbindungsgeraden ein Strahlbüschel Σ, welches mit der Involution J projectiv ist. Die projectiven Büschel S und Σ erzeugen einen Kegelschnitt C, der durch den Träger A des Büschels geht, und daher den Kreis K in drei weiteren Punkten Y_1, Y_2, Y_3 schneidet. Der Strahl des Büschels S und das Paar der Involution J, auf denen einer dieser Punkte Y liegt, entsprechen dem durch Y gehenden Strahle des projectiven Büschels Σ, sind also einander entsprechend. Die gesuchten Punkte der Geraden T sind daher die Punkte, in denen T von den Strahlen AY_1, AY_2, AY_3 geschnitten wird.

17. Hat man ein Kegelschnittbüschel und das dazu projective Strahlbüschel bestimmt, durch welches eine Curve III. O. erzeugt wird, und rückt ein Strahl T des Strahlbüschels unendlich nahe an einen Träger A des Kegelschnittbüschels heran, so hat der entsprechende Kegelschnitt K des Büschels mit C''' in A zwei unendlich nahe benachbarte Punkte gemein; mithin haben C''' und K in A eine gemeinsame Tangente. Die Tangente, die eine Curve dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte A derselben berührt, wird daher in folgender Weise gefunden. Man construire den Punkt E der C''', der dem Punkte A und drei weiteren Punkten der C''' gegenüberliegt, ziehe EA und construire in A die Tangente des Kegelschnitts, der diesem Strahle entspricht.

§ 16. Tangente und Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung.

1. Wir verbinden zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und Π und bestimmen die Verhältnisse, in welchen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve dritter Ordnung geschnitten wird:

1. $$f \equiv \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l = 0; \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

Zu diesem Zwecke setzen wir in 1.

$$x_\varkappa = \frac{\lambda_1 \mathfrak{x}_\varkappa + \lambda_2 \xi_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

und erhalten für das gesuchte Theilverhältniss $\mu = \lambda_2 : \lambda_1$ die Gleichung:

2. $$\begin{aligned} & f(\mathfrak{x}) + 3[f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3] \cdot \mu \\ & + 3[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu^2 \\ & + f(\xi) \cdot \mu^3 = 0. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten $F(\mathfrak{x})$ und $F(\xi)$ die Werthe, welche eine Function F erhält, wenn man die $x_\varkappa$ durch die $\mathfrak{x}_\varkappa$ bez. $\xi_\varkappa$ ersetzt; ferner bedeuten

3. $$\begin{aligned} f_1 &\equiv a_{111}x_1^2 + 2a_{112}x_1x_2 + 2a_{113}x_1x_3 + a_{122}x_2^2 + 2a_{123}x_2x_3 + a_{133}x_3^2 \equiv \Sigma a_{1ik}x_ix_k, \\ f_2 &\equiv a_{112}x_1^2 + 2a_{122}x_1x_2 + 2a_{123}x_1x_3 + a_{222}x_2^2 + 2a_{223}x_2x_3 + a_{233}x_3^2 \equiv \Sigma a_{i2k}x_ix_k, \\ f_3 &\equiv a_{113}x_1^2 + 2a_{123}x_1x_2 + 2a_{133}x_1x_3 + a_{223}x_2^2 + 2a_{233}x_2x_3 + a_{333}x_3^2 \equiv \Sigma a_{ik3}x_ix_k, \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} f_{11} &\equiv a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3, & f_{22} &\equiv a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{223}x_3, \\ f_{12} &\equiv a_{112}x_1 + a_{122}x_2 + a_{123}x_3, & f_{23} &\equiv a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3, \\ f_{13} &\equiv a_{113}x_1 + a_{123}x_2 + a_{133}x_3, & f_{33} &\equiv a_{133}x_1 + a_{233}x_2 + a_{333}x_3. \end{aligned}$$

Für diese Functionen gelten die Identitäten

5. $$\begin{aligned} f_1 &\equiv f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3, \\ f_2 &\equiv f_{12}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3, \\ f_3 &\equiv f_{13}x_1 + f_{23}x_2 + f_{33}x_3, \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} f &\equiv f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \\ &\equiv f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

2. Wir nehmen zunächst an, $\mathfrak{P}$ sei auf f gelegen; alsdann ist $f(\mathfrak{x}) = 0$ und die Gleichung 2. hat die selbstverständliche Wurzel $\mu = 0$, welcher der Punkt $\mathfrak{P}$ entspricht. Die beiden andern Wurzeln der Gleichung 2. erhält man aus der quadratischen Gleichung:

1. $$\begin{aligned} & 3[f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3] + 3[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_3 \\ & + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu + f(\xi) \cdot \mu^2 = 0. \end{aligned}$$

Liegt Π auf der Geraden $T \equiv f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 = 0$, so hat die Gleichung 1. eine Wurzel $\mu = 0$; die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ hat dann in $\mathfrak{P}$ zwei zusammenfallende Punkte mit der Curve f gemein, berührt also f im Punkte $\mathfrak{P}$. Die Gerade T geht durch $\mathfrak{P}$, denn setzt man in T für die Veränderlichen $\xi_\varkappa$ die Coordinaten $\mathfrak{x}_\varkappa$ des Punktes $\mathfrak{P}$, so erhält man

2. $$f_1(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x}_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x}_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{x}_3,$$

und dies ist nach 6. identisch mit $f(\mathfrak{x})$, also gleich Null, da $\mathfrak{P}$ auf f liegt. Es giebt daher nur eine Gerade, welche eine Curve III. O. in einem gegebenen Punkte derselben berührt, und die Gleichung der Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte $\mathfrak{P}$ ist

3. $$T \equiv f_1(\mathfrak{x}) \cdot x_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot x_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot x_3 = 0.$$

3. Die Gleichung der Tangente in einem Curvenpunkte wird nur dann unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die drei Functionen f_1, f_2, f_3 zugleich verschwinden. Aus der Identität No. 1, 6 folgt, dass unter dieser Bedingung $\mathfrak{P}$ auf der Curve f liegt.

Ist für die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so wird die Gleichung 3. identisch und jede durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade schneidet die Curve f im Punkte $\mathfrak{P}$ in zwei zusammenfallenden Punkten; hierdurch ist der Punkt $\mathfrak{P}$ als Doppelpunkt charakterisirt.

Die drei Gleichungen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ sind homogen quadratisch für die unbekannten Coordinaten $x_\varkappa$ des Doppelpunktes, haben daher im Allgemeinen kein gemeinsames System von Wurzeln; eine Curve III. O. hat also im Allgemeinen keinen Doppelpunkt. Mehr als einen Doppelpunkt kann eine eigentliche Curve dritter Ordnung nicht haben; denn eine zwei Doppelpunkte verbindende Gerade würde mit der Curve vier Schnittpunkte haben.

4. Zwischen f, f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33} bestehen die Identitäten No. 1, 5; dieselben lehren sofort: Wenn es einen Punkt $\mathfrak{P}$ giebt, für welchen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so verschwindet für diesen Punkt auch die Determinante:

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante heisst die Hesse'sche Determinante der cubischen Function f. Sie ist homogen dritten Grades in den Coefficienten von f sowie in den Coordinaten $x_\varkappa$. Die Gleichung $H = 0$ ist daher die Gleichung einer zur

Curve f in einer bestimmten Beziehung stehenden Curve dritten Grades; man nennt dieselbe die HESSE'sche Curve der Curve $f = 0$. Wir haben daher: **Hat eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, so liegt derselbe auf der zugehörigen HESSE'schen Curve.**

5. Ist $\mathfrak{P}$ der Doppelpunkt einer mit Doppelpunkt versehenen Curve dritter Ordnung, so wird der dritte Schnittpunkt einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden und der C''' aus der Gleichung bestimmt, die aus No. 2, 1 nach der Substitution $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ und nach Absonderung der Wurzel $\mu = 0$ übrig bleibt:

$$1.\quad 3[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] + f(\xi) \cdot \mu = 0.$$

Wird nun der Punkt Π so gewählt, dass

$$2.\quad f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2 = 0,$$

so hat die Gleichung 1. die Wurzel $\mu = 0$, alle drei Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ fallen also in den Doppelpunkt $\mathfrak{P}$.

Da die HESSE'sche Determinante für die Coordinaten des Doppelpunktes verschwindet, so folgt (§ 13, No. 3), dass der Kegelschnitt 2. in zwei Gerade zerfällt. Die Coordinaten des Schnittpunkts dieser beiden Geraden genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin $\xi_\varkappa$ durch $\mathfrak{x}_\varkappa$, so gehen die linken Seiten in $f_1(\mathfrak{x})$, $f_2(\mathfrak{x})$, $f_3(\mathfrak{x})$ über, verschwinden also; der Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ ist also zugleich der Doppelpunkt der Curve 2. Hieraus folgt, dass die beiden durch 2. repräsentirten Geraden diejenigen Geraden sind, die durch $\mathfrak{P}$ gehen und in $\mathfrak{P}$ drei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve $f = 0$ haben. Diese beiden Geraden heissen die **Doppelpunktstangenten.**

Verlegt man den Eckpunkt A_1 des Coordinatendreiecks in den Doppelpunkt, so ist $\mathfrak{x}_1 = h_1$, $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 = 0$, mithin

$$\begin{aligned} f_{11}(\mathfrak{x}) &= a_{111}h_1, & f_{12}(\mathfrak{x}) &= a_{112}h_1, & f_{13}(\mathfrak{x}) &= a_{113}h_1, \\ f_{22}(\mathfrak{x}) &= a_{122}h_1, & f_{23}(\mathfrak{x}) &= a_{123}h_1, & f_{33}(\mathfrak{x}) &= a_{133}h_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der beiden Doppelpunktstangenten wird nach Weglassung des Faktors h_1

$$a_{111}x_1^2 + 2a_{112}x_1x_2 + 2a_{113}x_1x_3 + a_{122}x_2^2 + 2a_{123}x_2x_3 + a_{133}x_3^2 = 0.$$

Sind dieselben real, und nimmt man A_2 und A_3 auf ihnen an, so muss sich die linke Seite auf ein Vielfaches von x_2x_3 beschränken, daher ist

$$a_{111} = a_{112} = a_{113} = a_{122} = a_{133} = 0.$$

Bezieht man also die Gleichung einer mit Doppelpunkt versehenen Curve III. O. auf ein Coordinatendreieck, das die Ecke A_1 im Doppelpunkt und die Ecken A_2, A_3 auf den Doppelpunktstangenten hat, so ist die Gleichung von der Form:

$$3.\quad f \equiv 6a_{123}x_1x_2x_3 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Für die Function f_{11}, f_{12}, f_{13} erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} f_{11} &\equiv 0, & f_{22} &\equiv a_{222}x_2 + a_{223}x_3, \\ f_{12} &\equiv a_{123}x_3, & f_{23} &\equiv a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3, \\ f_{13} &\equiv a_{123}x_2, & f_{33} &\equiv a_{233}x_2 + a_{333}x_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung der HESSE'schen Curve wird daher

$$H \equiv \begin{vmatrix} 0, & a_{123}x_3, & a_{123}x_2 \\ a_{123}x_3, & f_{22}, & f_{23} \\ a_{123}x_2, & f_{23}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man nach den Gliedern der ersten Zeile, so erhält man

$$\frac{1}{a_{123}^2} \cdot H \equiv -x_3 \begin{vmatrix} x_3, & f_{23} \\ x_2, & f_{33} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_3, & f_{22} \\ x_2, & f_{23} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x_3, & x_2f_{22} - x_3f_{23} \\ x_2, & x_2f_{23} - x_3f_{33} \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$4.\quad \frac{1}{a_{123}^2} \cdot H \equiv 2a_{123}x_1x_2x_3 - a_{222}x_2^3 + a_{223}x_2^2x_3 + a_{233}x_2x_3^2 - a_{333}x_3^3.$$

Die Gleichung $H = 0$ hat dieselbe Gestalt, wie 3. Wir schliessen hieraus: **Hat eine Curve dritter Ordnung f einen Doppelpunkt, so hat ihre HESSE'sche Curve H in demselben Punkte einen Doppelpunkt, und beide Curven haben die Doppelpunktstangenten gemein.**

Haben zwei Curven einen gemeinsamen Doppelpunkt, so gilt derselbe für vier Schnittpunkte; haben sie ausserdem noch gemeinsame Doppelpunktstangenten, so haben sie noch zwei auf den Doppelpunktstangenten gelegene, dem Doppelpunkte unendlich nahe gemeinsame Punkte, also zählen der gemeinsame Doppelpunkt und die gemeinsamen Doppelpunktstangenten für zusammen sechs Schnittpunkte. Die drei Schnittpunkte, welche die Curven f und H noch ausserdem gemein haben, befriedigen die Gleichung

$$f - \frac{3}{a_{123}^2} \cdot H \equiv 4a_{222}x_2^3 + 4a_{333}x_3^3 = 0.$$

Diese Gleichung liefert die Verhältnisse $x_2 : x_3$ der drei andern Schnittpunkte; sind α' und α'' die beiden conjugirt complexen Wurzeln der Einheit, und ist μ die reale Cubikwurzel aus $(-a_{333}) : a_{222}$, so hat man

$$a_{222}x_2^3 + a_{333}x_3^3 \equiv a_{222}(x_2 - \mu x_3)(x_2 - \alpha'\mu x_3)(x_2 - \alpha''\mu x_3).$$

Es sind daher $x_2 - \mu x_3 = 0$, $x_2 - \alpha'\mu x_3 = 0$, $x_2 - \alpha''\mu x_3 = 0$ die Gleichungen der Strahlen, welche von A_1 aus nach den andern Schnittpunkten gehen. **Eine Curve III. O. mit Doppelpunkt und realen Doppelpunktstangenten und ihre HESSE'sche Curve haben ausser dem Doppelpunkte noch einen realen und zwei conjugirt complexe Schnittpunkte.**

6. Es kann sich ereignen, dass die beiden Tangenten eines Doppelpunkts einer Curve $n$ten Grades zusammenfallen. Man bezeichnet dann den Doppelpunkt als einen **Rückkehrpunkt** und die Tangente in diesem Punkte als **Rückkehrtangente.** Legen wir, um diesen Fall bei cubischen Curven aufzusuchen, die Ecke A_1 des Coordinatendreiecks in den Rückkehrpunkt, die Ecke A_3 auf die Rückkehrtangente; dann muss sich die Gleichung der Doppelpunktstangenten auf die Gleichung der doppelt zu zählenden Achse A_1A_3, also auf $x_2^2 = 0$ reduciren.

Hieraus folgt $a_{111} = a_{112} = a_{113} = a_{123} = a_{133} = 0$; mithin ist die Gleichung der Curve

$$1.\quad f \equiv 3a_{122}x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass eine Curve III. O., deren Gleichung unter der allgemeinen Form 1. enthalten ist, den Punkt A_1 zum Rückkehrpunkt und die Achse A_1A_3 zur Rückkehrtangente hat.

Die HESSE'sche Curve hat dann die Gleichung

$$H \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_{122}x_2, & 0 \\ a_{122}x_2, & a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{223}x_3, & a_{223}x_2 + a_{233}x_3 \\ 0, & a_{223}x_2 + a_{233}x_3, & a_{233}x_2 + a_{333}x_3 \end{vmatrix} = 0;$$

diese Gleichung giebt entwickelt

$$H \equiv -a_{122}^2x_2^2(a_{233}x_2 + a_{333}x_3) = 0.$$

Die HESSE'sche Curve einer mit Rückkehrpunkt versehenen Curve

III. O. zerfällt also in die doppelt zu zählende Rückkehrtangente und in die durch den Rückkehrpunkt gehende Gerade

$$T = a_{233}x_2 + a_{333}x_3 = 0.$$

Legt man den Eckpunkt A_2 des Coordinatendreiecks auf die Gerade T, so muss $a_{233} = 0$ sein; in Bezug auf dieses Coordinatensystem lautet also die Gleichung der Curve III. O. mit Rückkehrpunkt:

2. $$f = 3a_{122}x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Wir bemerken, dass die Curve mit ihrer HESSE'schen Curve ausser den Rückkehrpunkt noch einen immer realen Punkt gemein hat, nämlich den Punkt, der sich aus $x_3 = 0$ und $f = 0$, also aus $x_3 = 0$ und $3a_{122}x_1 + a_{222}x_2 = 0$ bestimmt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Wendepunkt (Inflexionspunkt) einer Curve III. O. und Π auf der Wendetangente (d. i. auf der Tangente im Wendepunkt) gelegen, so muss die Gleichung $3\,[f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2] + f(\xi)\cdot\mu = 0$, durch welche der Begleiter der Tangente in $\mathfrak{P}$ bestimmt wird, die Wurzel $\mu = 0$ ergeben. Die Bedingung hierfür ist, dass $F = f_{11}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1^2 + 2f_{12}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_2 + 2f_{13}(\mathfrak{x})\cdot\xi_1\xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2^2 + 2f_{23}(\mathfrak{x})\cdot\xi_2\xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot\xi_3^2 = 0.$

Ausserdem erfüllt Π noch die Gleichung der Wendetangente

$$T = f_1(\mathfrak{x})\,\xi_1 + f_2(\mathfrak{x})\,\xi_2 + f_3(\mathfrak{x})\,\xi_3 = 0.$$

Beide Gleichungen können nur dann für unzählige Punkte Π zusammenbestehen, wenn F zwei Gerade darstellt, deren eine T ist. Zerfällt F in zwei Gerade, so verschwindet für die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{P}$ die Determinante

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

die Wendepunkte einer Curve III. O. liegen also auf der HESSE'schen Curve.

Umgekehrt: Jeder Schnittpunkt einer Curve III. O. mit ihrer HESSEschen Curve, der nicht Doppelpunkt ist, ist ein Wendepunkt. Denn ist $\mathfrak{P}$ ein solcher Punkt, so ist nach der Voraussetzung $f(\mathfrak{x}) = 0$ und $H(\mathfrak{x}) = 0$. Aus der letzteren Gleichung folgt, dass der Kegelschnitt F in zwei Gerade zerfällt; aus No. 1, 6 erkennt man, dass F den Punkt $\mathfrak{P}$ enthält. Die Gerade T berührt F in $\mathfrak{P}$. Der Doppelpunkt D der Curve F genügt den Gleichungen

$$F_1 = f_{11}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{12}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{13}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0,$$
$$F_2 = f_{12}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{22}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0,$$
$$F_3 = f_{13}(\mathfrak{x})\cdot x_1 + f_{23}(\mathfrak{x})\cdot x_2 + f_{33}(\mathfrak{x})\cdot x_3 = 0.$$

Nach No. 1, 5 ist $T = \mathfrak{x}_1F_1 + \mathfrak{x}_2F_2 + \mathfrak{x}_3F_3$. Hieraus folgt, dass D auf T enthalten ist. Wenn nun $\mathfrak{P}$ nicht Doppelpunkt von C''' ist, so werden von $\mathfrak{P}$ die Gleichungen $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ nicht erfüllt, also sind $\mathfrak{P}$ und D verschieden; folglich ist T ein Theil von F, d. i. jeder Punkt, der $T = 0$ erfüllt, genügt auch $F = 0$; folglich hat die Gleichung No. 1, 2 für jeden Punkt Π der Geraden T drei Wurzeln $\mu = 0$, w. z. b. w.

Eine Curve III. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunkt hat daher neun Wendepunkte; eine Curve III. O. mit Doppelpunkt hat drei Wendepunkte; eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt hat einen realen Wendepunkt.

8. Sind auf einer Geraden zwei Punkte A_1A_2 gegeben, so haben wir einem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden einen andern Punkt Π in Bezug auf A_1A_2 harmonisch zugeordnet, indem wir für die Verhältnisse μ_1 und μ_2, in welchem die Strecke

$\mathfrak{P}\Pi$ von den Punkten A_1 und A_2 getheilt wird, die Gleichung festsetzten

$$\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Hiervon ausgehend, ordnet man einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf n Punkte $A_1A_2\,..\,A_n$, die mit ihm auf einer Geraden liegen, die Punkte zu, für welche die Verhältnisse $\mu_1, \mu_2, \,..\, \mu_n$, in denen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von $A_1A_2\,..\,A_n$ getheilt wird, den Bedingungen genügen

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n = 0,$$
$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \ldots + \mu_{n-1}\mu_n = 0,$$
$$\Sigma\mu_a\mu_b\mu_c = 0, \quad \Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\mu_d = 0, \ldots . \quad \Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\ldots\mu_r = 0,$$

wobei für abc, $abcd$, ..., $abc\,..\,r$ alle Combinationen dritter, vierter, ... $(n-1)$ter Klasse aus den Zahlen 1, 2, 3 ... zu nehmen sind. Setzt man $PA_i = d_i$, $P\Pi = x$, so ist

$$\mu_i = \frac{PA_i}{A_i\Pi} = \frac{PA_i}{P\Pi - PA_i} = \frac{d_i}{x - d_i}.$$

Wird dies in $\Sigma\mu_a\mu_b\,..\,\mu_k = 0$ eingesetzt, so entsteht

$$\Sigma\frac{d_a}{x-d_a}\cdot\frac{d_b}{x-d_b}\cdot\frac{d_c}{x-d_c}\cdots\frac{d_k}{x-d_k} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)\ldots(x-d_n)$, so verschwindet in jedem Gliede der linken Seite der Nenner, und das Produkt $d_ad_b\ldots d_k$ wird mit dem Produkte von $n-k$ Differenzen $x-d_f$ multiplicirt. Die Gleichung 1. wird daher vom Grade $(n-k)$ in Bezug auf x, und wird folglich von $n-k$ Punkten Π erfüllt.

Die Gruppe der $(n-k)$ Punkte Π, welche der Gleichung genügen

$$\Sigma\mu_a\mu_b\mu_c\ldots\mu_k = 0,$$

nennt man die harmonischen Pole $(n-k)$ten Grades der Punkte $A_1A_2\,..\,A_n$ in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{P}$.

9. Besteht die Gruppe der Punkte A aus drei Punkten A_1, A_2, A_3, so giebt es zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ zwei harmonische Pole zweiten Grades und einen harmonischen Pol ersten Grades, die sich der Reihe nach aus den Gleichungen ergeben

1. $$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 0.$$

Dividirt man dieselben durch $\mu_1\mu_2\mu_3$, so entsteht

2. $$\frac{1}{\mu_2\mu_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_1} = 0, \quad \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1} = 0.$$

Nun sind $1:\mu_1$, $1:\mu_2$, $1:\mu_3$ die Theilverhältnisse $\Pi A_1 : A_1\mathfrak{P}\,\ldots$, also werden durch die Gleichungen 2. die harmonischen Pole ersten und zweiten Grades für den Punkt Π in Bezug auf die Punkte A_1, A_2, A_3 definirt. Hieraus folgt: Ist Π ein harmonischer Pol zweiten Grades von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ der harmonische Pol ersten Grades von Π; und umgekehrt: ist Π der harmonische Pol ersten Grades von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ ein harmonischer Pol zweiten Grades von Π.

Drückt man die Bedingungen 1. durch die Grössen x und d aus, so erhält man

3. $$d_1(x-d_2)(x-d_3) + d_2(x-d_3)(x-d_1) + d_3(x-d_1)(x-d_2) = 0,$$
4. $$d_1d_2(x-d_3) + d_2d_3(x-d_1) + d_3d_1(x-d_2) = 0.$$

Fällt $\mathfrak{P}$ mit einem der drei Punkte A, z. B. mit A_3 zusammen, so ist $d_3 = 0$, und die Gleichung 3. vereinfacht sich zu $d_1(x-d_2)\,x + d_2\cdot x(x-d_1) = 0$.

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0$, die andere folgt aus

$$d_1(x-d_2) + d_2(x-d_1) = 0;$$

durch diese Gleichung wird der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf das Punktpaar $A_1 A_2$, d. i. der vierte harmonische Punkt zu $A_1 A_2 \mathfrak{P}$ definirt. Die Gleichung 4. giebt für $d_3 = 0$ über in $x = 0$. Wir schliessen daher: Fällt der Punkt $\mathfrak{P}$ mit einem Punkte A_3 der Gruppe $A_1 A_2 A_3$ zusammen, so fällt von den harmonischen Polen zweiten Grades des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$ einer auf $\mathfrak{P}$, der andere ist der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1 A_2$; der harmonische Pol ersten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$ fällt mit $\mathfrak{P}$ zusammen.

Wenn zwei von den Punkten $A_1 A_2 A_3$ zusammenfallen, z. B. $A_2 \equiv A_3$, so ist $d_3 = d_2$ und diese Gleichung 3. erhält den Faktor $x - d_2$. Daher: Fallen zwei von den Punkten $A_1 A_2 A_3$ zusammen, so fällt für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ einer der beiden harmonischen Pole zweiten Grades mit den beiden Punkten zusammen. Ebenso folgt: Wenn die drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ in einen Punkt A zusammenfallen, so fallen für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene die beiden harmonischen Pole zweiten und der harmonische Pol ersten Grades auf A.

Ordnet man die Gleichungen 3. und 4. nach x, so erhält man

5. $$(d_1 + d_2 + d_3)\, x^2 - 2\,(d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2)\, x + 3\, d_1 d_2 d_3 = 0,$$

6. $$(d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2)\, x - 3\, d_1 d_2 d_3 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung 5. mit x_1 und x_2, so genügen daher die harmonischen Pole zweiten Grades den Gleichungen

7. $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right), \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_2} \cdot \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_3} \cdot \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1} \cdot \frac{1}{d_2}\right).$$

und für den harmonischen Pol ersten Grades erhält man

8. $$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right).$$

Hieraus folgt

9. $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Dies ergiebt: Der harmonische Pol ersten Grades eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ ist zugleich der harmonische Pol von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$.

9. Die Verhältnisse, in denen eine Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den drei Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve dritter Ordnung $f = 0$ getheilt wird, ergeben sich aus der Gleichung (No. 2)

$$f(\mathfrak{x}) + 3[f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3] \cdot \mu + 3\,[f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2 f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_2^3$$
$$+ 2 f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2^2 + 2 f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu^2 + f(\xi) \cdot \mu^3 = 0.$$

Ist Π ein harmonischer Pol zweiten Grades, so verschwindet die Summe der Wurzeln dieser Gleichung, so ist also

$$\varphi' \equiv f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1^2 + 2 f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2 f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(\mathfrak{x})\, \xi_2^2 + 2 f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 \xi_3$$
$$+ f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3^2 = 0.$$

Der Ort der harmonischen Pole zweiten Grades, die zu einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Schnittpunkte der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahlen mit der cubischen Curve $f = 0$ gehören, ist also der Kegelschnitt $\varphi' = 0$.

Dieser Kegelschnitt heisst die erste oder die conische Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Ist Π der harmonische Pol ersten Grades, so verschwindet die Summe der Produkte je zweier der drei Wurzeln μ der obigen cubischen Gleichung, es ist daher $\varphi'' \equiv f_1(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_2(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_3(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 = 0$.

Der Ort der harmonischen Pole ersten Grades, die zu einem Punkte $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Schnittpunkte der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahlen mit der cubischen Curve $f = 0$ gehören, ist somit die Gerade $\varphi'' = 0$.

Diese Gerade heisst die zweite oder die gerade Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Nach dem letzten Satze der vorigen Nummer ist die gerade Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung zugleich die Polare dieses Punktes in Bezug auf die erste Polare desselben Punktes.

10. Legt man von $\mathfrak{P}$ eine Tangente an f, und ist A der Berührungspunkt und A_1 sein Begleiter, so fällt einer der harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den doppelt zu zählenden Punkt A und den Punkt A_1 mit A zusammen; die erste Polare von $\mathfrak{P}$ geht also durch A. Und umgekehrt: Verbindet man einen nicht auf f gelegenen Punkt $\mathfrak{P}$ mit einem Schnittpunkte A_3 der Curve f und der ersten Polaren φ' des Punktes $\mathfrak{P}$, so fällt in A_3 einer der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}A_3$ und f mit einem harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf diese drei Schnittpunkte zusammen; wenn nun die Gleichung

$$d_1\,(x - d_2)(x - d_3) + d_2\,(x - d_3)(x - d_1) + d_3\,(x - d_1)(x - d_2) = 0,$$

welche die harmonischen Pole zweiten Grades liefert, eine Wurzel $x = d_3$ enthält, so folgt $d_3\,(d_3 - d_1)(d_3 - d_2) = 0$. Da nun nach der Voraussetzung $\mathfrak{P}$ nicht auf f liegt, so ist $d_3 \gtrless 0$, folglich ist entweder $d_3 = d_1$, oder $d_3 = d_2$, es fallen also zwei Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}A_3$ und der Curve f in A_3 zusammen, die Curve f wird von $\mathfrak{P}A_3$ in A_3 berührt.

Wir haben daher den Satz: Die Tangenten, die von einem Punkte ausserhalb einer Curve III. O. an die Curve gelegt werden, berühren dieselbe in den Schnittpunkten mit den ersten Polaren des Punktes. Von jedem Punkte der Ebene aus, der nicht auf der Curve liegt, lassen sich daher im Allgemeinen sechs Tangenten an eine Curve III. O. legen.

Eine Ausnahme hiervon tritt ein, wenn die Curve f einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt hat. Für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene geht die erste Polare durch den Doppelpunkt; da nun in dem Doppelpunkte zwei Schnittpunkte von f und φ' zusammenfallen, so bleiben vier weitere Schnittpunkte von f und φ' übrig. Hat also eine Curve III. O. einen Doppelpunkt, so lassen sich von jedem Punkte, der nicht auf der Curve liegt, nur vier Tangenten an die Curve legen.

Hat die Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, und wählt man dasselbe Coordinatensystem wie in No. 6, 2, so ergiebt sich für die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ die Gleichung

$$\varphi' \equiv 2 a_{122} \mathfrak{x}_2 \cdot x_1 x_2 + (a_{122} \mathfrak{x}_1 + a_{222} \mathfrak{x}_2 + a_{223} \mathfrak{x}_3) \cdot x_2^2 + 2 a_{223} \mathfrak{x}_2 x_2 x_3$$
$$+ a_{333} \mathfrak{x}_3 \cdot x_3^2 = 0.$$

Setzt man hierin $x_2 = 0$, so folgt $x_3^2 = 0$; hieraus ersieht man, dass φ' die Rückkehrtangente $A_1 A_3$ im Rückkehrpunkte A_1 berührt.

Hat also eine Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, so geht die erste Polare jedes Punktes der Ebene durch denselben und berührt die Rückkehrtangente.

Ferner ergiebt sich die Identität $3 x_2 \varphi' - 2 \mathfrak{x}_2 f$

$$\equiv (3 a_{122} \mathfrak{x}_1 + a_{222} \mathfrak{x}_2 + 3 a_{223} \mathfrak{x}_3)\, x_3'^2 + 3 a_{333} \mathfrak{x}_3 x_2 x_3^2 - 2 a_{333} \mathfrak{x}_2 x_3^3 = 0.$$

Für die Punkte, für welche die rechte Seite und f verschwindet, ist auch

$\varphi' = 0$. Wir schliessen hieraus: Eine Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt hat mit der ersten Polaren jedes Punktes ausser dem Rückkehrpunkte drei Punkte gemein. Hat eine Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, so lassen sich von jedem Punkte der Ebene aus drei Tangenten an die Curve legen.

Liegt $\mathfrak{P}$ auf der Curve f, so wird die Gleichung der geraden Polaren mit der Gleichung der Curventangente in $\mathfrak{P}$ identisch; die Gleichung φ' wird alsdann von $\mathfrak{P}$ erfüllt, und da φ'' die Polaren von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf φ' ist, so ergiebt sich: Die erste Polare eines Punktes der Curve $f = 0$ berührt die Curve in diesem Punkte. Zugleich folgt: An eine Curve III. O. ohne Doppel- und Rückkehrpunkt lassen sich von einem Punkte der Curve aus vier Tangenten legen; an eine Curve III. O. mit Doppelpunkt lassen sich von einem Punkte der Curve aus zwei Tangenten legen; an eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt lässt sich von einem Punkte der Curve aus eine Tangente legen.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Wendepunkt der Curve f, so zerfällt (No. 6) die erste Polare von $\mathfrak{P}$ in zwei Gerade, deren eine die Wendetangente ist; daher folgt: Von einem Wendepunkte einer Curve III. O. aus lassen sich (ausser der Wendetangente) noch drei oder eine Tangente an die Curve legen, je nachdem die Curve ohne Doppelpunkt ist oder nicht.

11. Die erste Polare φ' eines Punktes $\mathfrak{P}$ zerfällt in zwei Gerade, wenn die Hesse'sche Determinante H für die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ verschwindet, also wenn $\mathfrak{P}$ auf der Hesse'schen Curve $H = 0$ liegt. Die Coordinaten des Doppelpunkts von φ' erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{11}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{12}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{22}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{13}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_1 + f_{23}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_2 + f_{33}(\mathfrak{x}) \cdot \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichungen nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, so erhält man (vergl. No. 1, 4)

$$\begin{aligned} f_{11}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_1 + f_{12}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_2 + f_{13}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_3 &= 0, \\ f_{12}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_1 + f_{22}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_2 + f_{23}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_3 &= 0, \\ f_{13}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_1 + f_{23}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_2 + f_{33}(\xi) \cdot \mathfrak{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass für die Coordinaten des Doppelpunkts von φ' ebenfalls die Determinante H verschwindet. Wir schliessen daher: Der Ort der Punkte, deren erste Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung f in zwei Gerade zerfallen, sowie der Ort der Doppelpunkte der zerfallenden Polaren ist die Hesse'sche Curve der Curve f.

12. Aus dem ersten Satze in No. 9 folgt: Ist φ' die erste Polare von $\mathfrak{P}$, so gehen die geraden Polaren aller auf φ' liegenden Punkte durch $\mathfrak{P}$, und die Pole der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden (d. i. die Punkte, welche diese Linien zu geraden Polaren haben) liegen auf φ'.

Ist φ_1' die erste Polare von A_1, φ_2' die erste Polare von A_2, und B ein Schnittpunkt von φ_1' und φ_2', so geht die gerade Polare von B durch A_1 und durch A_2, ist also die Gerade A_1A_2. Sind $x_{\varkappa 1}$ und $x_{\varkappa 2}$ die Coordinaten von A_1 und A_2, so hat irgend ein Punkt P auf A_1A_2 die Coordinaten

$$x_\varkappa = \frac{\lambda_1 x_{\varkappa 1} + \lambda_2 x_{\varkappa 2}}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

daher ist die Gleichung der ersten Polaren von P: $\varphi' \equiv \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = 0$.

Wir schliessen: Es giebt vier Punkte, welche eine gegebene Gerade zur Polaren haben. Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden

bilden ein mit dieser Punktreihe projectives Kegelschnittbüschel, dessen Träger die Pole der Geraden sind.

13. Besteht eine Curve III. O. aus drei Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen, und nimmt man die Geraden zu Coordinatenachsen, so ist die Gleichung des Vereins dieser drei Geraden $f \equiv 6\,x_1x_2x_3 = 0$, wobei der Faktor 6 hinzugefügt worden ist, um Uebereinstimmung mit der allgemeinen Form der cubischen Gleichung zu haben. Für diese Function f ist

$$f = 2x_2x_3\,, \quad f = 2x_1x_3\,, \quad f_3 = 2x_1x_2\,,$$

$$f_{11} = 0\,, \quad f_{12} = x_3\,, \quad f_{13} = x_2\,, \quad f_{22} = 0\,, \quad f_{23} = x_1\,, \quad f_{33} = 0.$$

Die Gleichungen der ersten Polaren und der geraden Polaren eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die aus den Seiten des Achsendreiecks bestehende cubische Curve sind daher

$$\varphi' \equiv \mathfrak{x}_1 \cdot x_2x_3 + \mathfrak{x}_2 \cdot x_3x_1 + \mathfrak{x}_3 \cdot x_1x_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3}\,\varphi'' \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0.$$

Beide Polaren lassen sich leicht construiren. Setzt man in φ'' die Coordinate $x_1 = 0$, so erhält man

$$T_1 \equiv \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer durch A_1 gehenden Geraden; mithin die Gleichung der Geraden, die A_1 mit dem Punkte verbindet, in welchem φ'' die Dreieckseite A_2A_3 schneidet.

Ebenso erhält man, dass die Strahlen, die A_2 und A_3 mit den Schnittpunkten der Polaren φ'' und der gegenüberliegenden Seite des Coordinatendreiecks verbinden, die Gleichungen haben

$$T_2 \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0\,, \quad T_3 \equiv \frac{x_1}{\mathfrak{x}_1} + \frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} = 0.$$

Den Achsen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und der Geraden T_1 ist die Gerade $A_1\mathfrak{P}$ harmonisch zugeordnet; denn die Gleichung von $A_1\mathfrak{P}$ ist

$$\frac{x_2}{\mathfrak{x}_2} - \frac{x_3}{\mathfrak{x}_3} = 0;$$

ebenso ist $A_2\mathfrak{P}$ der vierte harmonische Strahl zu $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und T_2, sowie $A_3\mathfrak{P}$ harmonisch zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und T_3.

Um daher die gerade Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf ein Dreieck $A_1A_2A_3$ zu construiren, verbindet man $\mathfrak{P}$ mit A_1 und A_2, construirt zu A_1A_2, A_1A_3, $A_1\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen Strahl T_1, sowie zu A_2A_1, A_2A_3, $A_2\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen T_2 und verbindet die Punkte, in denen A_2A_3 und A_1A_3 von T_1 und T_2 geschnitten werden; diese Gerade ist die gesuchte Polare.

Die erste Polare φ' geht durch die Ecken des Coordinatendreiecks. Die Gleichung der Tangente an φ' im Punkte II ist

$$(\mathfrak{x}_2 \cdot \xi_3 + \mathfrak{x}_3 \cdot \xi_2)\,x_1 + (\mathfrak{x}_3 \cdot \xi_1 + \mathfrak{x}_1 \cdot \xi_3)\,x_2 + (\mathfrak{x}_1 \cdot \xi_2 + \mathfrak{x}_2 \cdot \xi_1)\,x_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Tangenten, welche in A_1, A_2, A_3 berühren, sind daher

$$\mathfrak{x}_3x_2 + \mathfrak{x}_2x_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_1x_3 + \mathfrak{x}_3x_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_2x_1 + \mathfrak{x}_1x_2 = 0;$$

dies sind aber der Reihe nach die Geraden T_1, T_2, T_3. Die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ wird also erhalten, indem man T_1 und T_2 construirt, und den Kegelschnitt zeichnet, der durch $A_1A_2A_3$ geht und T_1 und T_2 berührt.

14. Diese Constructionen lehren zugleich, wie man für einen Punkt $\mathfrak{P}$ in Bezug auf drei mit $\mathfrak{P}$ auf einer Geraden T gelegene Punkt ABC die

beiden harmonischen Pole zweiten Grades und den harmonischen Pol ersten Grades findet. Man ziehe durch ABC drei Gerade S_1, S_2, S_3, die nicht durch einen Punkt gehen, und construire die Schnittpunkte der Geraden T mit der ersten Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Geraden S_1, S_2, S_3; diese Schnittpunkte sind die gesuchten harmonischen Pole zweiten Grades; ferner construire man die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf S_1, S_2, S_3; diese schneidet T in dem gesuchten harmonischen Pole ersten Grades.

15. Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ zwei Gerade und nimmt auf jeder derselben drei Punkte an A, B, C und A', B', C', so hat $\mathfrak{P}$ für alle cubischen Curven, die durch diese sechs Punkte gehen, dieselbe gerade Polare, denn diese ist die Verbindungslinie der harmonischen Pole ersten Grades für den Punkt $\mathfrak{P}$ in Bezug auf ABC und $A'B'C'$. Die einfachsten Curven III. O., die sich durch die sechs Punkte legen lassen, sind die sechs Vereine von drei Geraden, welche die Punkte paarweis verbinden, z. B. der Verein der Geraden AA', BB', CC'. Um daher die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve III. O. $f = 0$ zu construiren, verbinden wir $\mathfrak{P}$ mit zwei bekannten Punkten A und A' der Curve f und construiren die beiden übrigen Schnittpunkte von f mit der Geraden $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}A'$; diese Punkte BC und $B'C'$ werden durch gerade Linien und Kreise nach § 15, No. 13 gefunden. Unter Anwendung des Lineals allein bestimmt man nun die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die drei Geraden AA', BB', CC' (oder AB', BA', CC' u. s. w.); diese ist die gesuchte Linie.

16. Die erste Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ für eine Curve III. O. $f = 0$ wird in folgender Weise gefunden:

Man verbinde $\mathfrak{P}$ mit drei bekannten Punkten A, A', A'' der Curve f und bestimme die Punktpaare BC, $B'C'$, $B''C''$ in welchen f von den Strahlen $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}A'$, $\mathfrak{P}A''$ noch geschnitten wird. Hierauf ziehe man AA', BB', CC' (oder AB', BA', CC' u. s. w.) und construire die zwei Paar Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}A'$ mit der ersten Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Verein von Geraden AA', BB', CC'; durch diese vier Punkte geht die gesuchte erste Polare. Zieht man nun $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, so geht die erste Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf diese drei Geraden durch die schon bekannten beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Punkte $A'B'C'$ und durch die Schnittpunkte der Geraden $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, ist also durch diese fünf Punkte bestimmt; construirt man hiernach die Schnittpunkte dieser Polaren mit $\mathfrak{P}A''$, so hat man nun auch die beiden harmonischen Pole zweiten Grades von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $A''B''C''$, also noch zwei Punkte der gesuchten ersten Polaren von $\mathfrak{P}$ für f, die nun durch im Ganzen sechs Punkte mehr als ausreichend bestimmt ist.

§ 17. Construction von Curven dritter Ordnung mit Doppel- und Rückkehrpunkt.

1. Eine Curve III. O. mit Doppelpunkt wollen wir durch C_δ, eine Curve III. O. mit Rückkehrpunkt durch C_ρ bezeichnen.

Ist $f \equiv \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l = 0$ die Gleichung einer C_δ, und sind die Coordinaten $\xi_\varkappa$ des Doppelpunktes Π gegeben, so bestehen die Gleichungen

1. $a_{111}\xi_1^2 + 2a_{112}\xi_1\xi_2 + 2a_{113}\xi_1\xi_3 + a_{122}\xi_2^2 + 2a_{123}\xi_2\xi_3 + a_{133}\xi_3^2 = 0,$
2. $a_{112}\xi_1^2 + 2a_{122}\xi_1\xi_2 + 2a_{123}\xi_1\xi_3 + a_{222}\xi_2^2 + 2a_{223}\xi_2\xi_3 + a_{233}\xi_3^2 = 0,$
3. $a_{113}\xi_1^2 + 2a_{123}\xi_1\xi_2 + 2a_{133}\xi_1\xi_3 + a_{223}\xi_2^2 + 2a_{233}\xi_2\xi_3 + a_{333}\xi_3^2 = 0.$

Durch jeden weiteren Punkt der Curve ist noch eine homogene lineare

Gleichung der Coefficienten gegeben, wir brauchen daher ausser dem Doppelpunkte noch sechs weitere Punkte, um die Coefficientenverhältnisse

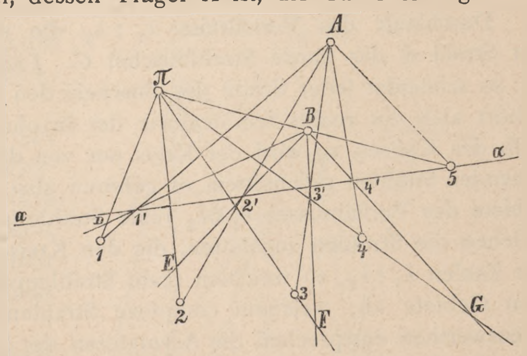
$$a_{111} : a_{112} : \ldots\ldots : a_{233} : a_{333}$$

eindeutig zu bestimmen. Eine C_δ ist daher durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte bestimmt.

2. Zieht man durch einen beliebigen Punkt A einer C_δ zwei Strahlen T_1, T_2, welche die Curve ausserdem in B_1C_1 und B_2C_2 schneiden, so wie einen dritten Strahl T_3, und hebt einen weiteren Schnittpunkt B_3 desselben mit der Curve hervor; zieht die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2', durch welche B_1C_1 und B_2C_2 mit dem Doppelpunkte Π verbunden werden, sowie den Strahl S_3, der von Π nach B_3 geht; so ist durch die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2' eine quadratische Strahleninvolution bestimmt. Setzt man nun das Strahlbüschel des Punktes A mit dieser Involution derart in projective Beziehung, dass T_1 dem Strahlenpaare S_1S_1', T_2 dem Paare S_2S_2' und T_3 dem Paare entspricht, zu welchem S_3 gehört, so ist dadurch die Projectivität des Strahlbüschels und der Involution vollständig bestimmt.

Der Ort der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels mit den entsprechenden Strahlenpaaren der Involution ist (§ 15, No. 14) eine Curve III. O., die den Träger der Involution zum Doppelpunkte hat, und durch den Träger des Strahlbüschels geht; diese Ortscurve hat daher ausser dem Doppelpunkte noch die sechs Punkte A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3 mit der gegebenen Curve C_δ gemein, folglich ist sie (No. 1) mit C_δ identisch. Wir schliessen hieraus: Eine C_δ kann in unendlich vielfacher Weise durch eine Strahleninvolution, deren Träger der Doppelpunkt ist, und ein projectives Strahlbüschel erzeugt werden; jeder einfache Punkt der Curve kann zum Träger des Strahlbüschels genommen werden. Ferner: Die Punktpaare, in welchen eine C_δ durch die Strahlen eines Büschels geschnitten wird, dessen Träger auf der Curve liegt, werden vom Doppelpunkte aus durch die Strahlenpaare einer Involution projicirt, die mit dem Strahlenbüschel projectiv ist.

3. Um eine C_δ aus dem Doppelpunkte Π und sechs weiteren Punkten 1, 2, 3, 4, 5, A zu construiren, stellt man die Involution her, die mit dem projectiven Strahlbüschel, dessen Träger A ist, die Curve erzeugt.



(M. 426.)

Schneidet man das Strahlbüschel durch eine Gerade α, die durch 5 geht und die nach 1, 2, 3, 4 gehenden Strahlen in 1', 2', 3', 4' trifft, und projicirt man diese Punkte von einem auf der Geraden $\Pi 5$ gelegenen Punkte B aus, so ist das Büschel B projectiv mit dem Büschel A, also auch mit der gesuchten Involution. Der Strahl $B5$ entspricht dem Paare der Involution, zu welchem $\Pi 5$ gehört; da nun B auf $\Pi 5$ liegt, so befinden sich die Involution Π und das Büschel B in reducirter Lage (§ 15, No. 15), erzeugen also keine eigentliche Curve III. O., sondern eine, die in die Gerade ΠB und einen durch Π gehenden Kegelschnitt K zerfällt. Von diesem Kegelschnitte sind nun fünf Punkte bekannt:

Π, und die Punkte D, E, F, G, in denen die Strahlen $\Pi 1$, $\Pi 2$, $\Pi 3$, $\Pi 4$ von $B1'$, $B2'$, $B3'$, $B4'$ geschnitten werden. Hierdurch ist derselbe bestimmt.

Um nun die gesuchte C_3 zu vervollständigen, d. i. um den Punkt zu erhalten, der auf einem beliebigen durch Π gezogenen Strahle S liegt, bestimme man nach dem Pascal'schen Satze den Punkt H, in welchem K von S zum zweiten Male getroffen wird, verbinde H mit B, und zeichne den Strahl des Büschels A, der BH entspricht; dieser trifft S in dem gesuchten Curvenpunkte.

4. Einem Strahle des Büschels A, der an dem Doppelpunkte Π unendlich nahe vorbei geht, entspricht ein Paar der Involution, dessen Strahlen die C_3 in Punkten treffen, die dem Doppelpunkte nächst benachbart sind. Die Doppelpunktstangenten sind daher das Strahlenpaar der Involution, das dem nach dem Doppelpunkte gehenden Strahle des Büschels A entspricht.

Nähert sich ein Strahl eines Strahlenpaares der Involution dem Punkte A, so nähert sich einer von den Schnittpunkten des dem Paare entsprechenden Strahles und der Curve dem Punkte A. Die Tangente an die C_3 im Punkte A entspricht daher dem Strahlenpaare der Involution, auf welchem A liegt.

Diese Bemerkungen geben die Auflösung der beiden Aufgaben: Eine Curve C_3 ist durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben; man soll die Doppelpunktstangenten und die Tangenten der Curve in einem gegebenen Punkte derselben construiren.

5. Sind $S_1S_1' = 0$, $S_2S_2' = 0$, $S_3S_3' = 0$ drei Strahlenpaare einer Involution, so hat man $S_3S_3' = a_1S_1S_1' + a_2S_2S_2'$. Die Gleichung jedes andern Paares kann dann geschrieben werden

$$SS' = \lambda_1 a_1 S_1 S_1' + \lambda_2 a_2 S_2 S_2' = 0.$$

Es kann sich ereignen, dass für gewisse Werthe des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ das Paar SS' aus conjugirt complexen Geraden besteht, von denen nur der Träger Π der Involution real ist. Legt man durch Π einen Kreis K, und verbindet die Punkte, in welchen der Kreis von S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3', SS' geschnitten wird, durch die Strahlen R_1, R_2, R_3, R, so schneiden diese sich in einem Punkte C und bilden ein der Involution projectives Büschel; hat man also $R_3 = b_1R_1 + b_2R_2$, so ist die Gleichung des Strahles R

$$R = \lambda_1 b_1 R_1 + \lambda_2 b_2 R_2 = 0.$$

Durchläuft das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ die reale Zahlenreihe, so beschreibt der Strahl R das ganze Strahlbüschel C. Liegt nun C im Innern des Kreises K, so schneidet jeder Strahl des Büschels den Kreis, jedem Werthe von $\lambda_1 : \lambda_2$ gehört also ein reales Strahlenpaar der Involution zu; liegt hingegen C ausserhalb des Kreises, so wird der Kreis nur von dem kleineren Theile der durch C gehenden Strahlen geschnitten, es gehören also nur zu einem bestimmten Werthgebiete des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ reale Strahlenpaare. Die Werthe von $\lambda_1 : \lambda_2$, welchen die Strahlen zugehören, die den Kreis K berühren, grenzen das Gebiet der Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$, zu welchem reale Strahlenpaare der Involution gehören, von dem Gebiete ab, welchem complexe Strahlenpaare zugehören; diesen beiden Grenzwerthen entsprechen die Asymptoten der Involution. Wir schliessen daher: Ist ein Strahlbüschel mit einer quadratischen Strahleninvolution projectiv, und hat die Involution keine realen Asymptoten, so entspricht jedem Strahle des Büschels ein reales Strahlenpaar der Involution. Hat die Involution reale Asymptoten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$, so construire man die ihnen entsprechenden Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ des projectiven

Büschels; diese Strahlen theilen die Ebene in zwei Paar Scheitelwinkel; den Strahlen, welche durch das eine dieser beiden Paare gehen, entsprechen reale Paare, denen, die durch das andere Paar Scheitelwinkel gehen, entsprechen conjugirt complexe Strahlenpaare der Involution.

Die Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ werden die Verzweigungsstrahlen des Strahlbüschels C in Bezug auf die projective Involution Π genannt.

6. Hat man (nach No. 3) ein Strahlbüschel und die dazu projective Involution, durch welche eine C_3 erzeugt wird, so kann es sich ereignen, dass die Involution reale Asymptoten hat, und dass der Doppelpunkt Π zwischen den Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ des Strahlbüschels in einem der beiden Scheitelwinkel liegt, durch welche die Strahlen gehen, denen complexe Strahlenpaare entsprechen. In diesem Falle hat die C_3 keine realen Doppelpunktstangenten; und da keiner der Strahlen des Büschels, welche durch das Winkelfeld gehen, in welchem Π liegt, die C_3 schneidet — denn keinem entspricht ein reales Strahlenpaar der Involution — so hat die Curve in der Umgebung des Doppelpunktes keine realen Punkte. In diesem Falle bezeichnet man den Doppelpunkt als isolirten Punkt.

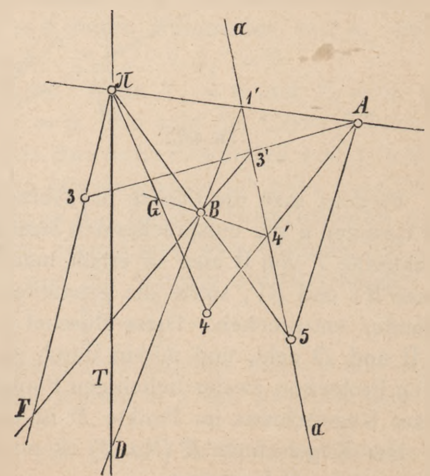
Die Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ berühren die C_3 in den Schnittpunkten mit den ihnen entsprechenden Asymptoten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ der Involution.

Hat eine C_3 einen isolirten Punkt, und wählt man der Reihe nach alle Punkte der Curve zu Trägern eines Strahlbüschels und bestimmt die zugehörige Involution, welche mit dem Büschel die C_3 erzeugt, so muss jede solche Involution reale Asymptoten haben und Π immer in dem Gebiete zwischen den Verzweigungsstrahlen liegen, dessen Strahlen keine realen Strahlenpaare der Involution entsprechen. Wir schliessen daher: Hat eine Curve III. O. einen isolirten Punkt, so gehen von jedem Punkte der Curve aus zwei reale Tangenten an die Curve (ausser der Geraden, welche die C_3 in dem Punkte selbst berührt).

7. Liegt der Träger Π einer quadratischen Strahleninvolution auf einem der beiden Verzweigungsstrahlen $\mathfrak{X}$ eines projectiven Strahlbüschels, so fallen die Doppelpunktstangenten der durch das Büschel und die Involution erzeugten C_3, die dem nach Π gehenden Strahle $\mathfrak{X}$ entsprechen, in eine Asymptote $\mathfrak{S}$ der Involution zusammen. Die Curve III. O. hat also in diesem Falle Π zum Rückkehrpunkte und $\mathfrak{S}$ zur Rückkehrtangente.

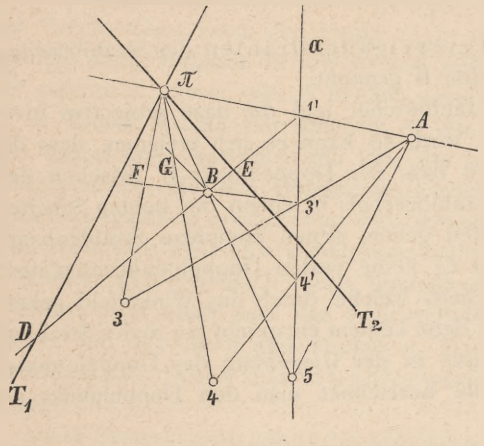
8. Sind von einer Curve C_3 der Rückkehrpunkt Π, die Rückkehrtangente T und vier weitere Punkte 3, 4, 5, A gegeben, so kann die Curve in wesentlich derselben Weise construirt werden, wie eine durch den Doppelpunkt und sechs Punkte bestimmte C_3.

Dem Strahle $A\Pi$ entspricht die Rückkehrtangente T, mithin entspricht dieser im Büschel B der nach dem Schnitte von ΠA und α gehende Strahl $B1'$. Da diesem Strahle die Asymptote T der



(M. 427.)

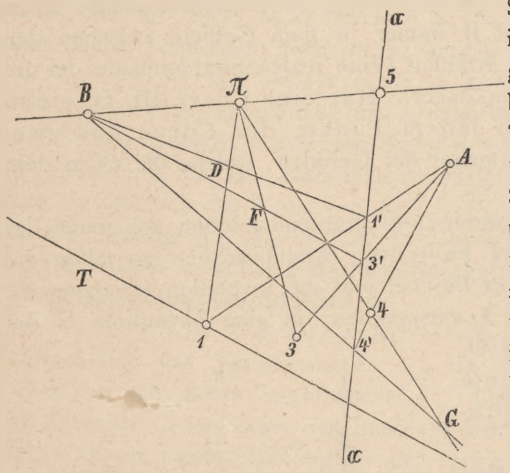
Involution Π entspricht, so wird der von der Involution und dem Büschel B erzeugte Kegelschnitt K von dem Strahle $B1'$ in D berührt. Der Kegelschnitt K ist daher durch die vier Punkte Π, D, F, G und durch die Tangente DB im Punkte D bestimmt.



(M. 428.)

9. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π, den Doppelpunktstangenten T_1, T_2 und vier weiteren Punkten 3, 4, 5, A zu construiren, verfährt man ebenfalls nach No. 3; nur treten jetzt der Strahl AΠ an die Stelle der beiden Strahlen $A1$, $A2$, und die Geraden T_1, T_2 für die Geraden Π1, Π2 ein.

10. Eine C_3 kann aus dem Doppelpunkte Π, einem Punkte und der Tangente in demselben und aus vier weiteren Punkten nach folgendem Verfahren construirt werden, welches auch noch anwendbar bleibt, wenn von der C_3 ausser Π vier Punkte und die Tangenten in zweien derselben, oder drei Punkte und die Tangenten in denselben gegeben sind. Stellt man dieselbe Figur her, wie in No. 3, so fallen diesmal zwei gegebene Punkte auf 1 und den nächst benachbarten Punkt der gegebenen Tangente T; diesen gehören zwei unendlich nahe an $B1'$ benachbarte Strahlen des Büschels B und zwei unendlich nahe an Π1 gelegene Gerade durch Π zu. Diese beiden Paare zugehöriger Geraden des Büschels B und der Involution Π schneiden sich in zwei unendlich nahen bei D liegenden Punkten; es kommt nur darauf an, die Gerade S zu finden, auf der sie liegen, diese wird dann die Tangente des Kegelschnitts K im Punkte D sein.

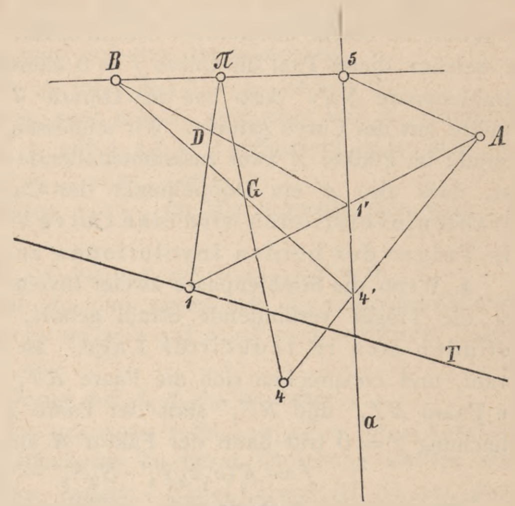


(M. 429.)

Projicirt man die Punkte der Geraden T von A aus, und construirt mit Hülfe der Geraden α die entsprechenden Strahlen von B, und projicirt sodann auch die Punktreihe T von Π aus, so erhält man zwei projective Strahlbüschel Π und B, in denen Π1 und $B1'$, sowie die genannten diesen beiden unendlich nahen Strahlen einander entsprechen. Diese Büschel erzeugen einen Kegelschnitt Γ, der durch B, Π und D geht, und mithin durch zwei weitere Punkte bestimmt ist, die man durch Projection zweier beliebigen Punkte der Geraden T gewinnt. Die Tangente dieses Kegelschnitts im Punkte D ist die gesuchte Gerade S.

Der Kegelschnitt K (No. 3) ist nun durch die Punkte Π, D, F, G und die Tangente in D bestimmt.

11. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π, einem Wendepunkte 1, der zugehörigen Wendetangente T und zwei weiteren Punkten 4 und 5 zu construiren, hat man die Construction No. 3 dem Umstande entsprechend zu verändern, dass diesmal drei Punkte 1, 2, 3 in 1 zusammenfallen. Construirt man, wie in No. 10, den Kegelschnitt Γ, so hat dieser mit K im Punkte D drei unendlich nahe Punkte gemein, Γ und K berühren sich also in D dreipunktig. Die Kegelschnitte Γ und K haben vier Punkte gemein, nämlich Π und die drei in D zusammenfallenden Punkte. Durch diese vier Punkte geht auch das Geradenpaar M, das aus der von Π nach einem der drei Punkte bei D gehenden Geraden ΠD und aus der Verbindungslinie der beiden andern Punkte, d. i. aus der Geraden S besteht, die Γ in D berührt.



(M. 430.)

Der Kegelschnitt K kann nun als der durch G gehende Kegelschnitt des von Γ und M bestimmten Kegelschnittbüschels construirt werden.*)

§ 18. Correspondirende Punkte einer Curve dritter Ordnung.

1. Sind T_1T_1', T_2T_2', T_3T_3' drei Strahlenpaare einer quadratischen Involution, und S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3' die entsprechenden Paare einer projectiven Involution, und ist

$$T_3T_3' = a_1T_1T_1' + a_2T_2T_2', \quad S_3S_3' = b_1S_1S_1' + b_2S_2S_2',$$

so entsprechen sich die Paare

$$TT' \equiv \lambda_1 a_1 \cdot T_1T_1' + \lambda_2 a_2 \cdot T_2T_2' = 0 \text{ und } SS' \equiv \lambda_1 b_1 \cdot S_1S_1' + \lambda_2 b_2 \cdot S_2S_2' = 0.$$

Die Punkte, in denen sich entsprechende Paare schneiden, genügen der Gleichung, die aus $TT' = 0$ und $SS' = 0$ durch Elimination von λ_1 und λ_2 hervorgeht $f \equiv a_1b_2 \cdot T_1T_1' \cdot S_2S_2' - a_2b_1 \cdot T_2T_2' \cdot S_1S_1' = 0$.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade. Wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, oder wenn $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$, so ist auch $f = 0$, also geht die Curve f durch die Träger der beiden Involutionen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare zweier projectiven Involutionen ist also eine Curve vierter Ordnung, die durch die Träger der beiden Involutionen geht.

2. Die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve $n$ter Ordnung mit einer Geraden $T \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ sind die Wurzeln der Gleichungen

$$f = 0, \quad T = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Aus den letzten beiden linearen Gleichungen ergeben sich x_2 und x_3 als lineare Functionen von x_1; setzt man diese Werthe in f ein, so erhält man eine

*) Ueber Curven III. O. mit Doppelpunkt vergl. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Leipzig 1869.

Gleichung $n$ten Grades, die nur die Unbekannte x_1 enthält. Zu jeder der n Wurzeln dieser Gleichung erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung die zugehörigen Werthe von x_2 und x. Dies ergiebt: Eine Curve $n$ter Ordnung wird von einer Geraden in n Punkten geschnitten.

3. Jede durch den Träger A der ersten Involution (No. 1) gehende Gerade T gehört zu einem bestimmten Strahlenpaare TT' dieser Involution; die Punkte, in welchen dieses Paar die Curve $f = 0$ schneidet, liegen auf dem entsprechenden Strahlenpaare SS'. Also hat die Gerade T ausser dem Punkte A noch zwei Punkte mit der Curve gemein. Wir schliessen hieraus, dass jede durch A gehende Gerade im Punkte A zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve $f = 0$ hat, dass also A ein Doppelpunkt der Curve ist. Durch zwei projective Strahleninvolutionen wird eine Curve vierter Ordnung erzeugt, welche die Träger der beiden Involutionen zu Doppelpunkten hat.

4. Wenn die Strahlenpaare zweier Involutionen sich entsprechen, zu welchen der die Träger verbindende Strahl gehört, so sagt man, die Involutionen befinden sich in reducirter Lage. Ist R der durch die Träger gehende Strahl, und entsprechen sich die Paare RT_1' und RS_1', so kann man in No. 1 die Paare RT_1' und RS_1' statt der Paare T_1T_1' und S_1S_1' nehmen. In der Gleichung $f = 0$ tritt dann der Faktor R auf, indem man hat

$$f = R(a_1b_2T_1' \cdot S_2S_2' - a_2b_1T_2T_2' \cdot S_1').$$

Die Curve vierter Ordnung f zerfällt also in die Gerade $R = 0$ und in die Curve III. O.

$$\varphi = a_1b_2T_1'S_2S_2' - a_2b_1T_2T_2'S_1' = 0.$$

Der Gleichung $\varphi = 0$ wird genügt, wenn $T_1' = 0$ und $T_2 = 0$, sowie wenn $S_2 = 0$ und $S_1' = 0$, also geht die Curve φ durch die Träger der beiden Involutionen. Jede durch einen der beiden Träger gehende Gerade hat ausser dem Träger noch zwei, im Ganzen also drei im Allgemeinen von einander getrennte Punkte mit der Curve φ gemein. Wir schliessen daher: Zwei projective Strahleninvolutionen in reducirter Lage erzeugen eine Curve III. O., welche die Träger der Involutionen zu einfachen Punkten hat.

5. Die Gerade R kann als die durch A gehende Gerade aufgefasst werden, die unendlich nahe am Träger B der andern Involution vorbeigeht. Sie schneidet daher den Strahl S_1', der zu dem RT_1' entsprechenden Paare gehört, in einem unendlich nahe bei B liegenden Punkte. Da dieser Punkt, als ein Durchschnittspunkt der Paare RT_1' und RS_1', auf φ liegt, so folgt, dass die Gerade S_1' die Curve φ im Punkte B berührt. Ebenso folgt, dass φ von T_1' in A berührt wird. Die beiden Strahlen T_1' und S_1' schneiden sich auf der Curve φ; dies ergiebt: Die Träger zweier projectiven Involutionen in reducirter Lage haben auf der von den Iuvolutionen erzeugten Curve III. O. denselben Begleiter.

Zwei Punkte einer Curve III. O., die denselben Begleiter haben, werden als correspondirende Punkte der Curve bezeichnet. Von einem Punkte P einer Curve III. O., die keinen Doppel- oder Rückkehrpunkt besitzt, lassen sich (ausser der Tangente in P) vier Tangenten an die Curve legen; zu jedem Curvenpunkte giebt es daher drei correspondirende Punkte.

Vier Curvenpunkte, die denselben Begleiter haben, die also zu je zweien correspondirend sind, heissen das dem Begleiter zugehörige Punktquadrupel.

6. Die Frage, ob je zwei correspondirende Punkte eine Curve III. O. als Träger zweier projectiven Involutionen in reducirter Lage auftreten, durch welche

die Curve erzeugt wird, wollen wir dadurch beantworten, dass wir angeben, wie eine Curve III. O. aus zwei correspondirenden Punkten A und B, den Tangenten in diesen Punkten und einer genügenden Anzahl weiterer Punkte durch zwei projective Involutionen construirt werden kann.

Sind A_1, A_2 zwei correspondirende Punkte einer C''', A_3 ihr Begleiter, so nehme man $A_1A_2A_3$ zum Coordinatendreieck. Die Durchschnittspunkte der Geraden A_2A_3 und der Curve ergeben sich aus der Gleichung

1. $$a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Da nun von den Schnittpunkten zwei mit A_2 und einer mit A_3 zusammenfallen, so muss sich die Gleichung 1. auf $x_2x_3^2 = 0$ reduciren, es ist also

$$a_{222} = a_{223} = a_{333} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten $x_1 : x_3$ für die Schnittpunkte von A_1A_3 und der Curve erhält man aus

2. $$a_{111}x_1^3 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

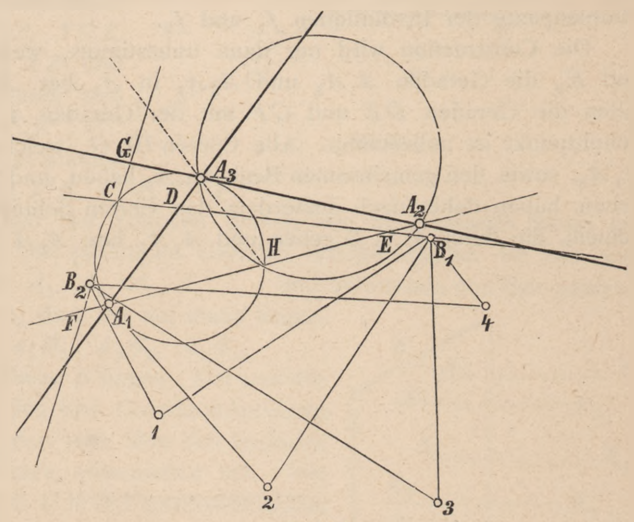
Da diese Gleichung zwei mit A_1 und einen mit A_3 zusammenfallenden Schnittpunkt ergeben muss, so muss sie sich auf $x_1x_3^2 = 0$ reduciren; folglich ist $a_{111} = a_{113} = 0$.

Die Gleichung der Curve in Bezug auf $A_1A_2A_3$ ist daher

$$f = 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + 3a_{233}x_1x_3^2 = 0.$$

Die Verhältnisse der fünf Coefficienten in dieser Gleichung werden durch vier weitere Punkte bestimmt. Dies ergiebt: Eine Curve III. O. ist durch zwei correspondirende Punkte, ihren Begleiter und vier weitere Punkte eindeutig bestimmt.

7. Um die C''' zu construiren, welche A_1A_2 zu correspondirenden Punkten, A_3 zu ihrem Begleiter hat, und durch die Punkte 1, 2, 3, 4 geht, legen wir einen Kegelschnitt K_1 durch A_1, 1, 2, 3, 4 und einen Kegelschnitt K_2 durch A_2, 1, 2, 3, 4.



(M. 431.)

Sind J_1 und J_2 die projectiven Involutionen mit den Trägern A_1 und A_2, durch welche die Curve erzeugt wird, so suchen wir die beiden Strahlbüschel, die mit J_1 und J_2 zusammen die Kegelschnitte K_1 und K_2 erzeugen; die Träger dieser Büschel seien B_1 und B_2. Da A_1A_3, A_1A_2 ein Paar der Involution J_1 ist, so liegt B_1 auf der Geraden, welche die Schnittpunkte D und E von K_1 und A_1A_3, A_1A_2 verbindet; ebenso liegt B_2 mit den Schnittpunkten G und F von K_2 mit A_2A_3, A_2A_1 auf einer Geraden.

Die Büschel B_1 und B_2 sind projectiv mit den beiden projectiven Involutionen J_1 und J_2, also sind sie auch unter einander projectiv, und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einem Kegelschnitte L. Da nun in den

Büscheln B_1 und B_2 die Strahlen sich entsprechen, die nach 1, 2, 3, 4, C gehen, so folgt, dass L durch 1, 2, 3, 4, C geht. Die Punkte B_1 und B_2 sind daher die Punkte, in denen der durch 1, 2, 3, 4, C bestimmte Kegelschnitt L die Geraden DE und FG zum zweiten Male schneidet.

Mit Hülfe des Kegelschnitts L findet man zu einem Strahle des Büschels B_1 den entsprechenden des Büschels B_2, und durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 ergeben sich dann aus je zwei entsprechenden Strahlen der Büschel B_1 und B_2 zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen J_1 und J_2.

Hat man auf diesem Wege zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen gefunden, etwa die, zu deren Schnittpunkten 1 gehört, so hat man noch ausserdem die beiden entsprechenden Paare $A_1A_2,\ A_1A_3 \;\overline{\wedge}\; A_2A_1,\ A_2A_3$.

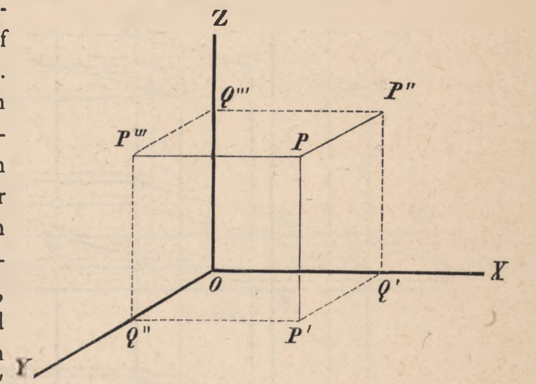
Die Projectivität der Involutionen ist durch diese entsprechenden Paare und dadurch, dass z. B. das Paar, zu welchem der Strahl $A_1 2$ gehört, dem Paare entspricht, zu welchem $A_2 2$ gehört, vollständig bestimmt, und die Ergänzung der Involutionen kann nun ohne Benutzung der Kegelschnitte K_1, K_2 und L in einfacherer Weise erfolgen. Man lege durch A_3 eine Gerade A_3H und beschreibe die beiden Kreise A_1A_3H und A_2A_3H. Die projectiven Strahlbüschel, welche mit den Involutionen J_1 und J_2 zusammen diese Kreise erzeugen, haben ihre Träger auf A_3H, und dieser Strahl entspricht sich selbst; daher sind die Büschel perspectiv. Da aus den bekannten entsprechenden Elementen der Involutionen J_1 und J_2 zwei Paare entsprechender Strahlen der beiden projectiven Büschel folgen, so ist die Gerade M bekannt, auf der die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen. Mit Hülfe dieser Geraden M findet man je zwei entsprechende Strahlen der Büschel, und indem man die Schnittpunkte dieser Strahlen und der beiden Kreise von A_1 und A_2 aus projicirt, erhält man zwei entsprechende Strahlenpaare der Involutionen J_1 und J_2.

Die Construction wird nur dann unbestimmt, wenn die Kegelschnitte K_1 und K_2 die Geraden A_1A_3 und A_2A_3 in A_1 bez. A_2 berühren; denn dann fallen die Geraden DE und GF mit der Geraden A_1A_2 zusammen, und ihr Schnittpunkt ist unbestimmt. Alle Curven III. O., welche die conjugirten Punkte A_1A_2, sowie den gemeinsamen Begleiter A_3 haben, und durch die Punkte 1, 2, 3 gehen, haben daher noch ausserdem den vierten Schnittpunkt der Kegelschnitte gemein, die durch 1, 2, 3 gehen und A_1A_3 bez. A_2A_3 in A_1 bez. A_2 berühren.

II. Theil. Analytische Geometrie des Raumes.

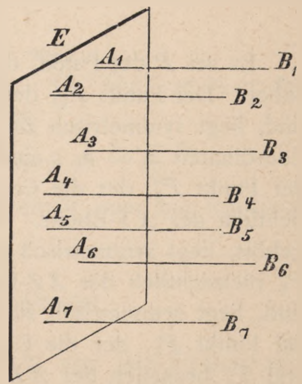
§ 1. Coordinaten des Punktes.

1. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, wählen wir einen beliebigen Punkt O, den wir als den Nullpunkt bezeichnen; durch O legen wir drei Ebenen, die Coordinatenebenen, deren jede auf den beiden andern senkrecht steht. Diese Ebenen schneiden sich in drei Geraden, den Coordinatenachsen, deren jede mit den beiden andern rechte Winkel bildet. Wir bezeichnen die Coordinatenachsen mit OX, OY, OZ, die Coordinatenebenen mit XOY, XOZ, YOZ, oder kürzer als die XY-, XZ- und YZ-Ebene. Wir bestimmen nun die Normalprojectionen P', P'', P''' des Punktes P auf die drei Ebenen und messen die Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$.



(M. 432.)

Ueber das Vorzeichen der Strecken wollen wir in folgender Weise entscheiden: Eine Schaar von parallelen Geraden durchschneiden wir mit einer Ebene E in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 .... und bestimmen nun den positiven sämmtlicher Parallelen so, dass die auf ihnen liegenden positiven Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... auf derselben Seite der Ebene E liegen. Der positive Sinn aller Normalen zu den drei Coordinatenebenen ist hiernach bestimmt, wenn man über den positiven Sinn der Coordinatenachsen entschieden hat. Wir wollen festsetzen, dass OX, OY, OZ positive Strecken der Coordinatenachsen sind.



(M. 433.)

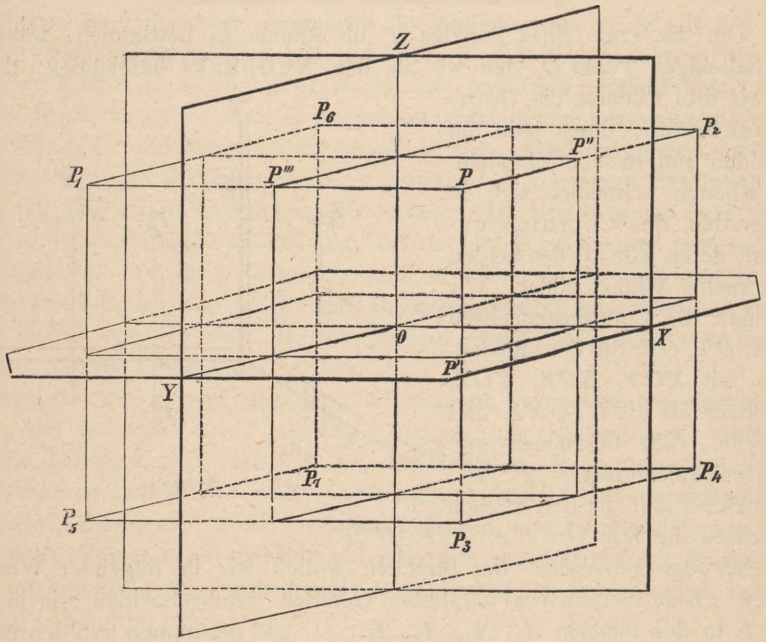
Die drei Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$ bezeichnen wir der Reihe nach mit x, y, z; sie sind die Coordinaten, specieller die rechtwinkeligen oder orthogonalen Coordinaten des Punktes P.

Alle Punkte, deren Coordinate x einen gegebenen Werth a hat, liegen auf einer Ebene, die zur YZ-Ebene parallel ist und von der X-Achse eine Strecke $OQ' = a$ abschneidet;

alle Punkte, deren Coordinate y einen gegebenen Werth b hat, sind auf einer Parallelebene zu XOZ enthalten, die von der Y-Achse eine Strecke $OQ'' = b$ abschneidet; und der Ort aller Punkte, deren Coordinate z den gegebenen Werth c hat, ist eine Ebene parallel zu XOY, die von der Z-Achse die Strecke $OQ''' = c$ abschneidet.

Zu den drei Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ gehört der Schnittpunkt der drei Ebenen, die parallel zu den Coordinatenebenen sind und von den Achsen der Reihe nach die Strecken $OQ' = a$, $OQ'' = b$, $OQ''' = c$ abschneiden. Die Lage eines Punktes gegen die Coordinatenebenen ist somit durch seine Coordinaten eindeutig bestimmt.

Durch die drei Coordinatenebenen wird der Raum in acht dreiseitige Ecken zerlegt. Für die Punkte im Innern der Ecke, welche die Kanten OX, OY, OZ hat, sind alle drei Coordinaten positiv.



(M. 434.)

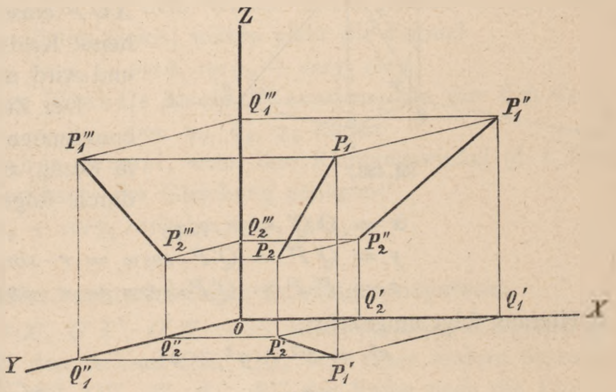
Es sei P der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z die positiven Werthe a, b, c haben. Der Punkt P_1, dessen Coordinaten x, y, z der Reihe nach gleich $-a$, b, c sind, liegt symmetrisch zu P in Bezug auf die YZ-Ebene; der Punkt P_2, dessen Coordinaten a, $-b$, c sind, liegt symmetrisch zu P in Bezug auf die XZ-Ebene; der Punkt P_3, der die Coordinaten a, b, $-c$ hat, liegt symmetrisch zu P rücksichtlich der XY-Ebene. Der Punkt P_4, der den Coordinaten a, $-b$, $-c$ zugehört, liegt symmetrisch zu P_2 rücksichtlich der XY-Ebene und symmetrisch zu P_3 rücksichtlich der XZ-Ebene; der Punkt P_5, dessen Coordinaten $-a$, b, $-c$ sind, liegt symmetrisch zu P_1 und P_3 in Bezug auf die XY- und die XZ-Ebene; der Punkt P_6, der die Coordinaten $-a$, $-b$, c hat, liegt symmetrisch zu P_1 und P_2 bezüglich der XZ- und YZ-Ebene. Der Punkt P_7, dessen Coordinaten $-a$, $-b$, $-c$ sind, liegt symmetrisch zu P_4, P_5, P_6 in Bezug auf die Ebenen YOZ, XOZ, XOY. Es giebt also acht Punkte, deren Coordinaten gleiche

absolute Werthe haben, in jeder der acht von den drei Coordinatenebenen gebildeten dreiseitigen Ecken ist einer enthalten; sie sind die Ecken eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, dessen Ebenen parallel den Coordinatenebenen sind, und dessen Kanten von den Coordinatenebenen normal halbirt werden.

Alle Punkte, die gleiches x und y haben, haben dieselbe Horizontalprojection P', liegen also auf einer durch die Coordinaten x und y bestimmten Parallelen zur Z-Achse; die Punkte, die gleiches x und z haben, haben dieselbe Verticalprojection P'' und liegen auf einer Parallelen zur Y-Achse; und die Punkte, die gleiches y und z haben, gehören zu derselben seitlichen Projection P''' und liegen auf einer Parallelen zur X-Achse.

Die Ebene $PP'P''$ (Fig. 432) ist parallel zur YZ-Ebene; ihr Schnittpunkt Q' mit der X-Achse ist daher die Normalprojection des Punktes P auf die X-Achse und die Geraden $P'Q'$ und $P''Q'$ sind normal zu OX. Ebenso treffen die Ebenen $PP'P'''$ und $PP''P'''$ die Y- und die Z-Achse in Punkten Q'' und Q''', die die Normalprojectionen des Punktes P auf diese Achsen sind.

2. Die Strecke zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ergiebt sich leicht aus ihren Coordinaten. Für die Strecke $P_1'P_2'$ folgt aus den Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf das ebene Coordinatensystem XOY:



(M. 435.)

$$P_1'P_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Ferner ist $P_1P_2^2 = P_1'P_2'^2 + (P_2'P_2 - P_1'P_1)^2$, daher ist

1. $$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Strecke P_1P_2 mit den Achsen OX, OY, OZ bildet, der Reihe nach mit φ, ψ, χ, und sind Q_1', Q_1'', Q_1''', bez. Q_2', Q_2'', Q_2''' die Projectionen von P_1 und P_2 auf die Achsen, so ist
$$Q_1'Q_2' = P_1P_2 \cos\varphi, \qquad Q_1''Q_2'' = P_1P_2 \cos\psi, \qquad Q_1'''Q_2''' = P_1P_2 \cos\chi.$$

Nun ist für jeden Punkt P
$$OQ' = x, \quad OQ'' = y, \quad OQ''' = z,$$
also ist $Q_1'Q_2' = x_2 - x_1$, $\quad Q_1''Q_2'' = y_2 - y_1$, $\quad Q_1'''Q_2''' = z_2 - z_1$.

Daher hat man, wenn man P_1P_2 mit d bezeichnet:

2. $$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\psi = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\chi = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

Quadrirt man diese drei Werthe und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf 1. die bemerkenswerthe Gleichung

3. $$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1.$$

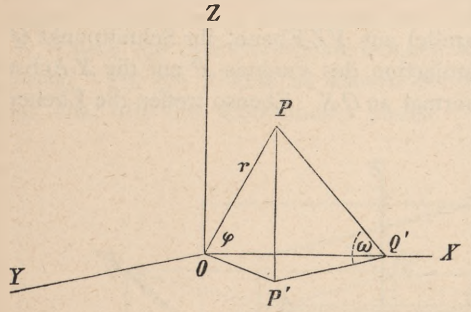
3. Theilt ein Punkt P die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse
$$P_1P : PP_2 = \lambda_2 : \lambda_1,$$
so werden die Projectionen $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$, $P_1'''P_2'''$ von den Projectionen P', P'', P''' im gleichen Verhältnisse getheilt; die Coordinaten von P ergeben sich daher aus den Coordinaten von P_1 und P_2 nach den Formeln

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Strecke P_1P_2 sind insbesondere

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

4. Die Lage eines Punktes kann man auch durch Polarcoordinaten bestimmen. Man geht dabei von einem festen Punkte, einer durch diesen Punkt gehenden festen Geraden, und einer durch diese Gerade gehenden festen Ebene aus; wir nehmen dazu den Nullpunkt, die X-Achse und die XY-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. Als Polarcoordinaten eines Punktes P verwendet man nun die Strecke OP, den Winkel φ, den die X-Achse mit der Geraden bildet, auf welcher OP gelegen ist, und den Flächenwinkel ω, den die Ebene XOY und der Winkel XOP einschliessen; die Strecke OP heisst Radius vector des Punktes P und wird mit r bezeichnet.



(M. 436.)

Der Zusammenhang dieser Polarcoordinaten mit den rechtwinkeligen in Bezug auf das System XYZ wird durch folgende Formeln hergestellt:

1. $$\begin{aligned} x &= OQ' = r\cos\varphi, \\ y &= Q'P' = Q'P \cdot \cos\omega = r \cdot \sin\varphi\cos\omega, \\ z &= P'P = Q'P \cdot \cos\omega = r \cdot \sin\varphi\sin\omega. \end{aligned}$$

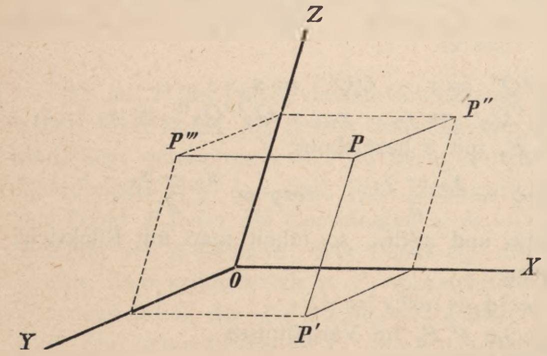
Hieraus folgt umgekehrt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r},$$

$$\cos\omega = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

5. In vereinzelten Fällen legt man analytisch-geometrischen Untersuchungen ein schiefwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde, d. i. drei Coordinatenebenen, die sich nicht unter rechten Winkeln schneiden. Man projicirt dann jeden Punkt P gewöhnlich durch Strahlen, die den Coordinatenachsen OX, OY, OZ parallel sind, und bezeichnet als Coordinaten des Punktes die Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$. Es giebt auch in diesem Falle acht Punkte, deren Coordinaten den absoluten Werthen nach übereinstimmen und nur nach den Vorzeichen verschieden sind; dieselben bilden die Eckpunkte eines Parallelepipeds, dessen Kanten den Coordinatenachsen parallel sind und von den Coordinatenebenen halbirt werden.



(M. 437.)

6. Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Achsen eines rechtwinkeligen

Coordinatensystems mit dem Radius vector eines Punktes P einschliessen, so ist

1. $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi, \quad z = r\cos\chi.$$

Werden die entsprechenden Bestimmungsstücke für zwei Punkte P_1, P_2 durch die Indices 1 und 2 unterschieden, so hat man für den Cosinus des Winkels der Geraden OP_1 und OP_2 die Formel

$$\cos(r_1 r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - P_1P_2^2}{2 r_1 r_2}.$$

Nun ist $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $\quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$,

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2;$$

daher hat man $r_1^2 + r_2^2 - P_1P_2^2 = 2x_2x_1 + 2y_2y_1 + 2z_2z_1$.

Da nun ferner $x_1 = r_1\cos\varphi_1$, $\quad y_1 = r_1\cos\psi_1$, $\quad z_1 = r_1\cos\chi_1$,

$$x_2 = r_2\cos\varphi_2, \quad y_2 = r_2\cos\psi_2, \quad z_2 = r_2\cos\chi_2,$$

so folgt schliesslich die Formel

2. $$\cos(r_1 r_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2.$$

Der Winkel zweier Geraden ist dem Winkel zweier durch einen Punkt (z. B. durch O) gelegten Parallelen gleich; mithin giebt die Formel

3. $$\cos\delta = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2$$

allgemein den Cosinus des Winkels zweier Geraden, die mit den Coordinatenachsen die Winkel φ_1, ψ_1, χ_1, bez. φ_2, ψ_2, χ_2 bilden.

Zwei Gerade sind daher normal, wenn ihre Richtungswinkel (d. i. ihre Winkel mit den Coordinatenachsen) der Gleichung genügen:

4. $$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2 + \cos\chi_1\cos\chi_2 = 0.$$

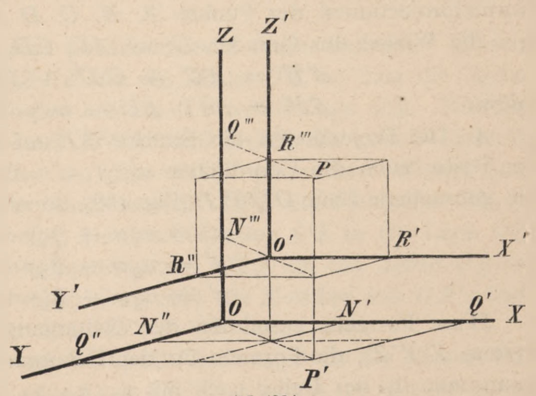
§ 2. Transformation rechtwinkeliger Coordinatensysteme.

1. Sind die Achsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gleichsinnig parallel den Achsen OX, OY, OZ eines andern Systems, und sind N', N'', N''', Q', Q'', Q''', R', R'', R''' der Reihe nach die Projectionen des Punktes O' auf OX, OY, OZ und des Punktes P auf OX, OY, OZ, bez. $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, so hat man

$$\begin{aligned} OQ' &= ON' + N'Q' = ON' + O'R', \\ OQ'' &= ON'' + N''Q'' = ON'' + O'R'', \\ OQ''' &= ON''' + N'''Q''' = ON''' + O'R'''. \end{aligned}$$

Nun sind OQ', OQ'', OQ''' die Coordinaten x, y, z des Punktes P in Bezug auf das System XYZ; $O'R'$, $O'R''$, $O'R'''$ die Coordinaten x', y', z' von P in Bezug auf das neue System $X'Y'Z'$; ferner ON', ON'', ON''' die Coordinaten des Nullpunkts O' in Bezug auf das System XYZ, die wir mit a, b, c bezeichnen wollen. Daher haben wir die Transformationsformeln

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$



(M. 438.)

2. Transformation aus einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme in ein anderes mit demselben Nullpunkte, aber anders gerichteten Achsen

Die Cosinus der Winkel, welche die Achsen OX, OY, OZ des ursprünglichen Systems mit den Achsen OX', OY', OZ' des neuen Systems bilden, mögen folgende tabellarisch zusammengestellte Werthe haben:

Cosinus des Winkels der Achse		OX	OY	OZ
mit der Achse	OX':	α_1	β_1	γ_1,
„ „ „	OY':	α_2	β_2	γ_2,
„ „ „	OZ':	α_3	β_3	γ_3.

Zwischen diesen neun Grössen bestehen sechs Gleichungen. Aus § 1, 2 folgt

1. $$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,\quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,\quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Da ferner das neue System $X'Y'Z'$ ebenfalls rechtwinkelig ist, so ist (§ 1, 6)

2. $$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,\quad \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0,\quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Auf Grund dieser sechs Gleichungen kann man die neun Cosinus durch drei derselben, oder durch drei andere, von einander unabhängige Grössen ausdrücken.

Die beiden Systeme von Gleichungen 1. und 2. kann man durch zwei andere Systeme ersetzen. Da die Winkel der X-Achse mit den rechtwinkeligen Achsen OX', OY', OZ' die Cosinus α_1, α_2, α_3 haben u. s. w., so ist auch

3. $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,\quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1,\quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Da ferner die Achsen des Systems XYZ rechte Winkel bilden, so ist

4. $$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,\quad \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0,\quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0.$$

Die sechs Gleichungen 3. und 4. können algebraisch als eine Folge der Gleichungen 1. und 2. nachgewiesen werden; wir sehen indess davon ab, diesen Nachweis zu liefern.

3. Sind zwei Punkte A und B durch einen aus drei Strecken AC, CD und DB bestehenden gebrochenen Linienzug verbunden, und sind A', B', C', D' die Normalprojectionen der Punkte A, B, C, D auf eine Gerade G, sind ferner λ, μ, ν die Winkel der Geraden G mit AC, CD, DB, so hat man bekanntlich

$$A'B' = A'C' + C'D' + D'B',$$

mithin
$$A'B' = \cos\lambda \cdot AC + \cos\mu \cdot CD + \cos\nu \cdot DB.$$

4. Die Projectionen der Strecke OP auf die Achsen OX', OY', OZ' sind der Reihe nach die Coordinaten x', y', z'. Projicirt man statt der Strecke OP die gebrochene Linie $OQ'P'P$ (Fig. 432), so erhält man nach der vorigen Formel

1. $$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Diese Formeln vermitteln den Uebergang aus dem Systeme XYZ in das System $X'Y'Z'$; die Formeln für den Uebergang aus diesem in jenes erhält man, wenn man 1. der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3; dann mit β_1, β_2, β_3; schliesslich mit γ_1, γ_2, γ_3 multiplicirt und addirt; in Rücksicht No. 2, 3 und 4 erhält man

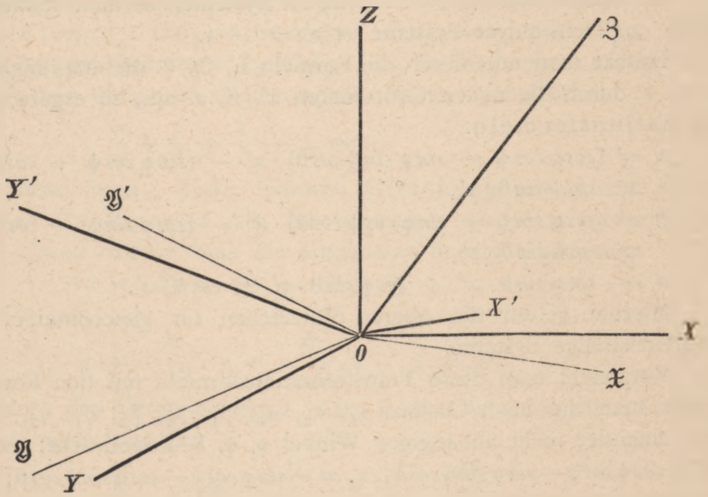
2. $$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',\quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',\quad z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

5. Hat das neue System weder dieselben Achsenrichtungen, noch denselben Nullpunkt wie das ursprüngliche, so kann man ein Hülfssystem einschalten, das mit dem ursprünglichen in Bezug auf die Achsenrichtungen und mit dem neuen in Bezug auf den Nullpunkt übereinstimmt.

Sind $x, y, z,$ x', y', z' die Coordinaten eines Punktes P im ursprünglichen bez. im neuen Systeme, sind ferner a, b, c die Coordinaten des neuen Nullpunkts in Bezug auf das alte System, und werden die Cosinus der Winkel der Achsen des neuen Systems mit den Achsen des alten wie in No. 3 bezeichnet, so hat man die Transformationsformeln

$$x = a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',\quad y = b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',\quad z = c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

6. Wenn zwei orthogonale Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$ einen gemeinsamen Nullpunkt haben, so kann die Ebene XOY in die neue Lage $X'OY'$ auf folgende Weise übergeführt werden.



(M. 439.)

Wir bemerken zunächst, dass in allen Coordinatenebenen der positive Drehungssinn für Winkel so gewählt sein soll, dass die Winkel XOY, XOZ, YOZ rechte Winkel (und nicht $= 270°$) sind. Wir beachten nun die Schnittgerade der Ebenen $X'OY'$ und XOY und entscheiden über ihren positiven Sinn; $O\mathfrak{X}$ sei eine positive Strecke dieser Geraden. Hierauf drehen wir das Coordinatensystem XYZ um die Achse OZ, so dass die Achse OX den Winkel $XO\mathfrak{X}$ beschreibt; dabei komme OY in die Lage $O\mathfrak{Y}$. Nun bemerke man die Schnittlinie der Ebenen $X'OY'$ und $\mathfrak{Y}OZ$; die positive Strecke $O\mathfrak{Y}'$ auf dieser Geraden wähle man so, dass $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}'$ ein rechter Winkel (und nicht $= 270°$) ist, und drehe das Coordinatensystem $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$ um die Achse $O\mathfrak{X}$ so, dass $O\mathfrak{Y}$ den Winkel $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Y}'$ beschreibt; hierdurch komme OZ in die Lage $O\mathfrak{Z}$.

Schliesslich drehe man das Coordinatensystem $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$ um die Achse $O\mathfrak{Z}$ so, dass $O\mathfrak{X}$ den Winkel $\mathfrak{X}OX'$ beschreibt; dann fällt die $\mathfrak{X}$-Achse mit OX', und, da $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}' = X'OY' = 90°$, auch die Y-Achse mit OY' zusammen.

Hat man so durch drei aufeinander folgende Drehungen um die Achsen OZ, $O\mathfrak{X}$, und $O\mathfrak{Z}$ die XY-Ebene in die neue Lage $X'OY'$ gebracht, so fällt die Achse OZ' entweder mit $O\mathfrak{Z}$ zusammen, oder bildet mit $O\mathfrak{Z}$ einen gestreckten Winkel. Im ersten Falle kann man das Coordinatensystem XYZ durch Drehung in die neue Lage $X'Y'Z'$ bringen, im andern Falle nicht; im ersten Falle bezeichnet man die Coordinatensysteme als **gleichsinnig**, im andern als **ungleichsinnig**.

Bei jeder einzelnen der drei Drehungen bleibt eine Achse des jeweiligen Coordinatensystems unverändert, also auch die parallel zu ihr gemessene Coordinate eines Punktes; die beiden andern Coordinaten ändern sich infolge der Drehung der Coordinatenebene, mit welcher sie parallel sind, für dieselben gelten daher die für Coordinaten in der Ebene aufgestellten Transformationsformeln. Bezeichnet man die Winkel $XO\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{X}OX'$ der Reihe nach mit ψ, ϑ, φ, und die Coordinaten eines Punktes P in den Systemen XYZ, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$, $X'Y'\mathfrak{Z}$ der Reihe nach mit x, y, z; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, z$; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}', \mathfrak{z}$; $x', y', \mathfrak{z}$; so hat man die successiven Transformationsformeln:

α) für den Uebergang aus dem Systeme XYZ in das System $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$:

1. $x = \cos\psi \cdot \mathfrak{x} - \sin\psi \cdot \mathfrak{y}, \quad y = \sin\psi \cdot \mathfrak{x} + \cos\psi \cdot \mathfrak{y}, \quad z = z;$

β) für den Uebergang aus dem Systeme $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z$ in das System $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$:

2. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y} = \cos\vartheta \cdot \mathfrak{y}' - \sin\vartheta \cdot \mathfrak{z}, \quad z = \sin\vartheta \cdot \mathfrak{y}' + \cos\vartheta \cdot \mathfrak{z};$

γ) für den Uebergang aus dem Systeme $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}$ in das System $X'Y'\mathfrak{Z}$:

3. $\mathfrak{x} = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \quad \mathfrak{y}' = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y', \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}.$

Im Falle zweier gleichsinnigen Systeme hat man schliesslich $z' = \mathfrak{z}$, im Falle ungleichsinniger Systeme ist $z' = -\mathfrak{z}$.

Drückt man nun durch die Formeln 1., 2., 3. die ursprünglichen Coordinaten x, y, z durch die neuen Coordinaten x', y', z' aus, so ergeben sich die Transformationsformeln:

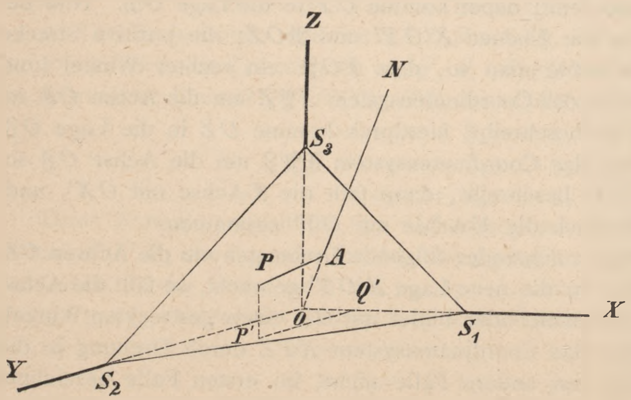
$$\begin{aligned} x &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \cdot x' - (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \cdot y' \\ &\quad \pm \sin\psi\sin\vartheta \cdot z', \\ y &= (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \cdot x' - (\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \cdot y' \\ &\quad \mp \cos\psi\sin\vartheta \cdot z' \\ z &= \sin\varphi\sin\vartheta \cdot x' + \cos\varphi\sin\vartheta \cdot y' \pm \cos\vartheta \cdot z'. \end{aligned} \tag{4.}$$

Hierbei gelten die oberen Vorzeichen für gleichsinnige, die unteren für ungleichsinnige Systeme.

Vergleicht man diese Transformationsformeln mit den Formeln in No. 4, so erhält man die neun Cosinus α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 durch die drei von einander nicht abhängigen Winkel φ, ψ, ϑ ausgedrückt; man hat

$$\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta; \quad \alpha_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta; \quad \alpha_3 = \pm\sin\psi\sin\vartheta;$$
$$\beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta; \quad \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta; \quad \beta_3 = \mp\cos\psi\sin\vartheta;$$
$$\gamma_1 = \sin\varphi\sin\vartheta; \quad \gamma_2 = \cos\varphi\sin\vartheta; \quad \gamma_3 = \pm\cos\vartheta.$$

§ 3. Die Ebene, die Gerade und der Punkt.



(M. 440.)

1. Fällt man auf eine Ebene T vom Nullpunkte O aus eine Normale ON, so kann die Ebene als der Ort der Punkte definirt werden, die den Schnittpunkt A dieses Lothes und der Ebene zur Normalprojection auf ON haben. Ist d die positiv zu rechnende Strecke OA, sind α, β, γ die Winkel, welche

OA mit den Coordinatenachsen einschliesst, und sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes P der Ebene, so ist die Bedingung, dass die Normalprojection von P auf die Gerade ON mit dem Punkte A zusammenfällt:

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = d.$$

Die Coordinaten jedes Punktes der Ebene genügen dieser Gleichung; und umgekehrt, alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, liegen auf der Ebene; die Gleichung ist daher die Gleichung der Ebene T.

Eine Ebene, deren Normale mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ macht und die vom Anfangspunkte um die Strecke d entfernt ist, hat daher die Gleichung

1. $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0.$

Diese Gleichung ist linear bezüglich der Coordinaten.

Dividirt man sie durch d, so entsteht

$$\frac{\cos\alpha}{d} \cdot x + \frac{\cos\beta}{d} \cdot y + \frac{\cos\gamma}{d} \cdot z - 1 = 0.$$

Nun ist, wie man aus der Figur sieht,

$$OS_1 = d : \cos\alpha, \quad OS_2 = d : \cos\beta, \quad OS_3 = d : \cos\gamma.$$

Wenn man die Achsenabschnitte OS_1, OS_2, OS_3 der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, so erhält man daher die Gleichung der Ebene in der Form:

2. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0.$

Umgekehrt schliesst man: Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Punktes ist die Gleichung einer eindeutig bestimmten Ebene. Denn dividirt man die allgemeine lineare Gleichung

3. $Ax + By + Cz + D = 0$

durch $-D$, so erhält man

$$\frac{A}{-D} \cdot x + \frac{B}{-D} \cdot y + \frac{C}{-D} \cdot z - 1 = 0,$$

und erkennt nun durch den Vergleich mit 2., dass 3. die Gleichung einer Ebene ist, deren Achsenabschnitte betragen

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Durch Multiplication mit einem geeigneten Faktor r kann man die allgemeine lineare Gleichung 3. auch auf die Normalform 1. bringen, und dadurch den Abstand der Ebene 3. vom Nullpunkte und die Winkel bestimmen, die die Normale der Ebene mit den Achsen bildet. Aus der Identität

$$rAx + rBy + rCz + rD \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d$$

folgen die Gleichungen

$$rA = \cos\alpha, \quad rB = \cos\beta, \quad rC = \cos\gamma, \quad rD = -d.$$

Quadrirt man die ersten drei, addirt, und beachtet, dass

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

so erhält man

$$r^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \quad \text{also } r = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

mithin hat man

4. $\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$d = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. Setzt man in der Gleichung einer Ebene T:

$$T \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die Coordinate $z = 0$, so erhält man die Gleichung für die Coordinaten x und y der Punkte der Ebene, welche auf der XY-Ebene liegen, also die Gleichung der Horizontalspur S_1S_2 der Ebene T; ebenso erhält man die Gleichung der Spuren S_1S_3 und S_2S_3, wenn man in der Gleichung der Ebene $y = 0$ bez. $x = 0$ setzt daher ist die Gleichung der

Horizontalspur S_1S_2: $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$

Verticalspur S_1S_3: $\quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$

seitlichen Spur S_2S_3: $\quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$

Man kann diese drei Gleichungen auch als Gleichungen von Ebenen betrachten; da z. B. in der ersten derselben die Coordinate z nicht vorkommt, so wird der Gleichung von jedem Punkte des Raumes genügt, dessen x und y diese Gleichung erfüllen, dessen Horizontalprojection P' also auf S_1S_2 liegt; als Gleichung eines räumlichen Gebilds aufgefasst, ist daher

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

die Gleichung einer Ebene, die parallel zur Z-Achse ist. Ebenso sind

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die Gleichungen von Ebenen, die parallel zur Y-Achse, bez. parallel zur X-Achse sind.

3. Liegen vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 auf einer Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ so bestehen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax \;+ By \;+ Cz \;+ D &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser in Bezug auf A, B, C, D homogenen linearen Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante

$$T \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass P mit $P_1P_2P_3$ auf derselben Ebene liegt, ist also die Gleichung der Ebene $P_1P_2P_3$.

4. Der Winkel δ zweier Ebenen

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \qquad T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

innerhalb dessen der Nullpunkt liegt, ist dem Winkel ihrer Normalen supplementär; sind α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Winkel der Normalen von T und T_1 mit den Coordinatenachsen, so ist

$$-\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Setzt man hier die in No. 1, 4 gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

1. $$\cos\delta = -\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Zwei Ebenen sind daher normal zu einander, wenn

2. $$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Zwei Ebenen sind parallel, wenn $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1$, also wenn

$$A : B : C = A_1 : B_1 : C_1.$$

5. Ist Π die Normalprojection eines beliebigen Punktes P auf die durch O gehende Normale der Ebene

$$T \equiv \cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z - d = 0,$$

so ist $\quad O\Pi = \cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z.$

Der Abstand p des Punktes P von der Ebene T ist

$$p = \Pi A = OA - O\Pi = d - (\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z) = -T.$$

Ist also $T \equiv \cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z - d = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist der Werth, den das Polynom T für die Coordinaten irgend eines nicht auf $T = 0$ gelegenen Punktes annimmt, dem Abstande des Punktes von der Ebene entgegengesetzt gleich; dabei wird der Abstand positiv oder negativ, je nachdem der Punkt mit dem Nullpunkte O auf derselben Seite der Ebene liegt oder nicht.

Der Abstand eines Punktes P von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ ist

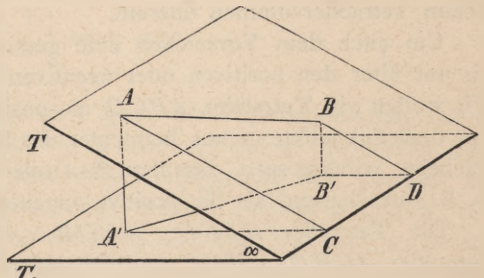
$$p = -\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. Sind AC und BD zwei Strecken einer Ebene T und normal zur Schnittlinie mit einer andern Ebene T_1, sind ferner A' und B' die Normalprojectionen von A und B auf T_1, so ist

$$\begin{aligned} A_1CDB_1 &= \tfrac{1}{2}CD\cdot(A'C + B'D) = \tfrac{1}{2}CD\cdot(AC\cos TT_1 + BD\cos TT_1) \\ &= \tfrac{1}{2}CD\cdot(AC + BD)\cos TT_1. \end{aligned}$$

Daher hat man

1. $$A'B'DC = ABDC\cdot\cos\alpha.$$



(M. 441.)

Projicirt man die Ecken eines auf T gelegenen Polygons auf die Schnittlinie von T' und T_1, so erscheint die Fläche des Polygons als ein Polynom von rechtwinkeligen Trapezen, derart wie $ABDC$, und die Projection des Polygons auf die Ebene T_1 ist das gleichgebildete Polynom aus den Projectionen der Trapeze. Wendet man auf die Projection jedes Trapezes die Formel 1. an, so gelangt man zu dem Satze: Die Fläche der Normalprojection einer ebenen Figur ist gleich der Fläche der projicirten Figur multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der projicirten Figur gegen die Projectionsebene.

Der Neigungswinkel einer Ebene gegen eine Coordinatenebene ist dem Winkel gleich, den die Normale der Ebene mit der auf der Coordinatenebene normalen Achse einschliesst.

Sind daher f', f'', f''' die Projectionen einer ebenen Fläche f auf die Coordinatenebenen und α, β, γ die Winkel der Normalen zu f mit den Achsen, so hat man $f' = f\cos\gamma$, $f'' = f\cos\alpha$, $f''' = f\cos\beta$.

Quadrirt man diese drei Werthe und addirt, so entsteht

$$f'^2 + f''^2 + f'''^2 = f^2.$$

Projicirt man eine ebene Fläche auf die Ebenen eines orthogonalen Coordinatensystems, so ist die Summe der zweiten Potenzen der drei Projectionen gleich der zweiten Potenz der projicirten Fläche.

7. Die Gleichung der durch die Punkte $P_1 P_2 P_3$ gehenden Ebene (No. 3) giebt nach den Gliedern der ersten Zeile entwickelt

$$1.\quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coefficienten von x, y, z stimmen rücksichtlich der absoluten Werthe mit den doppelten Flächen der Dreiecke $P_1'''P_2'''P_3'''$, $P_1''P_2''P_3''$, $P_1'P_2'P_3'$ überein; um die Gleichung 1. auf die Normalform zu bringen, hat man sie daher durch

$$2\sqrt{(P_1'''P_2'''P_3''')^2 + (P_1''P_2''P_3'')^2 + (P_1'P_2'P_3')^2} = \pm 2 \cdot P_1 P_2 P_3$$

zu dividiren. Bezeichnet man mit h_0 die von P_0 ausgehende Höhe des Tetraëders $P_0 P_1 P_2 P_3$ und mit f_0 die Fläche $P_1 P_2 P_3$, so hat man daher (No. 5)

$$\frac{1}{2 f_0} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm h_3 .$$

Hieraus folgt, wenn man mit V das Volumen des Tetraëders $P_0 P_1 P_2 P_3$ bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 6 V.$$

Die Determinante stimmt also dem absoluten Werthe nach mit dem sechsfachen Tetraëdervolumen überein.

Um auch dem Vorzeichen eine geometrische Bedeutung zu geben, haben wir uns über den positiven oder negativen Sinn von Tetraëdern zu entscheiden. Wir wollen ein Tetraëder $ABCD$ als positiv oder negativ ansehen, je nachdem von dem Eckpunkte A aus betrachtet das Dreieck BCD als positiv oder negativ erscheint, vorausgesetzt, dass man für Dreiecksflächen eine bestimmte Drehrichtung (z. B. links herum) als die positive angenommen hat.

Die Tetraëder $ABCD$, $ACDB$, $ADBC$ haben dasselbe Zeichen; die Tetraëder $ACBD$, $ABDC$, $ADCB$ haben das entgegengesetzte Zeichen; denn die Dreiecke BCD, CDB, DBC erscheinen von demselben Punkte A aus in gleicher Drehrichtung, die Dreiecke CBD, BDC, DCB in der entgegengesetzten.

Lässt man also die erste Ecke unverändert und permutirt die drei andern, so haben die Tetraëder denselben Sinn, bei denen die drei letzten Buchstaben Permutationen von derselben Klasse sind.

Das Dreieck BCD erscheint von A aus in anderer Drehrichtung als das Dreieck ACD von B aus; die beiden Tetraëder $ABCD$ und $BACD$ sind daher ungleichen Sinnes; und zugleich sind $ABCD$ und $BACD$ Permutationen von verschiedener Klasse. Durch Vertauschung der ersten beiden Buchstaben und nachmalige Permutation der drei letzten Buchstaben kann man aber alle Permutationen der vier Buchstaben $ABCD$ herstellen. Wir sehen daher: Tetraëder, die sich nur durch die Anordnung der Eckbuchstaben unterscheiden, sind gleichen oder ungleichen Zeichens, je nachdem die Folge ihrer Eckbuchstaben Permutationen von gleicher Klasse sind, oder nicht.

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

hat für zwei verschiedene Lagen Π' und Π'' des variabeln Punktes P im Allgemeinen verschiedene Werthe Δ' und Δ''; sollen diese ungleiche Vorzeichen haben, so muss Δ für einen Punkt der Strecke $\Pi'\Pi''$ verschwinden. Hieraus folgt: Die Determinante hat für alle Punkte auf derselben Seite der Ebene $P_1 P_2 P_3$ dasselbe Zeichen und wechselt das Zeichen, wenn P von einer Seite von $P_1 P_2 P_3$ auf die andere übertritt. Unter denselben Umständen behält oder wechselt aber auch das Tetraëder $PP_1 P_2 P_3$ das Zeichen; denn das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ erscheint von allen Punkten aus, die auf derselben Seite von $P_1 P_2 P_3$ liegen, in derselben Drehrichtung, von Punkten auf verschiedenen Seiten aus in entgegengesetzten Drehrichtungen. Hieraus folgt, dass für alle Lagen der Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

dem sechsfachen Volumen des Tetraëders gleich oder entgegengesetzt gleich ist. Um nun zu entscheiden, welcher von beiden Fällen gilt, genügt es, ein Beispiel zu untersuchen. Wir wählen das Tetraëder $OS_1 S_2 S_3$ (Fig. 440). Die Determinante Δ wird jetzt

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = -\,abc .$$

Rechnet man ein Dreieck ABC positiv, wenn die Drehungsrichtung von A über B nach C linksum erfolgt, und ist, wie in unseren Figuren, der positive Sinn der Coordinatenachsen so gewählt, dass vom Anfangspunkt aus gesehen ein Dreieck ABC positiv erscheint, dessen Ecken auf den Achsen OX, OY, OZ liegen, und die Endpunkte der positiven Strecken OA, OB, OC sind, so ist das Tetraëder $OS_1 S_2 S_3$ positiv. Hieraus folgt, dass auch rücksichtlich des Vorzeichens die Gleichung gilt

$$6 \cdot P_0 P_1 P_2 P_3 = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

8. Die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen

$$T_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
$$T_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$
$$T_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0.$$

sind die Werthe von x, y, z, welche den drei Gleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ genügen, also die Auflösungen des linearen Systems

$$1.\quad \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z &= -D_1 , \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z &= -D_2 , \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z &= -D_3 . \end{aligned}$$

Dieses System ergiebt

2. $(ABC)\cdot x = -(DBC)$, $(ABC)\cdot y = -(ADC)$, $(ABC)\cdot z = -(ABD)$
wenn

$$(ABC) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (DBC) = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$(ADC) = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (ABD) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Sind die drei Zeilen der Determinante (ABC) oder zwei derselben proportional, so sind die drei Ebenen parallel (No. 4), oder zwei derselben sind parallel, und die Determinante (ABC) verschwindet. Ist $(ABC) = 0$ und sind zwei Colonnen proportional, so verschwindet auch eine der andern drei Determinanten, die andern beiden unterscheiden sich durch einen von Null verschiedenen Faktor und verschwinden daher gleichzeitig; sind diese beiden Determinanten nicht Null, so ist eine Coordinate des Schnittpunkts unbestimmt, die beiden andern sind unendlich gross; die Ebenen schneiden sich daher in drei parallelen Geraden, die einer Coordinatenebene parallel sind. Ist z. B. $A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3$, also $B_1 = nA_1$, $B_2 = nA_2$, $B_3 = nA_3$, so ist $(DBC) = n(DAC) = -n(ADC)$, und $(ABD) = 0$. Wenn (DBC) nicht verschwindet, so ist auch (ADC) von Null verschieden, und die Coordinaten des Schnittpunkts sind $x = \infty$, $y = \infty$, z unbestimmt. Die Ebenen schneiden sich daher in drei zur XY-Ebene parallelen Geraden.

Wenn (ABC) dadurch verschwindet, dass die Glieder einer Colonne Null sind, so sind auch zwei der drei andern Determinanten Null; die drei Ebenen sind in diesem Falle einer Coordinatenachse parallel; wenn die vierte Determinante nicht verschwindet, so schneiden sie sich in drei zu dieser Achse parallelen Geraden; wenn sie verschwindet, so gehen sie alle drei durch eine zu dieser Achse parallele Gerade. Ist z. B. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, so haben die Ebenen die Gleichungen
$T_1 = B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $T_2 = B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $T_3 = B_3y + C_3z + D_3 = 0$,
sind also parallel der X-Achse; betrachtet man ihre Gleichungen als Gleichungen von Geraden in der YZ-Ebene, so sind dies die seitlichen Spuren der drei Ebenen; diese drei Spuren haben einen oder keinen gemeinsamen Punkt, je nachdem die Determinante (BCD) verschwindet oder nicht verschwindet.

Wenn die Determinante (ABC) verschwindet und weder zwei Zeilen noch zwei Colonnen proportional sind, und wenn zugleich keine der drei andern Determinanten (DBC), (ADC), (ABD) verschwindet, so sind die Coordinaten des Schnittpunkts sämmtlich unendlich gross, die drei Ebenen schneiden sich also in drei parallelen Geraden, die keiner Coordinatenebene parallel sind. Verschwindet hingegen noch eine der drei andern Determinanten, z. B. (DBC), so hat man durch Entwicklung der Determinanten (ABC) und (DBC) die beiden Gleichungen.

3. $$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot A_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}\cdot A_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot A_3 = 0,$$

4. $$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot D_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}\cdot D_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot D_3 = 0.$$

Fügt man hierzu noch eine der beiden identischen Gleichungen $(BBC) = 0$ und $(CBC) = 0$, oder entwickelt:

5. $$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot B_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}\cdot B_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot B_3 = 0,$$

6. $$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot C_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}\cdot C_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot C_3 = 0.$$

so folgt, indem man 3., 4., 5. und dann 3., 4., 6 zusammennimmt, noch das Verschwinden der beiden übrigen Determinanten:

$$(ABD) = 0, \quad (ADC) = 0.$$

In diesem Falle sind also die Coordinaten des Schnittpunkts sämmtlich unbestimmt. Da $(ACD) = 0$ und $(BCD) = 0$, so verschwindet für alle Werthe von x und y auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1x + B_1y, & C_1 & D_1 \\ A_2x + B_2y, & C_2 & D_2 \\ A_3x + B_3y, & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man die Glieder der zweiten Reihe mit z, und addirt dann die dritte und die vierte Reihe zur ersten, so entsteht die Identität

$$\begin{vmatrix} A_1x + B_1y + C_1z + D_1, & C_1, & D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2, & C_2, & D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3, & C_3, & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man nach den Gliedern der ersten Reihe und bezeichnet die drei Determinanten aus je zwei Colonnen der Elemente

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

mit m_1, m_2, m_3, so erhält man

7. $$m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 = 0.$$

Dieser Identität zufolge wird für jeden Punkt, für dessen Coordinaten die Polynome T_1 und T_2 verschwinden, auch das Polynom T_3 gleich Null, folglich geht die Ebene T_3 durch die Schnittlinie der Ebenen T_1 und T_2.

Umgekehrt: Wenn drei Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ dieselbe Gerade enthalten, so giebt es drei Zahlen m_1, m_2, m_3, durch welche die Identität hergestellt wird:

$$m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 = 0.$$

Denn sind T_{10}, T_{20} die Werthe, welche die Polynome T_1 und T_2 für einen ausserhalb der Schnittlinie T_1T_2 auf T_3 gelegenen Punkt P_0 annehmen, so bilde man die Ebenengleichung.

8. $$T_{20}\cdot T_1 - T_{10}\cdot T_2 = 0.$$

Derselben wird von jedem Punkte genügt, für welchen $T_1 = T_2 = 0$, d. i. von jedem gemeinsamen Punkte der Ebenen T_1 und T_2; sowie von dem Punkte P_0. Folglich ist die Ebene 8. identisch mit T_3, und es giebt daher eine Zahl m_1, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_1T_3 = T_{20}\cdot T_1 - T_{10}\cdot T_2.$$

Dies ist aber die behauptete Identität, wenn man nur m_2 und m_3 durch $-T_{20}$ und T_{10} ersetzt.

9. Vier Ebenen $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante des Systems der vier Gleichungen verschwindet, also wenn

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Unter dieser Bedingung giebt es vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, für welche

$$
\begin{aligned}
m_0A_0 + m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 &= 0,\\
m_0B_0 + m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3 &= 0,\\
m_0C_0 + m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3 &= 0,\\
m_0D_0 + m_1D_1 + m_2D_2 + m_3D_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z, und addirt, so erhält man die Identität

$$m_0T_0 + m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 = 0.$$

Wenn also vier Ebenen durch einen Punkt gehen, so giebt es vier von Null verschiedene Zahlen, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_0T_0 + m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3 \equiv 0.$$

Umgekehrt: Wenn es vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, giebt, durch welche diese Identität hergestellt wird, so haben die vier Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 einen Punkt gemein.

10. Sind $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen in Normalform, so sind die Abstände eines Punktes P von diesen Ebenen $p_1 = -T_1$, $p_2 = -T_2$. Ein Punkt, der gleiche oder entgegengesetzt gleiche Abstände von den beiden Ebenen hat, erfüllt also die Gleichung $T_1 = T_2$, bez. $T_1 = -T_2$, d. i. $T_1 - T_2 = 0$, bez. $T_1 + T_2 = 0$.

Also sind $T_1 - T_2 = 0$ und $T_1 + T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen, welche die Winkel der Ebenen T_1 und T_2 halbiren; und zwar halbirt $T_1 - T_2 = 0$ den Winkel, in welchem der Nullpunkt liegt, $T_1 + T_2 = 0$ die Nebenwinkel desselben.

Es seien $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ die Gleichungen dreier Ebenen in Normalform. Die Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, welche die Winkel der Ecke halbiren, in welcher der Nullpunkt liegt, haben die Gleichungen:

$$\mathfrak{T}_1 \equiv T_2 - T_3 = 0, \quad \mathfrak{T}_2 \equiv T_3 - T_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_3 \equiv T_1 - T_2 = 0.$$

Die Summe $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3$ verschwindet identisch; also folgt (No. 8) der aus den Elementen bekannte Satz: Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbiren, schneiden sich in einer Geraden.

Die Ebenen, welche die übrigen Flächenwinkel der drei gegebenen Ebenen halbiren, haben die Gleichungen

$$\mathfrak{T}_1' \equiv T_2 + T_3 = 0, \quad \mathfrak{T}_2' \equiv T_3 + T_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_3' \equiv T_1 + T_2 \equiv 0.$$

Man erhält so für die drei Paar Halbirungsebenen die Zusammenstellung:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1 &\equiv T_2 - T_3 = 0, & \mathfrak{T}_1' &\equiv T_2 + T_3 = 0;\\
\mathfrak{T}_2 &\equiv T_3 - T_1 = 0, & \mathfrak{T}_2' &\equiv T_3 + T_1 = 0;\\
\mathfrak{T}_3 &\equiv T_1 - T_2 = 0, & \mathfrak{T}_3' &\equiv T_1 + T_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, sind folgende Identitäten erfüllt:

$$\mathfrak{T}_1' - \mathfrak{T}_2' + \mathfrak{T}_3 \equiv 0, \quad \mathfrak{T}_2' - \mathfrak{T}_3' + \mathfrak{T}_1 \equiv 0, \quad \mathfrak{T}_3' - \mathfrak{T}_1' + \mathfrak{T}_2 \equiv 0.$$

Hieraus folgt: Die drei Paar Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke und deren Nebenwinkel halbiren, gehen viermal zu je dreien durch eine Gerade.

11. Eine Ebene, die durch den Schnitt von

$$T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{und}$$
$$T_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

geht, hat eine Gleichung von der Form

$$T \equiv m_1T_1 + m_2T_2 \equiv$$
$$(m_1A_1 + m_2A_2)\,x + (m_1B_1 + m_2B_2)y + (m_1C_1 + m_2C_2)z + m_1D_1 + m_2D_2 = 0.$$

Soll nun T normal zu einer Ebene

$$T_0 \equiv A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$$

sein, so muss die Bedingung erfüllt sein

$$(m_1A_1 + m_2A_2)A_0 + (m_1B_1 + m_2B_2)B_0 + (m_1C_1 + m_2C_2)C_0 = 0,$$

oder $\quad m_1(A_1A_0 + B_1B_0 + C_1C_0) + m_2(A_2A_0 + B_2B_0 + C_2C_0) = 0.$

Man kann daher wählen

$$m_1 = A_2A_0 + B_2B_0 + C_2C_0, \qquad m_2 = -(A_1A_0 + B_1B_0 + C_1C_0).$$

Setzt man nun abkürzungsweise

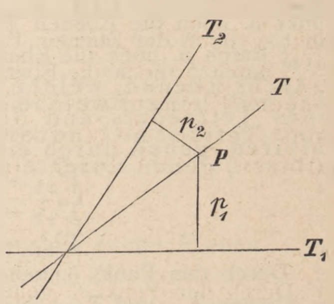
$A_2A_0+B_2B_0+C_2C_0=\mu_1$, $A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1=\mu_2$, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=\mu_0$, so sind die Gleichungen der Ebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_0$, die normal zu T_1, T_2, T_0 sind und durch die gegenüberliegenden Kanten der dreiseitigen Ecke $T_1T_2T_0$ gehen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1 &\equiv \mu_2T_2 - \mu_0T_0 = 0,\\
\mathfrak{T}_2 &\equiv \mu_0T_0 - \mu_1T_1 = 0,\\
\mathfrak{T}_0 &\equiv \mu_1T_1 - \mu_2T_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Die Summe $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_0$ verschwindet identisch; also haben wir den Satz: Die Ebenen, welche die Kanten einer dreiseitigen Ecke auf die gegenüberliegenden Seiten normal projiciren, gehen durch eine Gerade.

12. Die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, deren Abstände von zwei Ebenen ein gegebenes Verhältniss $m_2 : m_1$ haben, ergiebt sich, wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Normalgleichungen der Ebenen sind, aus

$$p_1 : p_2 = m_2 : m_1, \quad p_1 = -T_1, \quad p_2 = -T_2, \quad \text{zu}$$
$$m_1T_1 - m_2T_2 = 0.$$



(M. 442.)

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die durch die Kante T_1T_2 geht. Aus einem Normalschnitte der drei Ebenen ist ersichtlich, dass

$$p_1 : p_2 = \sin T_1T : \sin TT_2,$$

mithin theilt die Ebene T den Flächenwinkel T_1T_2 im Sinusverhältniss $m_2 : m_1$, d. h. so, dass $\sin T_1T : \sin TT_2 = m_2 : m_1$, und zwar geht T im Falle eines positiven Verhältnisses, $m_2 : m_1$ durch den Winkel, in welchem der Nullpunkt liegt, im Falle eines negativen durch die beiden Nebenwinkel.

13. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_0 = 0$ die Normalgleichungen der Seiten einer Ecke, und theilt man die Winkel T_1T_2, T_2T_0, T_0T_1 der Ecke der Reihe nach in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$, so sind die Gleichungen dieser drei Theilungsebenen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_0 &\equiv \frac{1}{\mu_1}T_1 - \frac{1}{\mu_2}T_2 = 0,\\
\mathfrak{T}_1 &\equiv \frac{1}{\mu_2}T_2 - \frac{1}{\mu_0}T_0 = 0,\\
\mathfrak{T}_2 &\equiv \frac{1}{\mu_0}T_0 - \frac{1}{\mu_1}T_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_0 \equiv 0$; man hat daher den allgemeinen Satz: Die Ebenen, welche die Winkel einer Ecke der Reihe nach in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$ theilen, gehen durch eine Gerade.

Die Sätze 10 und 11 sind als besondere Fälle dieses Satzes zu betrachten.

14. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ die Normalgleichungen der Ebenen eines Tetraeders, in dessen Innern der Nullpunkt liegt, so haben die Halbirungsebenen der Tetraëderwinkel und ihrer Supplemente die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{T}_{12} \equiv T_1 - T_2 = 0, & \mathrm{T}'_{12} \equiv T_1 + T_2 = 0, \\ \mathrm{T}_{13} \equiv T_1 - T_3 = 0, & \mathrm{T}'_{10} \equiv T_1 + T_3 = 0, \\ \mathrm{T}_{14} \equiv T_1 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{14} \equiv T_1 + T_4 = 0, \\ \mathrm{T}_{23} \equiv T_2 - T_3 = 0, & \mathrm{T}'_{23} \equiv T_2 + T_3 = 0, \\ \mathrm{T}_{24} \equiv T_2 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{24} \equiv T_2 + T_4 = 0, \\ \mathrm{T}_{34} \equiv T_3 - T_4 = 0, & \mathrm{T}'_{34} \equiv T_3 + T_4 = 0. \end{array}$$

Hieraus folgt die Identität:

1. $$\mathrm{T}_{12} + \mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}_{14} \equiv 0.$$

Diese vier Halbirungsebenen gehen also durch einen Punkt; da nun bekanntlich T_{13} mit T_{12} und T_{14}, sowie T_{24} mit T_{12} und T_{23} durch eine Gerade geht, so folgt: Die sechs Ebenen, welche die Winkel eines Tetraëders halbiren, gehen durch einen Punkt.

Ferner ergeben sich noch die Identitäten:

2. $$\mathrm{T}_{12} + \mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}'_{34} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
3. $$\mathrm{T}_{23} + \mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}'_{12} + \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
4. $$\mathrm{T}_{12} - \mathrm{T}_{14} + \mathrm{T}'_{23} - \mathrm{T}'_{34} \equiv 0,$$
5. $$\mathrm{T}_{34} - \mathrm{T}_{14} - \mathrm{T}'_{23} + \mathrm{T}'_{12} \equiv 0.$$

Durch den Punkt 2. gehen, wie man aus Satz 10 schliesst, noch die Ebenen T_{13} (weil sie mit T_{12} und T_{23} durch eine Gerade geht), sowie T'_{24} (weil sie mit T_{23} und T'_{34} durch eine Gerade geht). Ebenso findet man, dass durch den Punkt 3. noch die Ebenen T_{24} und T'_{13}; durch 4. noch die Ebenen T_{24} und T'_{13}; durch 5. noch die Ebenen T_{13} und T'_{24} gehen; man hat daher den Satz: Je sechs Ebenen, welche drei an einer Ebene liegende Aussenwinkel eines Tetraëders und die drei nicht anliegenden Tetraëderwinkel halbiren, gehen durch einen Punkt. Man hat ferner

6. $$\mathrm{T}'_{12} - \mathrm{T}'_{23} + \mathrm{T}'_{34} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
7. $$\mathrm{T}'_{13} - \mathrm{T}'_{34} + \mathrm{T}'_{24} - \mathrm{T}'_{14} \equiv 0,$$
8. $$\mathrm{T}'_{14} - \mathrm{T}'_{24} - \mathrm{T}'_{23} - \mathrm{T}'_{13} \equiv 0.$$

Durch den Punkt 6. gehen noch die Ebenen T_{13} und T_{24}; durch 7. noch die Ebenen T_{14} und T_{32}; durch 8. noch die Ebenen T_{12} und T_{34}. Hieraus folgt: Je sechs Halbirungsebenen zweier gegenüberliegenden Tetraëderwinkel und der vier nicht neben diesen liegenden Aussenwinkel gehen durch einen Punkt.

15. Die Coordinaten eines Punktes, der von den beiden Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände hat, genügen der Bedingung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

Hieraus folgt für x, y, z die lineare Gleichung

$$T \equiv 2(x_2 - x_1)\cdot x + 2(y_2 - y_1)\cdot y + 2(z_2 - z_1) z - (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene. Wird die Strecke P_1P_2 mit d bezeichnet, so folgt für die Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Coordinatenachsen bildet (No. 1)

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Dieselben Winkel (§ 1, No. 2) bilden die Gerade P_1P_2 mit den Achsen.

Ferner ist ersichtlich, dass die Gleichung $T = 0$ identisch erfüllt wird, wenn man für x, y, z die Werthe

$$x = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1),$$

d. i. die Coordinaten des Mittelpunkts der Strecke P_1P_2 einsetzt. Daher hat man den Satz: Der Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände haben, ist die Ebene, welche die Strecke P_1P_2 normal halbirt.

Die Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ normal halbiren, haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{23} &\equiv 2(x_2 - x_3)\cdot x + 2(y_2 - y_3)\cdot y + 2(z_2 - z_3)\cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0, \\ \mathfrak{T}_{31} &\equiv 2(x_3 - x_1)\cdot x + 2(y_3 - y_1)\cdot y + 2(z_3 - z_1)\cdot z - (x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + z_3^2 - z_1^2) = 0, \\ \mathfrak{T}_{12} &\equiv 2(x_1 - x_2)\cdot x + 2(y_1 - y_2)\cdot y + 2(z_1 - z_2)\cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich die Identität $\mathfrak{T}_{23} + \mathfrak{T}_{31} + \mathfrak{T}_{12} = 0$. Dieselbe lehrt den Satz: Die drei Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbiren, schneiden sich in einer Geraden.

Die Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ normal halbiren, haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{12} &\equiv 2(x_1 - x_2)\cdot x + 2(y_1 - y_2)\cdot y + 2(z_1 - z_2)\cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0, \\ \mathfrak{T}_{23} &\equiv 2(x_2 - x_3)\cdot x + 2(y_2 - y_3)\cdot y + 2(z_2 - z_3)\cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0, \\ \mathfrak{T}_{34} &\equiv 2(x_3 - x_4)\cdot x + 2(y_3 - y_4)\cdot y + 2(z_3 - z_4)\cdot z - (x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + z_3^2 - z_4^2) = 0, \\ \mathfrak{T}_{41} &\equiv 2(x_4 - x_1)\cdot x + 2(y_4 - y_1)\cdot y + 2(z_4 - z_1)\cdot z - (x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 + z_4^2 - z_1^2) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{T}_{12} + \mathfrak{T}_{23} + \mathfrak{T}_{34} + \mathfrak{T}_{42} \equiv 0$, und daher der Satz: Die vier Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks normal halbiren, gehen durch einen Punkt; dieser Punkt ist das Centrum der dem Viereck umgeschriebenen Kugel. Durch den Punkt geht auch die Ebene $\mathfrak{T}_{13}$, welche die Strecke P_1P_3 normal halbirt (da sie mit $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}_{23}$ durch eine Gerade geht) und die Ebene $\mathfrak{T}_{24}$, die die Strecke P_2P_4 normal halbirt (da diese mit $\mathfrak{T}_{23}$ und $\mathfrak{T}_{34}$ durch eine Gerade geht). Man kann daher den obigen Satz auch durch den folgenden ersetzen: Die sechs Ebenen, welche die Kanten eines Tetraëders normal halbiren, treffen sich in einem Punkte.

---

16. Die Punkte, deren Coordinaten den Gleichungen zweier Ebenen

1. $$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
2. $$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

genügen, liegen auf der Geraden, die den beiden Ebenen gemeinsam ist; eine gerade Linie im Raume wird also durch den Verein zweier linearen Gleichungen dargestellt. Eliminirt man aus den Gleichungen 1. und 2. der Reihe nach die Coordinaten z, y, x, so erhält man die Gleichungen der Normalprojectionen der Geraden auf die drei Coordinatenebenen, nämlich

3. Horizontalprojection: $(AC)\,x + (BC)\,y + (DC) = 0$,
4. Verticalprojection: $(AB)\,x + (CB)\,z + (DB) = 0$,
5. Seitliche Projection: $(BA)\,y + (CA)\,z + (DA) = 0$,

wenn man mit (MN) die Determinante bezeichnet:

$$(MN) \equiv \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}.$$

Von den Coordinaten der Punkte einer Ebene sind zwei willkürlich, z. B. x und y; die dritte z ist von ihnen abhängig; sie ergiebt sich aus der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ der Ebene zu

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C}.$$

Von den Coordinaten der Punkte einer Geraden ist dagegen nur eine willkürlich, z. B. x; die beiden andern ergeben sich aus den beiden Gleichungen einer Geraden, z. B. aus 3. und 4. zu

$$y = -\frac{(AC)x + (DC)}{(BC)}, \quad z = -\frac{(AB)x + (DB)}{(CB)}.$$

17. Ist P ein Punkt einer Geraden G, die durch den Punkt P_1 geht und mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, und wird die Strecke P_1P mit ρ bezeichnet, so hat man

$$x - x_1 = \rho \cos\alpha, \quad y - y_1 = \rho\cos\beta, \quad z - z_1 = \rho\cos\gamma;$$

eliminirt man ρ, so erhält man:

1. $$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

dies sind also die Gleichungen der Geraden G. Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection einer Geraden in der Form gegeben:

2. $$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

und ist P_1 ein Punkt dieser Geraden, so hat man

$$y_1 = Mx_1 + Q, \quad z_1 = Nx_1 + R,$$

also durch Subtraction:

$$y - y_1 = M(x - x_1), \quad z - z_1 = N(x - x_1).$$

Daher hat man durch Vergleich mit 1.:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : M : N.$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

schliesst man hieraus

3. $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}.$$

Für den Winkel δ zweier Geraden, deren Gleichungen sind

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$
$$y = M_1x + Q_1, \quad z = N_1x + R_1,$$

ergiebt sich hiernach

$$\cos\delta = \frac{1 + MN_1 + NN_1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\cdot\sqrt{1 + M_1^2 + N_1^2}}.$$

Die beiden Geraden sind daher normal zu einander, wenn

$$1 + MM_1 + NN_1 = 0;$$

sie sind parallel, wenn ihre Projectionen parallel sind, also wenn $M = M_1$, $N = N_1$.

18. Der Winkel ε einer Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R$$

mit der Ebene

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

ist das Complement des Winkels der Geraden und einer Normalen zur Ebene T, daher hat man

1. $$\sin\varepsilon = \frac{A + MB + NC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{1 + M^2 + N^2}}.$$

Die Gerade ist daher parallel zur Ebene T, wenn

2. $$A + MB + NC = 0;$$

sie ist normal zu T, wenn

3. $$A : B : C = 1 : M : N.$$

19. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R$$

mit der Ebene

$$T \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

sind die Lösungen des Systems dieser drei Gleichungen. Man erhält

$$x = -\frac{BQ + CR + D}{A + BM + CN}, \quad y = \frac{-M(CR + D) + Q(CN + A)}{A + BM + CN},$$
$$z = \frac{-N(BQ + D) + R(BM + A)}{A + BM + CN}.$$

Diese Werthe werden unendlich gross, wenn $A + BM + CN = 0$; diese Bedingung des Parallelismus einer Geraden und einer Ebene ist schon in voriger Nummer gefunden worden.

Wenn die Bedingungen $A + BM + CN = 0$ und $BQ + CR + D = 0$ erfüllt sind, so ist auch

$$-M(BQ + CR + D) + Q(A + BM + CN) \equiv -M(CR + D) + Q(CN + A) = 0,$$
$$-N(BQ + CR + D) + Q(A + CM + CN) \equiv -N(BQ + D) + R(BM + C) = 0;$$

die Coordinaten des Schnittpunktes sind also unbestimmt; folglich ist die Gerade ganz in der Ebene enthalten.

20. Jede Ebene, die normal zu der Geraden G ist:

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

hat eine Gleichung von der Form (No. 18)

$$x + My + Nz + D = 0,$$

in welcher D willkürlich ist. Geht die Ebene durch einen gegebenen Punkt P_1, so ist

$$x_1 + My_1 + Nz_1 + D = 0;$$

durch Subtraction der letzten Gleichungen wird D eliminirt; man erhält so die Gleichung der durch P_1 gehenden Normalebene zu G

$$T \equiv x - x_1 + M(y - y_1) + N(z - z_1) = 0.$$

Die Normalprojection Π des Punktes P_1 auf die Gerade G ist der Schnitt der Ebene T mit der Geraden G, also ergeben sich die Coordinaten von Π nach den Formeln der vorigen Nummer, indem man in denselben A, B, C, D der Reihe nach durch 1, M, N, $-(x_1 + My_1 + Nz_1)$ ersetzt:

$$\xi = \frac{-MQ - NR + x_1 + My_1 + Nz_1}{1 + M^2 + N^2},$$
$$\eta = \frac{-MNR + Q + QN^2 + M(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2},$$
$$\zeta = \frac{-MNQ + R + RM^2 + N(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2}.$$

Der Abstand des Punktes P_1 von der Geraden G kann aus den Coordinaten von P_1 und Π berechnet werden.

21. Zwei Gerade haben einen gemeinsamen Punkt, wenn der Verein der Gleichungen der Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$
$$y = M_1x + Q_1, \quad z = N_1x + R_1$$

durch ein System von Werthen x, y, z erfüllbar ist. Durch Subtraction ergeben sich die beiden Gleichungen

$$0 = (M - M_1)x + (Q - Q_1), \quad 0 = (N - N_1)x + (R - R_1);$$

hieraus folgt als Bedingung dafür, dass sich zwei Gerade schneiden

$$\begin{vmatrix} M - M_1, & Q - Q_1 \\ N - N_1, & R - R_1 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Durch zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, lassen sich zwei zu einander parallele Ebenen legen. Die Gleichungen der beiden Geraden G_1 und G_2 seien

$$y = M_1 x + Q_1, \quad z = N_1 x + R_1;$$
$$y = M_2 x + Q_2, \quad z = N_2 x + R_2.$$

Die Gleichungen der beiden Parallelebenen können in der Form vorausgesetzt werden

$$x + By + Cz + D_1 = 0, \quad x + By + Cz + D_2 = 0.$$

Da G_1 in T_1 und G_2 in T_2 enthalten ist, so bestehen für B, C, D_1, D_2 die vier Gleichungen:

1. $1 + BM_1 + CN_1 = 0$, 3. $BQ_1 + CR_1 + D_1 = 0$,
2. $1 + BM_2 + CN_2 = 0$; 4. $BQ_2 + CR_2 + D_2 = 0$.

Aus 1. und 2. erhält man:

$$B = \frac{N_1 - N_2}{(MN)}, \quad C = -\frac{M_1 - M_2}{(MN)};$$

aus 3. und 4. folgt weiter

$$D_1 = \frac{-Q_1(N_1 - N_2) + R_1(M_1 - M_2)}{(MN)}, \quad D_2 = \frac{-Q_2(N_1 - N_2) + R_2(M_1 - M_2)}{(MN)}.$$

Die Gleichungen der beiden Parallelebenen sind daher

$$T_1 \equiv (M_1 N_2 - M_2 N_1)x + (N_1 - N_2)y - (M_1 - M_2)z + R_1(M_1 - M_2) - Q_1(N_1 - N_2) = 0,$$
$$T_2 \equiv (M_1 N_2 - M_2 N_1)x + (N_1 - N_2)y - (M_1 - M_2)z + R_2(M_1 - M_2) - Q_2(N_1 - N_2) = 0.$$

Die Winkel α, β, γ, welche die gemeinsame Normale der beiden Geraden G_1 und G_2 mit den Achsen bildet, ergeben sich daher aus

$$\cos\alpha = \frac{1}{S}, \quad \cos\beta = \frac{N_1 - N_2}{S}, \quad \cos\gamma = -\frac{M_1 - M_2}{S}$$
$$S \equiv \sqrt{(M_1 N_2 - M_2 N_1)^2 + (N_1 - N_2)^2 + (M_1 - M_2)^2}.$$

Der kürzeste Abstand d der beiden Geraden ist dem Abstande der parallelen Ebenen T_1 und T_2 gleich, also ist

$$d = d_2 - d_1 = \frac{(Q_1 - Q_2)(N_1 - N_2) - (R_1 - R_2)(M_1 - M_2)}{S}.$$

---

23. Statt, wie bisher geschehen, den Punkt, können wir auch die Ebene als Raumelement verwenden, in ähnlicher Weise, wie wir in der analytischen Planimetrie die Gerade verwendet haben. Als orthogonale Coordinaten der Ebene T definiren wir die reciproken Achsenabschnitte und setzen

$$\frac{1}{OS_1} = u, \quad \frac{1}{OS_2} = v, \quad \frac{1}{OS_3} = w.$$

Sind die Coordinaten einer Ebene durch eine Gleichung verbunden

$$f(u, v, w) = 0,$$

so sind nur zwei Coordinaten, z. B. u und v, willkürlich, die dritte folgt aus ihnen gemäss dieser Gleichung; aus den sämmtlichen Ebenen des Raumes wird also durch die Gleichung eine unendlich grosse Anzahl ausgewählt. Man gebe u einen bestimmten Werth u_1 und hierauf v eine Reihe um endliche Beträge von einander verschiedener, auf einander folgender Werthe v_1', v_1'', v_1''' u. s. w. und bestimme die zu u_1 und v_1', v_1'', v_1''' ... gemäss der Gleichung $f(u, v, w) = 0$ zugehörigen Werthe w_1' w_1'', w_1''' .... Hierauf nehme man für u einen andern Werth u_2, für v eine Reihe von Werthen v_2', v_2'', v_2''' ... und bestimme die zugehörigen w_2', w_2'', w_2''' ... Dies kann man beliebig fortsetzen. Man erhält dadurch eine Anzahl von Ebenen, deren Coordinaten die Gleichung $f(u, v, w) = 0$ erfüllen. Diese Ebenen bilden eine Polyëder-Schale. Lässt man nun die Differenz der Werthe u_1, u_2, ..., sowie für jedes u die Differenz der Werthe v', v'', v''' ... verschwindend klein werden, so erhält das Polyeder unendlich kleine Flächen und die Winkel zweier benachbarter Polyëderflächen werden verschwindend klein (oder, was auf dasselbe hinauskommt, unendlich wenig von einem gestreckten Winkel verschieden); das Polyëder geht daher in eine krumme Oberfläche über, welche von den Ebenen T berührt (umhüllt) wird.

24. Alle Ebenen, die dasselbe u und v haben, haben dieselbe Horizontalspur; alle Ebenen, die zu demselben u und w gehören, haben dieselbe Verticalspur; alle Ebenen, die in Bezug auf die Coordinaten v und w übereinstimmen, haben dieselbe seitliche Spur. Die Ebenen, die dieselbe Coordinate u haben, gehen durch denselben Punkt der X-Achse; die Ebenen, die dieselbe Coordinate v haben, gehen durch denselben Punkt der Y-Achse; und die Ebenen, die dieselbe Coordinate w haben, gehen durch denselben Punkt der Z-Achse. Insbesondere treffen die Ebenen, für welche $u = 0$, bez. $v = 0$, oder $w = 0$ ist, die Achse OX, bez. OY oder OZ, in einem unendlich fernen Punkte.

Für die Ebenen, welche durch den Nullpunkt gehen, ist $u = \infty$, $v = \infty$, $w = \infty$; doch hat man diesen unendlich grossen Werthen für jede durch O gehende Ebene bestimmte Verhältnisse beizulegen, nämlich die Verhältnisse der Coordinaten einer Parallelebene.

25. Ersetzt man in der Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die reciproken Achsenabschnitte $1:a$, $1:b$, $1:c$ der Reihe nach durch u, v, w, so erhält man

$$ux + vy + wz - 1 = 0.$$

Sieht man in dieser Gleichung alle sechs Coordinaten als veränderlich an, so erscheint sie als die Bedingung, welche die Coordinaten eines Punktes und einer Ebene erfüllen, wenn der Punkt und die Ebene vereint liegen (d. i. wenn der Punkt auf der Ebene liegt. Giebt man u, v, w bestimmte Werthe, so ist

$$ux + vy + wz - 1$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, die auf der Ebene liegen, die die gegebenen Werthe u, v, w zu Coordinaten hat, ist also die Gleichung dieser Ebene. Ertheilt man hingegen den Coordinaten x, y, z gegebene Werthe, so ist $ux + vy + wz - 1 = 0$ die Bedingungsgleichung für die Coordinaten aller Ebenen, die durch den Punkt P gehen, der die gegebenen Coordinaten x, y, z hat; wir nennen sie daher in diesem Falle die Gleichung dieses Punktes P.

Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene ist die Gleichung eines eindeutig bestimmten Punktes. Vergleicht man die allgemeine lineare Gleichung in Ebenencoordinaten

1. $$Au + Bv + Cw + D = 0,$$

mit

$$xu + yv + zw - 1 = 0,$$

so sieht man, dass 1. die Gleichung des Punktes ist, der die Coordinaten hat

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D.$$

Die Gleichungen

$$Au + Bv + D = 0, \quad Au + Cw + D = 0, \quad Bv + Cw + D = 0$$

sind die Gleichungen von Punkten, deren Coordinaten der Reihe nach sind

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = 0;$$
$$x = -A:D, \quad y = 0, \quad z = -C:D;$$
$$x = 0, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D;$$

also sind

$$P' \equiv Au + Bv + D = 0, \quad P'' \equiv Au + Cw + D = 0, \quad P''' \equiv Bv + Cw + D = 0,$$

die Gleichungen der Projectionen des Punktes

$$P \equiv Au + Bv + Cw + D = 0.$$

26. Die Gleichung des Schnittpunktes dreier Ebenen T_1, T_2, T_3 ergiebt sich durch Elimination von A, B, C, D aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw + D &= 0, \\ Au_1 + Bv_1 + Cw_1 + D &= 0, \\ Au_2 + Bv_2 + Cw_2 + D &= 0, \\ Au_3 + Bv_3 + Cw_3 + D &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus

$$P \equiv \begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass vier Ebenen T_0, T_1, T_2, T_3 durch einen Punkt gehen, ist daher:

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Die Coordinaten des Punktes P, der die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat die Coordinaten

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

und mithin die Gleichung:

$$P \equiv (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\, u + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\, v + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\, w - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

oder: $P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$, wobei

$$P_1 \equiv x_1 u + y_1 v + z_1 w - 1 = 0, \quad P_2 \equiv x_2 u + y_2 v + z_2 w - 1 = 0$$

die Gleichungen der Punkte P_1 und P_2 in Normalform (d. i. mit dem Absolutgliede $-$ 1) sind.

Umgekehrt: Bildet man aus zwei linearen Functionen

$$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 \quad \text{und} \quad P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2$$

der Ebenencoordinaten eine neue lineare Function $P \equiv \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$, so ist $P = 0$ die Gleichung des Punktes, der die Strecke der Punkte $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ in dem Verhältniss theilt:

$$P_1 P : P P_2 = \mu_1 D_1 : \mu_2 D_2.$$

28. Der Punkt P, dessen Coordinaten aus den Coordinaten dreier gegebenen Punkte P_1, P_2, P_3 nach den Formeln abgeleitet werden:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

theilt das Dreieck $P_1P_2P_3$ im Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, d. h. es ist

$$P_2 P_3 P : P_3 P_1 P : P_1 P_2 P = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$

Bezeichnet man nämlich mit i, k, l irgend eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, so hat der Punkt Π_l, welcher P_iP_k im Verhältniss $\lambda_i : \lambda_k$ theilt, die Coordinaten:

$$\xi_l = \frac{\lambda_i x_i + \lambda_k x_k}{\lambda_i + \lambda_k}, \quad \eta_l = \frac{\lambda_i y_i + \lambda_k y_k}{\lambda_i + \lambda_k}, \quad \zeta_l = \frac{\lambda_i z_i + \lambda_k z_k}{\lambda_i + \lambda_k}.$$

Da nun die Coordinaten von P durch die Formeln gewonnen werden:

$$x = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\xi_l + \lambda_l x_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad y = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\eta_l + \lambda_l y_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad z = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\zeta_l + \lambda_l z_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}.$$

so folgt, dass der Punkt P die Strecke $P_l\Pi_l$ in dem Verhältnisse $(\lambda_i + \lambda_k) : \lambda_l$ theilt.

Daher hat man $P_l\Pi_l : P\Pi_l = (P_lP + P\Pi_l) : P\Pi_l = (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l) : \lambda_l$.

Nun ist aber $P_iP_kP_l : P_iP_kP = P_l\Pi_l : P\Pi_l$, also folgt

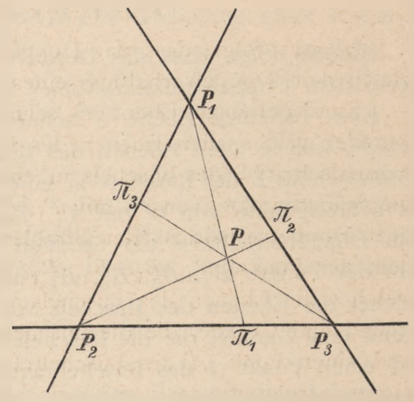
$$P_iP_kP : P_iP_kP_l = \lambda_l : (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l).$$

Hieraus ergeben sich die drei Formeln:

$$\begin{aligned} P_2P_3P : P_1P_2P_3 &= \lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ P_3P_1P : P_1P_2P_3 &= \lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ P_1P_2P : P_1P_2P_3 &= \lambda_3 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \end{aligned}$$

also ist wie behauptet worden war

$$P_2P_3P : P_3P_1P : P_1P_2P = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$



(M. 443.)

29. Aus den Coordinaten dieses Punktes P ergiebt sich seine Gleichung sofort zu $P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, wobei $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ die Normalgleichungen der Punkte $P_1P_2P_3$ sind. Umgekehrt: Bildet man aus drei linearen Functionen der Ebenencoordinaten

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1, \\ P_2 &\equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_3, \\ P_3 &\equiv A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3, \end{aligned}$$

eine neue lineare Function

$$P \equiv \mu_1 P + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3,$$

so ist $P = 0$ die Gleichung des Punktes, der das Dreieck $P_1P_2P_3$ der Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ in dem Verhältnisse $\mu_1 D_1 : \mu_2 D_2 : \mu_3 D_3$ theilt.

Hieraus schliesst man weiter: Wenn man zu vier linearen Functionen der Ebenencoordinaten P_0, P_1, P_2, P_3 vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3 finden kann, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_0 P_0 + m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 \equiv 0,$$

so liegen die vier Punkte $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ auf einer Ebene.

Denn aus dieser Identität folgt

$$P_0 \equiv -\frac{m_1}{m_0} P_1 - \frac{m_2}{m_0} P_2 - \frac{m_3}{m_0} P_3,$$

also liegt P_0 auf der Ebene $P_1P_2P_3$.

30. Die Ebenen, deren Coordinaten dem Vereine zweier linearen Gleichungen genügen

$$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0, \quad P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0,$$

gehen durch die beiden Punkte P_1 und P_2, umhüllen daher die Gerade P_1P_2.

Eine Gerade wird also durch zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten dargestellt. Bildet man die Identitäten

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv C_2 \cdot P_1 - C_1 \cdot P_2 \equiv (AC)\, u + (BC)\, v + (DC), \\ S_2 &\equiv B_2 \cdot P_1 - B_1 \cdot P_2 \equiv (AB)\, u + (CB)\, w + (DB), \\ S_3 &\equiv A_2 \cdot P_1 - A_1 \cdot P_2 \equiv (BA)\, v + (CA)\, w + (DA), \end{aligned}$$

so erkennt man, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Gleichungen von Punkten sind, die auf der Geraden P_1P_2 liegen; da ferner in jeder der Functionen S nur zwei Coordinaten vorkommen, so folgt, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$

die Gleichungen der Spurpunkte der Geraden auf der XY-, XZ- und YZ-Ebene sind.

---

31. Unter dem Doppelverhältniss $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ von vier Ebenen eines Büschels (d. i. von vier Ebenen, die durch dieselbe Gerade gehen) T_1, T_2, T_3 T_4 versteht man den Quotienten

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2}.$$

Hieraus folgt, dass das Doppelverhältniss von vier Ebenen eines Büschels gleich dem Doppelverhältniss eines Normalschnitts derselben ist.

Eine beliebige Ebene S schneide den Träger des Büschels (d. i. die Gerade, welche allen Ebenen des Büschels gemein ist) im Punkte A, und einen Normalschnitt Σ des Büschels in einer Geraden G; ferner seien B_1, B_2, B_3, B_4 die Schnittpunkte von G mit T_1, T_2, T_3, T_4. Alsdann ist $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ gleich dem Doppelverhältniss der Strahlen des Normalschnitts Σ, mithin auch gleich dem der Punkte B_1, B_2, B_3, B_4, und daher auch gleich dem der Geraden, in welcher die Ebenen des Büschels von der Ebene S geschnitten werden. Durch irgend eine Gerade, die die Büschelebenen in den Punkten C_1, C_2, C_3, C_4 trifft, und einen Punkt A des Büschelträgers ist eine Ebene S bestimmt; da nun das Doppelverhältniss der vier Ebenen dem der vier Geraden AC_1, AC_2, AC_3, AC_4 ist, so ist es auch gleich dem der vier Punkte C_1, C_2, C_3 C_4. Wir haben daher den Satz: Das Doppelverhältniss von vier Ebenen ist gleich dem Doppelverhältniss von vier Punkten, in denen sie von irgend einer Geraden geschnitten werden.

Der Begriff projectiver Gebilde kann nun auf Ebenenbüschel ausgedehnt werden. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so ist das Doppelverhältniss der vier Ebenen

$$T_1 = 0,\quad T_2 = 0,\quad T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0,\quad T \equiv \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0$$
$$(T_1 T_2 T_3 T) = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Sind $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 \equiv b_1 R_1 + b_2 R_2 = 0$, die Gleichungen der den gleichbezifferten Ebenen entsprechenden Punkte einer Geraden, oder Ebenen eines Büschels, oder Strahlen eines Büschels (in irgend einer Ebene, bezogen auf ein in derselben liegendes Coordinatensystem), oder Kegelschnitte eines Büschels, oder Punkt- oder Strahlenpaare einer quadratischen Involution, so ist die Gleichung des der Ebene T entsprechenden Elements des projectiven Gebildes:

$$R \equiv \lambda_1 b_1 R_1 + \lambda_2 b_2 R_2 = 0.$$

§ 4. Die Kugel.

1. Sind a, b, c die Coordinaten des Kugelcentrums und ist ρ der Kugelradius, so ist ein Punkt P auf der Kugel gelegen, wenn seine Coordinaten der Gleichung genügen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2,$$

oder entwickelt:

1. $$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Dies ist daher die Gleichung der Kugel in Punktcoordinaten.

Sie ist vom zweiten Grade in den Coordinaten x, y, z. Eine allgemeine Gleichung zweiten Grades hat die Form:

2. $$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0.$$

Von derselben unterscheidet sich die Kugelgleichung dadurch, dass die Glieder x^2, y^2, z^2 denselben Coefficienten haben, und dass keine Glieder vorhanden sind, die die Produkte zweier Coordinaten enthalten. Umgekehrt sieht man leicht, dass jede Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten, in welcher $A = D = F$, und $B = C = E = 0$ ist, die Gleichung einer eindeutig bestimmten Kugel ist. Denn nach Division durch A erhält die Gleichung die Form:

3. $$x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Nz + Q = 0.$$

Durch Vergleich mit 1. sieht man, dass 3. die Gleichung einer Kugel ist mit den Centrumscoordinaten und dem Radius.

$$a = -L,\quad b = -M,\quad c = -N,\quad \rho = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - Q}.$$

Ist $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$, so schreibe man die Gleichung 3.

$$(x + L)^2 + (y + M)^2 + (z + N)^2 + (Q - L^2 - M^2 - N^2) = 0.$$

Unter der Voraussetzung $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$ sind alle vier Glieder dieses Polynoms bei realen Werthen von x, y, z positiv; also wird die Gleichung durch reale Werthe der Coordinaten nicht befriedigt. Man kann in diesem Falle die Gleichung als die einer Kugel mit realem Centrum und mit imaginärem Radius

$$\rho = i\sqrt{Q - L^2 - M^2 - N^2}$$

auffassen.

2. Legt man durch einen Punkt Π eine Gerade, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, und ist P ein Punkt dieser Geraden, so hat man für die Coordinaten von P (nach No. 17) die Formeln

$$x = \xi + r\cos\alpha,\quad y = \eta + r\cos\beta,\quad z = \zeta + r\cos\gamma.$$

Liegt der Punkt P auf der Kugel

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0,$$

so hat man:

$$(\xi + r\cos\alpha)^2 + (\eta + r\cos\beta)^2 + (\zeta + r\cos\gamma)^2 - 2a(\xi + r\cos\alpha) - 2b(\eta + r\cos\beta)$$
$$- 2c(\zeta + r\cos\gamma) + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von r, so erhält man in Rücksicht auf die Formel $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ die Gleichung:

$$r^2 + 2[(\xi - a)\cos\alpha + (\eta - b)\cos\beta + (\zeta - c)\cos\gamma]\cdot r + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$
$$- 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werthe r' und r'' für r; das Produkt derselben ist

1. $$r'r'' = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2;$$

dasselbe ist unabhängig von der Richtung der durch Π gezogenen Geraden und hängt nur von den Constanten der Kugelgleichung und den Coordinaten von Π ab. Wir haben daher den Satz: Wird ein Strahlenbündel (d. i. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden) von einer Kugel geschnitten, so sind die Produkte der Strecken, die auf jedem Strahle vom Träger des Bündels (Π) bis an die Kugel reichen, einander gleich.

Dieses constante Produkt heisst die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel. Wie man aus 1. sieht, ist die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel dem Werthe gleich, den die Gleichung der Kugel (in der Form No. 1, 1) für die Coordinaten des Punktes annimmt. Die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel ist positiv oder negativ, je nachdem Π von der Kugel ausgeschlossen wird, oder nicht; im ersteren Falle ist die Potenz gleich dem Quadrate der von Π an die Kugel gelegten Tangenten, im zweiten gleich dem Quadrate des Halbmessers des auf der Kugel gelegenen Kreises, dessen Centrum Π ist.

3. Für die Coordinaten der Punkte, die zwei Kugeln gemeinsam sind, besteht der Verein der Kugelgleichungen

1. $\quad K_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1 = 0,$

2. $\quad K_2 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2 = 0,$

wobei d_1 und d_2 abkürzungsweise für $a_1^2+b_1^2+c_1^2-\rho_1^2$ und $a_2^2+b_2^2+c_2^2-\rho_2^2$ gesetzt worden sind.

Durch Subtraction erhält man aus 1. und 2.

$$L \equiv K_1 - K_2 \equiv 2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+2(c_2-c_1)z-(d_2-d_1) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die normal zu der Geraden steht, welche die Centren der beiden Kugeln verbindet; man nennt diese Ebene die Chordalebene der beiden Kugeln. Wenn die Kugeln sich schneiden oder berühren, so ist $L=0$ die Gleichung ihrer Schnittebene bez. ihrer gemeinsamen Tangentenebene; und wenn die Chordalebene von den beiden Kugeln nicht getroffen wird, so haben dieselben keinen realen Punkt gemein.

Für jeden Punkt der Chordalebene ist $K_1-K_2=0$, also $K_1=K_2$; dies ergiebt den Satz: Jeder Punkt der Chordalebene zweier Kugeln hat für beide Kugeln gleiche Potenz. Umgekehrt sieht man leicht, dass jeder Punkt, der für beide Kugeln gleiche Potenz hat, auf der Chordalebene liegt.

4. Die Chordalebenen der drei Kugeln $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$ haben die Gleichungen:

$$L_{12} \equiv K_1-K_2 = 0, \quad L_{23} \equiv K_2-K_3 = 0, \quad L_{31} \equiv K_3-K_1 = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $L_{12}+L_{23}+L_{31} \equiv 0$, und daher der Satz: Die drei Chordalebenen dreier Kugeln schneiden sich in einer Geraden; diese Gerade ist normal zur Ebene der Kugelcentren und geht durch den Chordalpunkt der drei Kreise, welche diese Ebene mit den Kugeln gemein hat; sie ist der Ort der Punkte, die gleiche Potenz für die drei Kugeln haben. Diese Gerade wird als die Chordalachse der drei Kugeln bezeichnet.

Vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4, deren Centren die Ecken eines Tetraeders bilden, lassen sich zu sechs Paaren ordnen und ergeben daher sechs Chordalebenen; die Gleichungen derselben sind

$$\begin{aligned} L_{12} &\equiv K_1-K_2 = 0, & L_{23} &\equiv K_2-K_3 = 0,\\ L_{13} &\equiv K_1-K_3 = 0, & L_{24} &\equiv K_2-K_4 = 0,\\ L_{14} &\equiv K_1-K_4 = 0, & L_{34} &\equiv K_3-K_4 = 0. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt die Identität $L_{12}+L_{23}+L_{34}-L_{14} \equiv 0$. Da nun L_{23} mit L_{12} und L_{23}, sowie L_{34} mit L_{23} und L_{34} eine Gerade gemeinsam hat, so folgt der Satz: Die sechs Chordalebenen je zweier von vier Kugeln gehen durch einen Punkt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für die vier Kugeln; er heisst der Chordalpunkt der vier Kugeln.

Legt man von einem Punkte A aus eine Tangente an eine Kugel K und beschreibt eine Kugel K_1, welche A zum Centrum hat und durch den Berührungspunkt der Tangente geht, so schneiden sich die Kugeln K und K_1 unter rechten Winkeln. Damit ein Punkt A das Centrum einer Kugel sei, welche gegebene Kugeln K_1, K_2, K_3 .... normal schneidet, müssen die Längen der von A aus an die Kugeln gelegten Tangenten, von A bis zum Berührungspunkte gerechnet, gleich sein. Wir schliessen daher aus den obigen Sätzen: Der Ort der Centren der Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln normal schneiden, ist die Chordalebene der beiden Kugeln; der Ort der Centren der Kugeln, welche drei gegebene Kugeln normal schneiden, ist die Chordalachse der drei Kugeln; es giebt eine Kugel, die vier gegebene Kugeln normal schneidet, ihr Centrum ist der Chordalpunkt der vier Kugeln.

5. Ist $\quad K_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1$ und

$\quad K_2 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2$, so ist

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

die Gleichung einer Kugel; das Centrum hat die Coordinaten

$$a = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad c = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_1+\lambda_2};$$

dasselbe liegt daher auf der Geraden der Centren C_1 und C_2 der Kugeln $K_1=0$ und $K_2=0$ und theilt die Strecke K_1K_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$.

Durchläuft das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ alle Werthe, so erhält man eine unendliche Folge von (realen und imaginären) Kugeln; die Gesammtheit dieser Kugeln heisst ein Kugelbüschel.

Durch jeden Punkt P_0 des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels. Denn bezeichnet man mit K_{10}, K_{20} die Werthe, welche die Polynome K_1 und K_2 annehmen, wenn man in ihnen x, y, z durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 ersetzt, so geht K durch P_0, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} = 0.$$

Man kann daher $\lambda_1 = K_{20}$, $\lambda_2 = -K_{10}$ wählen und hat somit als Gleichung der gesuchten Kugel

$$K_{20}K_1 - K_{10}K_2 = 0.$$

Diese Gleichung wird nur dann unbestimmt, wenn $K_{10}=K_{20}=0$, d. i. wenn P_0 auf den Kugeln K_1 und K_2 zugleich liegt. Punkte, die K_1 und K_2 gemeinsam sind, gehören allen Kugeln des Büschels an.

Da es in der Gleichung einer Büschelkugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$ nur auf das Verhältniss der Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$ ankommt, so kann vorausgesetzt werden, dass $\lambda_1+\lambda_2=1$ sei, so dass dann $K=0$ in der Normalform erscheint (d. i. so, dass x^2, y^2 und z^2 den Coefficienten 1 haben).

6. Die Chordalebene zweier Kugeln K, K' der Büschels K_1, K_2

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0, \quad K' \equiv \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 = 0$$

hat die Gleichung

$$L \equiv K - K' \equiv (\lambda_1-\mu_1)K_1 + (\lambda_2-\mu_2)K_2 = 0.$$

Da vorausgesetzt wird, dass $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\mu_1+\mu_2=1$, so folgt, dass $\lambda_1-\mu_1 = -(\lambda_2-\mu_2)$, also ergiebt sich

$$L \equiv (\lambda_1-\mu_1)(K_1-K_2) = 0.$$

Mithin ist L mit der Chordalebene der Kugeln K_1 und K_2 identisch. Die Kugeln eines Büschels haben also eine gemeinsame Chordalebene. Aus jedem Punkte der Chordalebene eines Kugelbüschels als Centrum lässt sich daher eine Kugel construiren, die alle Kugeln des Büschels normal schneidet.

Sind $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ . . . die Chordalebenen, welche eine nicht zum Büschel gehörige Kugel $\mathfrak{K}=0$ mit den einzelnen Kugeln des Büschels K_1, K_2, K_3, K_4 . . . bestimmt, und ist

$$\begin{aligned} K_3 &\equiv \lambda_{13}K_1 + \lambda_{23}K_2 = 0, & \lambda_{13}+\lambda_{23} &= 1,\\ K_4 &\equiv \lambda_{14}K_1 + \lambda_{24}K_2 = 0, & \lambda_{14}+\lambda_{24} &= 1, \end{aligned}$$

so haben $\mathfrak{L}_3$ und $\mathfrak{L}_4$ die Gleichungen

$$\mathfrak{L}_3 \equiv \lambda_{13}K_1 + \lambda_{23}K_2 - \mathfrak{K} = 0, \quad \mathfrak{L}_4 \equiv \lambda_{14}K_1 + \lambda_{24}K_2 - \mathfrak{K} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4 \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14}) K_1 + (\lambda_{23} - \lambda_{24}) K_2.$$

Da nun $\lambda_{13} - \lambda_{14} = -(\lambda_{23} - \lambda_{24})$, so folgt die Identität

$$\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4 \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14})(K_1 - K_2) \equiv (\lambda_{13} - \lambda_{14}) L,$$

wobei $L \equiv K_1 - K_2 = 0$ die Gleichung der Chordalebene des Büschels ist. Dies ergiebt den Satz: Die Chordalebenen, die die Kugel eines Büschels mit einer nicht zum Büschel gehörigen Kugel bestimmen, treffen die Chordalebene des Büschels in derselben Geraden.

7. Um den Schnitt einer Ebene E mit einem Kugelbüschel zu untersuchen, nehmen wir die Ebene E zur XY-Ebene eines Coordinatensystems. Setzen wir nun in den Gleichungen der Büschelkugeln $z = 0$, so erhalten wir die Gleichungen der Schnittlinien der Ebene E mit den Kugeln des Büschels. Die Schnitte mit den Kugeln K_1, K_2, K sind daher die (realen oder imaginären) Kreise:

$$k_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + d_1 = 0,$$
$$k_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + d_2 = 0,$$
$$k \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0.$$

Eine Ebene E schneidet die Kugeln eines Büschels in Kreisen, die ein Kreisbüschel bilden; die Chordale dieses Kreisbüschels ist der Schnitt der Ebene E mit der Chordalebene L des Kugelbüschels.

Wenn das Kreisbüschel, in welchem das Kugelbüschel von der Ebene E geschnitten wird, keine realen Schnittpunkte hat, so giebt es bekanntlich auf der Büschelcentralen zwei Punkte, die als Büschelkreise mit verschwindend kleinem Radius zu betrachten sind. In diesen beiden Punkten wird die Ebene E durch je eine Kugel des Büschels berührt.

8. Eine Gerade G wird von den Kugeln eines Büschels in Punktepaaren einer quadratischen Involution getroffen; denn eine durch G gelegte Ebene durchschneidet das Kugelbüschel in einem Kreisbüschel. Die Asymptotenpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der Geraden mit Kugeln des Büschels. Es giebt also zwei Kugeln eines Büschels, die eine gegebene Gerade berühren; sie sind beide real oder beide imaginär; geht die Gerade durch einen gemeinsamen Punkt aller Büschelkugeln, so fallen die beiden berührenden Kugeln in eine zusammen.

9. Die gemeinsamen Punkte dreier Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, die nicht demselben Büschel angehören, liegen auf den drei Chordalebenen der drei Kugeln, mithin auf ihrer Schnittlinie, der Chordalachse. Drei Kugeln haben also höchstens zwei reale Punkte gemein, dieselben liegen symmetrisch zur Ebene der drei Centren; wenn die Schnittpunkte nicht real sind, so ist doch die Gerade real, auf der sie liegen.

10. Die Gesammtheit aller Kugeln

1. $$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0,$$

die man aus drei Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, die nicht demselben Büschel angehören, erhält, indem man die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ in jeder möglichen Weise abändert, nennt man ein Kugelbündel. Da es in der Gleichung $K = 0$ nur auf die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ ankommt, so kann man voraussetzen, dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ist, so dass die Gleichung $K = 0$ in der Normalform erscheint.

Die Punkte, für welche $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, genügen auch der Gleichung $K = 0$; die Kugeln eines Büschels haben also zwei gemeinsame (reale oder imaginäre) Schnittpunkte.

Die Chordalebene zweier Kugeln des Bündels

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K' \equiv \mu_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \mu_3 K_3 = 0$$

hat die Gleichung

$$\mathfrak{L} \equiv K - K' \equiv (\lambda_1 - \mu_1) K_1 + (\lambda_2 - \mu_2) K_2 + (\lambda_3 - \mu_3) K_3 = 0.$$

Da nun vorausgesetzt wird, dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, so folgt $(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2) + (\lambda_3 - \mu_3) = 0$. Hiernach erhält man

$$\mathfrak{L} \equiv (\lambda_1 - \mu_1)(K_1 - K_3) + (\lambda_2 - \mu_2)(K_2 - K_3).$$

Bezeichnet man die Chordalebenen von K_1, K_3 und K_2, K_3 mit $\mathfrak{L}_{13}$ und $\mathfrak{L}_{23}$, so hat man $\mathfrak{L}_{13} \equiv K_1 - K_3 = 0$, $\mathfrak{L}_{23} \equiv K_2 - K_3 = 0$, und daher

$$\mathfrak{L} \equiv (\lambda_1 - \mu_1)\mathfrak{L}_{13} + (\lambda_2 - \mu_2)\mathfrak{L}_{23}.$$

Hieraus folgt: Die Chordalebenen je zweier Kugeln eines Kugelbündels gehen durch eine Gerade; oder: Die Kugeln eines Bündels haben eine gemeinsame Chordalachse.

11. Soll die Kugel K durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, der nicht mit den beiden Trägern des Bündels zusammenfällt, so hat man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P_0 in das Polynom $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3$ einzusetzen und λ_1, λ_2, λ_3 so zu bestimmen, dass das Substitutionsresultat verschwindet. Bezeichnet man mit K_{10}, K_{20}, K_{30} die Werthe, welche die Functionen K_1, K_2, K_3 für die Coordinaten des Punktes P_0 annehmen, so sind die λ daher der Gleichung unterworfen $\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} + \lambda_3 K_{30} = 0$.

Man erhält hieraus

$$\lambda_3 = -\lambda_1 \cdot \frac{K_{10}}{K_{30}} - \lambda_2 \frac{K_{20}}{K_{30}},$$

und nachdem man dies in K eingesetzt hat

$$K_{30} \cdot K \equiv \lambda_1 (K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3) + \lambda_2 (K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3).$$

In dieser Gleichung ist noch das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ willkürlich. Nun sind

$$K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3 = 0$$

die Gleichungen zweier bestimmter Kugeln des Bündels, nämlich die Gleichungen der durch P_0 gehenden Kugeln der beiden Büschel K_1, K_3 und K_2, K_3; daher folgt: Durch einen gegebenen Punkt gehen einfach unendlich viele Kugeln eines Bündels; diese Kugeln bilden ein Kugelbüschel, ihre Chordalebene ist die durch diesen Punkt und die Chordalachse des Bündels bestimmte Ebene.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels; wir schliessen daher: Durch zwei Punkte des Raumes ist eine Kugel eines Kugelbündels im Allgemeinen eindeutig bestimmt.

Nur dann, wenn das Bündel zwei reale Träger hat, und wenn dieselben mit den beiden gegebenen Punkten auf einem Kreise liegen, gehen durch die beiden Punkte unzählig viele Kugeln des Bündels, nämlich alle Kugeln, die diesen Kreis gemein haben, also alle Kugeln eines Büschels.

12. Der Mittelpunkt der Kugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ hat die Coordinaten

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \quad b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3, \quad c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3;$$

wir schliessen daher (§ 3, 28): Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels liegen auf einer Ebene; der Mittelpunkt von K theilt das Dreieck der Centren der Kugeln K_1, K_2, K_3 im Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$.

Ferner folgt hieraus: Jeder Punkt der Centralebene eines Bündels (d. i. der Ebene, welche die Centren der Kugeln des Bündels enthält) ist der Mittelpunkt einer (realen oder imaginären) Kugel des Bündels.

13. Jeder Punkt der Chordalen eines Kugelbündels hat gleiche Potenz für alle Bündelkugeln; aus jedem Punkte der Chordalachse als Centrum lässt sich also eine Kugel construiren, die alle Kugeln des Bündels unter rechten Winkeln schneidet. Um die Kugel des Bündels zu erhalten, die einen gegebenen Punkt C der Centralebene zum Centrum hat, construire man daher von einem Punkte A der Chordalachse aus eine Tangente an eine Kugel des Bündels, und mit dieser Tangente als Radius beschreibe man um A eine Kugel $\mathfrak{K}$; diese Kugel trifft die gesuchte Kugel unter rechten Winkeln, der Halbmesser der letzteren ist daher die von C an $\mathfrak{K}$ gelegte Tangente.

Die Kugeln $\mathfrak{K}$ heissen die Orthogonalkugeln des Bündels. Da von jedem Centrum C aus nur eine Kugel des Bündels construirt werden kann, so folgt, dass von jedem Punkte der Centralebene aus gleich lange Tangenten an alle Orthogonalkugeln gelegt werden können. Die Punkte der Centralebene des Bündels haben also für alle Orthogonalkugeln desselben gleiche Potenz. Wenn die Kugeln des Bündels keine gemeinsamen Punkte haben, so lassen sich vom Schnittpunkte Q der Chordalachse und der Centralebene aus Tangenten an die Kugeln des Bündels legen. Construirt man von Q mit dieser Tangentenlänge als Radius eine Kugel, so trifft diese die Centralebene in einem Kreise; die Bündelkugeln, deren Centren auf der Peripherie dieses Kreises liegen, haben einen verschwindend kleinen Radius. Durch diesen Kreis, den wir den Nullkreis des Bündels nennen, gehen folglich auch alle andern Orthogonalkugeln, und wir schliessen daher: Die Orthogonalkugeln eines Bündels bilden ein Kugelbüschel, dessen Kugeln den Nullkreis gemein haben.

Der analytische Beweis dieses Satzes, der zugleich den Fall umfasst, wenn die Kugeln des Bündels reale gemeinsame Punkte haben, gestaltet sich folgendermaassen.

Wenn sich zwei Kugeln rechtwinkelig schneiden, und man einen Schnittpunkt mit den beiden Centren verbindet, so erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten die Radien der Kugeln und dessen Hypotenuse die Strecke zwischen den Centren ist. Sind ρ und ρ' die Radien und a, b, c bez. a', b', c' die Coordinaten der Centren, so ist daher die Bedingung dafür, dass die Kugeln sich normal schneiden

$$\rho^2 + \rho'^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 ;$$

wenn man dies entwickelt und die Abkürzungen benutzt

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 , \quad d' = a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2 ,$$

so erhält man die Bedingung in der Form $d + d' = 2(aa' + bb' + cc')$.

Wenn nun die Kugel

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}x - 2\mathfrak{b}y - 2\mathfrak{c}z + \mathfrak{d} = 0$$

die Kugeln $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ unter rechten Winkeln schneidet, so gelten die Gleichungen

1. $\mathfrak{d} + d_1 = 2\mathfrak{a}a_1 + 2\mathfrak{b}b_1 + 2\mathfrak{c}c_1 ,$
2. $\mathfrak{d} + d_2 = 2\mathfrak{a}a_2 + 2\mathfrak{b}b_2 + 2\mathfrak{c}c_2 ,$
3. $\mathfrak{d} + d_3 = 2\mathfrak{a}a_3 + 2\mathfrak{b}b_3 + 2\mathfrak{c}c_3 .$

Durch Subtraction folgt

4. $d_1 - d_2 = 2\mathfrak{a}(a_1 - a_2) + 2\mathfrak{b}(b_1 - b_2) + 2\mathfrak{c}(c_1 - c_2) ,$
5. $d_1 - d_3 = 2\mathfrak{a}(a_1 - a_3) + 2\mathfrak{b}(b_1 - c_2) + 2\mathfrak{c}(c_1 - c_2) .$

Durch diese Gleichungen sind a, b, c nicht vollständig bestimmt. Sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}''$ zwei Werthsysteme, die diesen Gleichungen genügen, und

erfüllen die Zahlen μ' und μ'' die Bedingung $\mu' + \mu'' = 1$, so kann jedes Werthsystem, das den Gleichungen genügt, durch geeignete Wahl von μ' und μ'' in der Weise hergestellt werden

6. $a = \mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'' , \quad b = \mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'' , \quad c = \mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'' ;$

denn diese Grössen genügen den Gleichungen 4. und 5. und enthalten eine unbestimmte Grösse (μ' oder μ''). Ferner folgt aus 1.

$$\mathfrak{d}' = 2\mathfrak{a}'a_1 + 2\mathfrak{b}'b_1 + 2\mathfrak{c}'c_1 - d_1 ,$$
$$\mathfrak{d}'' = 2\mathfrak{a}''a_1 + 2\mathfrak{b}''b_1 + 2\mathfrak{c}''c_1 - d_1 ,$$
$$\mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 2(\mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'')a_1 + 2(\mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'')b_1 + 2(\mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'')c_1 - d_1 .$$

Somit hat man nach den Formeln 6.

$$\mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 2\mathfrak{a}a_1 + 2\mathfrak{b}b_1 + 2\mathfrak{c}c_1 - d_1 , \text{ d. i. } \mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = \mathfrak{d} .$$

Die Gleichung der Kugel $\mathfrak{K}$ ergiebt sich daher zu

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2(\mu'\mathfrak{a}' + \mu''\mathfrak{a}'')x - 2(\mu'\mathfrak{b}' + \mu''\mathfrak{b}'')y - 2(\mu'\mathfrak{c}' + \mu''\mathfrak{c}'')z + \mu'\mathfrak{d}' + \mu''\mathfrak{d}'' = 0 .$$

Fügt man zu den drei ersten Gliedern den Faktor $\mu' + \mu'' = 1$, so erhält man

7. $\mathfrak{K} \equiv \mu'\mathfrak{K}' + \mu''\mathfrak{K}'' = 0 ,$

wobei $\mathfrak{K}' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}'x - 2\mathfrak{b}'y - 2\mathfrak{c}'z + \mathfrak{d}' = 0$

und $\mathfrak{K}'' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\mathfrak{a}''x - 2\mathfrak{b}''y - 2\mathfrak{c}''z + \mathfrak{d}'' = 0$

die Gleichungen zweier Orthogonalkugeln des Bündels sind; also bilden alle Orthogonalkugeln des Bündels ein Büschel.

Umgekehrt weist man leicht nach: Alle Orthogonalkugeln der Kugeln eines Büschels bilden ein Kugelbündel, dessen Kugeln durch die beiden Nullpunkte des Büschels, d. i. durch die Punkte hindurchgehen, die als verschwindend kleine Kugeln anzusehen sind.

14. Um über die Kugeln eines Bündels urtheilen zu können, die eine gegebene Ebene E berühren, wählen wir ein Coordinatensystem, dessen XY-Ebene in diese Ebene fällt. Die Gleichungen des Schnittkreises k der Ebene E mit einer Kugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ des Bündels erhalten wir, indem wir in der Function K die Coordinate z durch Null ersetzen. Hierdurch entsteht

1. $k \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 = 0 ,$

wobei $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ die Gleichungen der Kreise sind, in denen die Ebene E von den Kugeln K_1, K_2, K_3 geschnitten wird.

Die Gesammtheit aller Kreise k, deren Gleichung aus den Gleichungen dreier gegebener Kreise k_1, k_2, k_3 linear nach der Formel 1. abgeleitet werden, nennt man ein Kreisbündel.

Eine Kugel, deren Centrum auf der XY-Ebene liegt, hat die Gleichung

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0 ,$$

wenn α, β die Coordinaten des Centrums und ρ der Kugelradius sind; der Schnittkreis dieser Kugel mit der XY-Ebene hat die Gleichung

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0 ,$$

man hat also die Beziehung $K = k + z^2$.

Die Kugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}$, welche k_1, k_2, k_3, k zu grössten Kreisen haben, haben also die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_1 \equiv k_1 + z^2 , \quad \mathfrak{K}_2 \equiv k_2 + z^2 , \quad \mathfrak{K}_3 \equiv k_3 + z^2 , \quad \mathfrak{K} \equiv k + z^2 ,$$

oder wenn man für k den Werth aus 1. setzt und an z^2 den Faktor $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ anbringt

$$\mathfrak{K} \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) z .$$

Hieraus folgt

2. $\mathfrak{K} \equiv \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2 + \lambda_3 \mathfrak{K}_3 .$

Die Kugeln, welche die Schnittkreise einer Ebene E mit den Kugeln eines Bündels zu grössten Kreisen haben, bilden also wieder ein Bündel. Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines allgemeineren, auf dessen Beweis wir hier nicht eingehen wollen. Die Kugeln, die durch die Kreise eines Kreisbündels gehen und deren Centra in einer Ebene liegen, bilden ein Kugelbündel.

Die Chordalachse des Bündels 2. geht durch den Punkt, in welchem die Ebene E von der Chordalachse des gegebenen Bündels der Kugeln K getroffen wird, denn dieser Punkt hat für die Kreise k, mithin auch für die Kugeln $\mathfrak{K}$ gleiche Potenz.

Construirt man nun den Nullkreis des Bündels $\mathfrak{K}$, so sind die Punkte desselben Kreise des Bündels k mit verschwindendem Radius, und die Kugeln K, welche durch diese Punkte gehen, berühren die Ebene E. Wir haben daher: Die Punkte, in denen eine Ebene E von den Kugeln eines Bündels berührt wird, liegen auf einem Kreise; das Centrum desselben ist der Schnitt der Ebene E mit der Chordalachse des Bündels, der Halbmesser ist die Länge einer von diesem Punkte an eine Kugel des Bündels gelegten Tangente.

15. Um die Kugel K eines Bündels zu construiren, die durch zwei gegebene Punkte A und B geht, lege man durch A eine Hülfskugel H, welche eine Kugel K' des Bündels schneidet, und suche den Punkt C auf, in welchem die Ebene dieses Schnittkreises die Chordalachse des Bündels trifft.

Verbindet man nun C mit A, so ist der Punkt D, in welchem CA die Hülfskugel zum zweiten Male schneidet, ein Punkt der gesuchten Kugel. Denn C hat gleiche Potenz für K' und H und gleiche für K' und K, folglich auch gleiche für K und H; folglich treffen K und H den Strahl CA, mit dem sie den Punkt A gemein haben, noch in einem zweiten gemeinsamen Punkte D.

Die Gerade, die durch das Centrum des durch A, B und D gehenden Kreises normal zur Ebene ABD gelegt wird, trifft die Centralebene des Bündels im Mittelpunkte der gesuchten Kugel.*)

16. Um die Kugel K eines Bündels zu erhalten, die durch einen gegebenen Punkt A geht und eine gegebene Ebene E berührt, bestimme man zu A nach der vorigen Methode noch einen Punkt B der Kugel K, und schneide die Centralebene Γ des Bündels durch die Ebene, welche AB normal halbirt; die Schnittlinie α ist dann der Ort der Centra aller Bündelkugeln, die durch A (und B) gehen.

Die Kugeln, deren Centra auf α liegen und welche die Ebene E berühren, haben ihre Berührungspunkte auf der Normalprojection α' der Geraden α auf die Ebene E.

Construirt man nun in E den Kreis k der Punkte, in denen E von Kugeln des Bündels berührt wird, so sind die Punkte C' und D', in welchen α' und k sich schneiden, die Berührungspunkte der gesuchten Kugeln, und die Centren sind die Punkte C und D, in welchen die Centralebene Γ von den durch C' und D' gelegten Normalen zu E getroffen wird.

---

*) Die Ausführung dieser und der folgenden Constructionen über Kugelbündel nach den Methoden der descriptiven Geometrie kann dem Leser als nützliche Uebung empfohlen werden; man wird dabei mit einer Projectionsebene arbeiten und hierzu am besten die Centralebene des Bündels wählen.

17. Die Kugeln, welche zwei sich schneidende Ebenen E und F berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den Ebenen, welche die vier von E und F eingeschlossenen Flächenwinkel halbiren. Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels, welche die zwei Ebenen E und F berühren, liegen also auf den Geraden β und γ, in denen die Centralebene des Bündels von den beiden Halbirungsebenen geschnitten wird. Die Construction der Centren der gesuchten Kugeln erfolgt wie bei der vorigen Aufgabe, wenn man α der Reihe nach durch β und γ ersetzt. Es giebt also vier Kugeln eines Bündels, die zwei gegebene Ebenen berühren.

18. Um über die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels Auskunft zu erhalten, die eine gegebene Gerade G berühren, wählen wir die Centralebene zur XY-Ebene des Coordinatensystems, legen den Anfangspunkt in die Spur der Geraden G und die X-Achse in die Projection von G auf die XY-Ebene.

Ein Punkt P der XY-Ebene ist dann Centrum einer die Gerade G berührenden Kugel des Bündels, wenn der Abstand d des Punktes P von der Geraden G gleich dem Radius der Bündelkugel ist, die P zum Centrum hat, das ist also gleich der von P an eine Orthogonalkugel gelegten Tangente; also wenn das Quadrat des Abstandes d gleich der Potenz des Punktes P in Bezug auf eine Orthogonalkugel gleich ist.

Ist die Gleichung einer Orthogonalkugel

$$\mathfrak{K} = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

so ist die Potenz von P der Werth, welchen $\mathfrak{K}$ annimmt, wenn man die Coordinaten von P (d. i. x, y, 0) einsetzt, also gleich

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0.$$

Die Projection von P auf die X-Achse sei Q. Der Abstand d ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, von dem die eine Kathete PQ, die andere der Abstand des Punktes Q von der Geraden G ist. Ist nun φ der Winkel, den G mit der XY-Ebene bildet, so ist die Entfernung des Punktes Q von G gleich $OQ \cdot \sin\varphi$; daher hat man

$$d^2 = PQ^2 + OQ^2 \cdot \sin^2\varphi = y^2 + x^2 \sin^2\varphi.$$

Dies soll der Potenz von P für die Orthogonalkugel gleich sein; daher hat man für die Coordinaten von P die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = x^2 \sin^2\varphi + y^2.$$

Hieraus folgt

$$x^2 \cos^2\varphi - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0.$$

Hierfür kann man schreiben

$$\cos^2\varphi\left(x - \frac{\alpha}{\cos^2\varphi}\right)^2 - 2\beta\left(y - \frac{\delta\cos^2\varphi - \alpha^2}{2\beta\cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Dies ergiebt: Der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Gerade berühren, ist eine Parabel; die Achse derselben ist normal zu der Geraden, die Coordinaten des Scheitels und der Parameter sind der Reihe nach

$$\frac{\alpha}{\cos\varphi}, \quad \frac{\delta\cos^2\varphi - \alpha^2}{2\beta\cos^2\varphi}, \quad \frac{\beta}{\cos^2\varphi}.$$

Es giebt daher vier Kugeln eines Bündels, die zwei gegebene Gerade berühren; ihre Centra erhält man als die Schnittpunkte zweier Parabeln.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Centra aller Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Ebene E berühren, auf einer Ellipse liegen, nämlich auf der

Ellipse, deren Normalprojection auf E der Kreis ist, der die Berührungspunkte aller die Ebene E berührenden Kugeln des Bündels enthält. *Es giebt mithin vier Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Gerade und eine gegebene Ebene berühren; ihre Centra erhält man als die Schnittpunkte einer Parabel und einer Ellipse.*

19. Die Chordalebene L einer beliebigen Kugel $\mathfrak{K}$ und der Kugel des Bündels

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$$

hat die Gleichung $L \equiv \mathfrak{K} - K = 0$.

Setzt man $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathfrak{K}$ statt $\mathfrak{K}$, und für K den obigen Werth, so erhält man

$$L \equiv \lambda_1 (\mathfrak{K} - K_1) + \lambda_2 (\mathfrak{K} - K_2) + \lambda_3 (\mathfrak{K} - K_3).$$

Nun sind $L_1 \equiv \mathfrak{K} - K_1 = 0$, $L_2 \equiv \mathfrak{K} - K_2 = 0$, $L_3 \equiv \mathfrak{K} - K_3 = 0$ die Gleichungen der Chordalebenen der Kugel $\mathfrak{K}$ und der Kugeln K_1, K_2, K_3. Diese drei Chordalebenen gehen mit den drei Chordalebenen der Kugelpaare K_1K_2, K_1K_3, K_2K_3 durch einen Punkt (No. 4), schneiden sich daher auf der Chordalachse des Bündels. Wir erhalten hieraus: *Die Chordalebenen, die eine Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Kugeln eines Bündels bestimmt, gehen durch einen Punkt A, der auf der Chordalachse des Bündels liegt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für alle Kugeln des Bündels und für die Kugel $\mathfrak{K}$.*

Legen wir durch A Tangenten an $\mathfrak{K}$, so berühren diese $\mathfrak{K}$ entlang eines Kreises, dessen Ebene normal auf der Geraden steht, die A mit dem Centrum von $\mathfrak{K}$ verbindet. Sind B und C zwei Punkte dieses Kreises, also $AB = AC$, und construirt man die durch B und C gehende Kugel K des Bündels, so berührt dieselbe AB in B und AC in C; denn die Potenz des Punktes A in Bezug auf die Kugel K ist gleich dem Quadrat von AB oder AC. Die Kugeln K und $\mathfrak{K}$ haben folglich den Kreis gemein, der AB in B und AC in C berührt. Rückt nun C immer näher an B, so wird dieser Kreis immer kleiner und zieht sich zu einem Punkte zusammen, wenn C mit B zusammenfällt. Wir schliessen hieraus: *Die Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Kugel $\mathfrak{K}$ berühren, haben ihre Berührungspunkte auf einem Kreise k; entlang dieses Kreises wird die Kugel $\mathfrak{K}$ von den Tangenten berührt, die durch den Punkt der Chordalachse des Bündels gehen, der gleiche Potenz für $\mathfrak{K}$ und die Kugeln des Bündels hat.*

Die Geraden, welche das Centrum Q der Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Punkten des Kreises k verbinden, sind die Mantellinien eines Rotationskegels. Wie wir in der descriptiven Geometrie bereits erfahren haben, ist der Schnitt einer Ebene mit einem Rotationskegel eine Curve zweiten Grades. *Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Kugel berühren, liegen also auf einer Curve zweiten Grades.*

Hiermit sind die Aufgaben im Prinzip gelöst: *Die Kugeln eines Bündels zu finden, die zwei Kugeln, oder eine Kugel und eine Gerade berühren*; es giebt vier Lösungen zu jeder dieser drei Aufgaben, und die Mittelpunkte der vier Kugeln werden als die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte erhalten.

§ 5. Tangentenebene und Tangentialpunkt an Flächen zweiten Grades. Cylinder, Kegel und Grenzfläche zweiten Grades.

1. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades in Punktcoordinaten ist

1. $f \equiv Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0.$

Die Schnittpunkte der Fläche $f = 0$ und der Ebene

2. $$T \equiv ux + vy + wz - 1 = 0$$

genügen den beiden Gleichungen 1. und 2. Berechnet man aus 2. die Coordinate $z = (1 - ux - vy) : w$ und setzt diesen Werth in 1. ein, so erhält man eine Gleichung, durch welche die Coordinaten x und y der Schnittcurve mit einander verbunden sind, also die *Gleichung der Horizontalprojection der Schnittcurve; dieselbe ist vom zweiten Grade.* Eliminirt man in gleicher Weise aus 1. und 2. der Reihe nach y und x, so erhält man die Gleichungen der Verticalprojection und der seitlichen Projection der Schnittcurve; diese sind ebenfalls vom zweiten Grade.

Um nun über die Natur der Schnittcurve selbst urtheilen zu können, wählen wir auf der Horizontalspur der Ebene T einen Punkt O' zum Anfangspunkte eines auf T liegenden ebenen Coordinatensystems; die Abscissenachse $O'\Xi$ legen wir auf die Horizontalspur; $O\Upsilon$ sei die Ordinatenachse, $O'\Upsilon'$ ihre Horizontalprojection. Die Geraden $O'\Xi$ und $O'\Upsilon'$ bilden ein in der Ebene XOY liegendes rechtwinkeliges Coordinatensystem; transformiren wir die Gleichung der Horizontalprojection der Schnittcurve auf dieses System, so erhalten wir eine Gleichung zweiten Grades zwischen den auf dieses System bezüglichen Coordinaten

3. $$a\xi^2 + 2b\xi\eta' + c\eta'^2 + 2d\xi + 2e\eta' + f = 0.$$

Ein Punkt P der Schnittcurve und sein Grundriss P' haben dieselbe Abscisse ξ, und zwischen der Ordinate η des Punktes P und der Ordinate η' seiner Projection besteht die Gleichung $\eta' = \eta \cos\alpha$. Wir erhalten also die Gleichung der Schnittcurve in Bezug auf das Coordinatensystem $\Xi\Upsilon$, wenn wir in 3. η' durch $\eta\cos\alpha$ ersetzen; die resultirende Gleichung ist vom zweiten Grade. Dies zeigt: *Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.*

2. Um über die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ und einer Geraden Auskunft zu erhalten, können wir folgenden Weg einschlagen:

Ziehen wir durch einen Punkt P_0 eine Gerade, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, so hat ein Punkt P dieser Geraden, der von P_0 um die Strecke $P_0P = r$ entfernt ist, die Coordinaten

2. $$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\cos\beta, \quad z = z_0 + r\cos\gamma.$$

Soll P auf f liegen, so müssen diese Coordinaten der Gleichung $f = 0$ genügen; hieraus folgt für r die quadratische Gleichung

$$A(x_0 + r\cos\alpha)^2 + 2B(x_0 + r\cos\alpha)(y_0 + r\cos\beta) + 2C(x_0 + r\cos\alpha)(z_0 + r\cos\gamma)$$
$$+ D(y_0 + r\cos\beta)^2 + 2E(y_0 + r\cos\beta)(z_0 + r\cos\gamma) + F(z_0 + r\cos\gamma)^2$$
$$+ 2G(x_0 + r\cos\alpha) + 2H(y_0 + r\cos\beta) + 2J(z_0 + r\cos\gamma) + K = 0,$$

oder, nach Potenzen von r geordnet:

3. $$f_0 + 2(f_{x0}'\cos\alpha + f_{y0}'\cos\beta + f_{z0}'\cos\gamma)r + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)r^2 = 0.$$

Wenn man abkürzungsweise setzt

4. $$f_x' \equiv Ax + By + Cz + G, \quad f_y' \equiv Bx + Dy + Ez + H, \quad f_z' \equiv Cx + Ey + Fz + J,$$

und durch angehängte Nullen, f_0, f_{x0}', f_{y0}', f_{z0}', bezeichnet, dass in der betreffenden Function statt x, y, z die speziellen Werthe x_0, y_0, z_0 gesetzt werden sollen.

Aus 3. folgt zunächst: *Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei (realen oder imaginären) Punkten getroffen.*

3. Nehmen wir an, dass P_0 auf der Fläche liegt, so ist $f_0 = 0$; die qua-

dratische Gleichung für r hat jetzt die Wurzel $r = 0$, welche dem Punkte P_0 entspricht; der zweite Schnittpunkt der durch P_0 gehenden Geraden G und der Fläche bestimmt sich aus der linearen Gleichung

$$1.\quad (f_{x_0}' \cdot \cos\alpha + f_{y_0}' \cdot \cos\beta + f_{z_0}' \cdot \cos\gamma) + (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos^2\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos^2\gamma)\, r = 0 .$$

Wir fragen nun nach den durch P_0 gehenden Geraden, die die Fläche berühren, d. i. deren beide Schnittpunkte mit der Fläche in den Punkt P_0 fallen. Ist G Tangente der Fläche, so muss auch der aus 1. sich ergebende Werth von r gleich Null sein; die nothwendige Bedingung hierfür ist, dass das von r freie Glied der Gleichung 1. verschwindet, also dass

$$2.\quad f_{x_0}'\cos\alpha + f_{y_0}'\cos\beta + f_{z_0}'\cos\gamma = 0 .$$

Ausser dieser Gleichung besteht noch zwischen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Gleichung:

$$3.\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Durch die Gleichungen 2. und 3. sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ noch nicht bestimmt; man kann einen Werth, z. B. $\cos\gamma$ beliebig annehmen und dann die zugehörigen Werthe von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ aus 2. und 3. ableiten. Durch einen Punkt einer Fläche zweiter Ordnung lassen sich also unendlich viele Tangenten an die Fläche legen.

Denkt man sich γ stetig geändert, so ändern sich auch α und β und damit die Lage der zugehörigen Tangente stetig; die Tangente beschreibt daher eine bestimmte Fläche. Um die Gleichung dieser Fläche zu erhalten, haben wir die Winkel α, β, γ aus der Gleichung 1. zu entfernen und dafür die Coordinaten eines Punktes P einer Tangente einzuführen. Nun ist, wenn ρ den Abstand P_0P bezeichnet:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{\rho}.$$

Setzt man diese Werthe in 2. ein und unterdrückt dann den gemeinsamen Divisor ρ^2, so erhält man die Gleichung

$$4.\quad f_{x_0}'(x - x_0) + f_{y_0}'(y - y_0) + f_{z_0}'(z - z_0) = 0 .$$

Diese Gleichung ist linear für x, y, z; wir schliessen daher: Die Tangenten, welche eine Fläche zweiter Ordnung in einem gegebenen Punkte derselben berühren, liegen auf einer Ebene.

Diese Ebene heisst die Tangentenebene der Fläche im Punkte P_0. Löst man die Klammern in 4. auf, so ergiebt sich

$$5.\quad f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z - (f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0) = 0 .$$

Aus den Formeln No. 2, 4 schliesst man sofort

$$6.\quad f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0 \equiv f_0 - (Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K) .$$

Da nun $f_0 = 0$, so erhält man

$$f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z = -(Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K);$$

man hat daher die Gleichung der Tangentenebene

$$7.\quad T \equiv f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0 .$$

4. Die Gleichung der Tangentenebene ist nur dann unbestimmt, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden, wenn also

$$1.\quad \begin{aligned} f_{x_0}' &\equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = 0, \\ f_{y_0}' &\equiv Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = 0, \\ f_{z_0}' &\equiv Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + J = 0, \\ &\ Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0 . \end{aligned}$$

Der Verein dieser vier linearen Gleichungen wird durch das Verschwinden ihrer Determinante bedingt

$$2.\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & C & G \\ B & D & E & H \\ C & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Determinante ist symmetrisch, d. h. sie ändert sich nicht, wenn man die Colonnen mit den Zeilen vertauscht.

Wir werden nun zeigen, dass unter der Voraussetzung $\Delta = 0$ die vier Ebenen

$$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0, \quad Gx + Hy + Jz + K = 0$$

nur dann einen einzigen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben, wenn die drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punkt gemein haben.

Denn sind zwei der Ebenen identisch, so sind zwei von den ersten drei Zeilen und die entsprechenden Colonnen in Δ proportional. Der gemeinsame Punkt P_0 der vier Ebenen bestimmt sich aus einer der beiden zusammenfallenden Ebenen und den beiden andern; die Determinante dieser drei linearen Gleichungen, welche der gemeinsame Nenner der Lösungen ist, hat alsdann zwei proportionale Colonnen, verschwindet also identisch, P_0 ist also unendlich fern oder unbestimmt.

Ist z. B. $f_x' \equiv f_y'$, so ist $B = mA$, $D = mB$, $E = mC$, $H = mG$, und x_0, y_0, z_0 ergeben sich aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + mAy_0 + Cz_0 &= -G, \\ Cx_0 + mCy_0 + Fz_0 &= -J, \\ Gx_0 + mGy_0 + Jz_0 &= -K. \end{aligned}$$

Enthalten ferner die Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ eine Gerade, ohne dass zwei derselben identisch sind, so besteht für zwei Zahlen m und n die Identität

$$f_z' \equiv mf_x' + nf_y'.$$

Hieraus folgt $C = mA + nB$, $E = mB + nD$, $F = mC + nE$, $J = mG + nH$. Der Punkt P_0 bestimmt sich aus $f_x' = 0$, $f_y' = 0$ und $Gx + Hy + Jz + K = 0$, d. i. aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + (mA + nB)z_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + (mB + nD)z_0 &= -H, \\ Gx_0 + Hy_0 + (mG + nH)z_0 &= -K. \end{aligned}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & (mA + nB) \\ B & D & (mB + nD) \\ G & H & (mG + nH) \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch; folglich sind die Lösungen des Systems unendlich gross oder unbestimmt.

Umgekehrt ist einleuchtend, dass wenn die drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punkt gemein haben, dies der einzige dem Systeme 1. genügende Punkt ist.

Wenn daher ein einziger im Endlichen liegender Punkt das System 1. erfüllt, so kann derselbe aus den drei Gleichungen gefunden werden

$$3.\quad \begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 &= -H, \\ Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 &= -J, \end{aligned}$$

und es ist

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} \gtrless 0 .$$

5. Wenn Δ_1 von Null verschieden ist, so ist P_0 weder unbestimmt noch unendlich fern. Bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Doppelpunkte zusammenfällt, müssen die Coefficienten der Flächengleichung solche Werthe haben, dass die Gleichungen No. 4, 1 durch $x = y = z = 0$ erfüllt werden; hieraus folgt

$$G = H = J = K = 0.$$

Die Flächengleichung lautet daher jetzt

1. $$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxy + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes der Fläche, und r_1 sein Abstand vom Anfangspunkte, so sind die Cosinus der Winkel, die r_1 mit den Coordinatenachsen bildet

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r_1}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{r_1}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{r_1}.$$

Daher gelten für die Coordinaten jedes Punktes P der Geraden OP_1 die Formeln

$$x = \frac{x_1}{r_1}\cdot r, \quad y = \frac{y_1}{r_1}\cdot r, \quad z = \frac{z_1}{r_1}\cdot r,$$

wenn r die Strecke OP bezeichnet. Setzt man diese Werthe in die Flächengleichung 1. ein, so erhält man als Bedingung dafür, dass P auf der Fläche liegt

2. $$\frac{r^2}{r_1^2}(Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cx_1z_1 + Dy_1^2 + 2Ey_1z_1 + Fz_1^2) = 0.$$

Da nun P_1 der Fläche angehört so verschwindet der Klammerinhalt; also wird der Gleichung von jedem Werthe von r genügt. Wir sehen daher: Jede Gerade, die ausser dem Doppelpunkte noch einen Punkt mit der Fläche gemein hat, liegt ganz auf der Fläche.

Jede durch den Doppelpunkt gehende Ebene E schneidet die Fläche in zwei im Doppelpunkte sich treffenden Geraden, die real und von einander verschieden, oder real und vereint, oder imaginär sein können. Jede Ebene, die den Doppelpunkt nicht enthält, schneidet die Fläche in einer eigentlichen Curve zweiter Ordnung; die Fläche erscheint somit als die Bahn einer Geraden, die durch den Doppelpunkt geht und entlang einer Curve zweiter Ordnung gleitet. Die Fläche ist daher eine Kegelfläche.

6. Wenn die vier Ebenen

$$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0, \quad Gx + Hy + Jz + K = 0$$

einen unendlich fernen Punkt gemein haben, also derselben Geraden parallel sind, so kann man das Coordinatensystem so wählen, dass die Achse OZ dieser Richtung parallel ist. Die Gleichungen No. 4, 1, bezogen auf dieses System, entsprechen dann verticalen Ebenen, haben also die Form

$$mx + ny + p = 0.$$

Hieraus folgt

$$C = E = F = J = 0.$$

Die Gleichung der Fläche ist daher

1. $$Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0.$$

Diese Gleichung enthält z nicht mehr; sie wird von jedem Punkte erfüllt, dessen Horizontalprojection ihr genügt. Betrachtet man 1. als die Gleichung einer auf der XY-Ebene gelegenen Curve zweiter Ordnung k, so ist die Fläche die Bahn einer Parallelen zur Z-Achse, die entlang der Curve k sich bewegt.

Hierdurch wird die Fläche als Cylinderfläche charakterisirt. Je nachdem die Curve k eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, bezeichnen wir die Fläche als elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Cylinder. Zerfällt die Curve k in zwei ungleiche lineare Faktoren, oder ist sie die zweite Potenz eines linearen Faktors, so artet der Cylinder in zwei getrennte oder zusammenfallende Ebenen aus. Die Bedingungen dafür, dass die quadratische Gleichung $f = 0$ einen eigentlichen oder ausartenden Cylinder darstellt, sind also (No. 4 und 5)

$$\Delta = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_1 = 0.$$

7. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 \equiv a_1T_1 + a_2T_2 = 0$, und $T_1' = 0$, $T_2' = 0$, $T_3' \equiv b_1T_1' + b_2T_2' = 0$ die Gleichungen von drei Paar entsprechenden Ebenen zweier projectiven Büschel, so werden die Gleichungen je zweier entsprechenden Ebenen in der Form erhalten (§ 3, 30)

$$T \equiv \lambda_1a_1T_1 + \lambda_2a_2T_2 = 0, \quad T' \equiv \lambda_1b_1T_1' + \lambda_2b_2T_2' = 0.$$

Die Punkte, in welchen sich entsprechende Ebenen schneiden, erfüllen die Gleichung, welche durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$ entsteht,

1. $$\begin{vmatrix} a_1T_1 & a_2T_2 \\ b_1T_1' & b_2T_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene T_0 liegen, und diese Ebene in beiden Büscheln sich selbst entspricht, so bezeichnen wir die Büschel als perspectiv. Man kann dann T_0 an die Stelle von T_1 und T_1' in 1. treten lassen und erhält

$$\begin{vmatrix} a_1T_0 & a_2T_2 \\ b_1T_0 & b_2T_2' \end{vmatrix} \equiv T_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2T_2 \\ b_1 & b_2T_2' \end{vmatrix} = 0;$$

die Fläche zweiter Ordnung zerfällt in die beiden Ebenen $T_0 = 0$ und $a_1b_2T_2' - a_2b_1T_2 = 0$. Zwei perspective Ebenenbüschel erzeugen zwei Ebenen, deren eine die selbstentsprechende Ebene ist.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene liegen, ohne perspectiv zu sein, so lässt sich aus 1. ein linearer Faktor nicht absondern, die Gleichung gehört also zu einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung. Schneiden sich die Träger in einem Punkte Σ, so gehen die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen durch Σ und jeder auf der Fläche liegende Punkt bestimmt mit Σ eine Gerade, die ganz auf der Fläche liegt; die Fläche ist daher eine Kegelfläche. Zwei projective Ebenenbüschel, deren Träger sich schneiden, erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung, der den Schnittpunkt der Träger zur Spitze hat. Sind die Träger zweier projectiven Büschel parallel, so sind auch die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen parallel, und die von ihnen beschriebene Fläche ist mithin ein Cylinder.

8. Eine Kegelfläche, sowie eine Cylinderfläche II. O. sind durch fünf Mantellinien (d. i. auf der Fläche enthaltene Gerade) bestimmt. Um die Flächen zu construiren, durchschneide man die Mantellinien durch eine Ebene, welche keine von ihnen enthält. Diese Ebene trifft die Mantellinien in fünf Punkten und die gesuchte Fläche in einer Curve II. O., die durch die fünf Punkte geht, und mithin construirt werden kann. Legt man nun durch die Punkte dieses Kegelschnitts Gerade, die durch den gemeinsamen endlich oder unendlich fernen Punkt der Mantellinien gehen, so liegen diese ganz in der Fläche.

Es ist ersichtlich, wie man eine Reihe von auf Kegelschnitte bezüglichen

Sätzen und Constructionen zu entsprechenden Sätzen und Constructionen für Kegel und Cylinder II. O. umarbeiten kann.

9. Für die Gleichung einer Cylinderfläche II. O.

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0$$

sind die abgeleiteten Functionen

$$f_x' = Ax + By + G, \quad f_y' = Bx + Dy + H, \quad f_z' = 0.$$

Daher ist die Gleichung der Tangentenebene eines Punktes x_0, y_0, z_0 dieser Fläche (No. 3):

$$(Ax_0 + By_0 + G)x + (Bx_0 + Dy_0 + H)y + Gx_0 + Hy_0 + K = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche parallel zu den Mantellinien des Cylinders ist und die Gerade enthält, die die Horizontalspur (den Normalschnitt) des Cylinders in der Horizontalprojection des Punktes P berührt.

Die Gleichung der Horizontalspur des Cylinders in Liniencoordinaten ist bekanntlich

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & G & u \\ B & D & H & v \\ G & H & K & -1 \\ u & v & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ebenen, deren Coordinaten u, v dieser Gleichung genügen, und die parallel der Z-Achse sind, deren Coordinate w also gleich Null ist, sind Tangentenebenen des Cylinders. In Liniencoordinaten wird daher der Cylinder durch zwei Gleichungen

$$\varphi = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \varkappa = 0, \quad \text{und} \quad w = 0$$

dargestellt. Wir werden noch wiederholt der Thatsache begegnen, dass einem Gebilde im Raume eine Gleichung in Punktcoordinaten und zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten, oder umgekehrt eine Gleichung in Ebenencoordinaten und zwei Gleichungen in Punktcoordinaten zugehören.

10. Für die Gleichung der Kegelfläche

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

hat man

$$f_x' = Ax + By + Cz, \quad f_y' = Bx + Dy + Ez, \quad f_z' = Cx + Ey + Fz,$$

und erhält hieraus die Identität

$$f_x' \cdot x + f_y' \cdot y + f_z' \cdot z = f.$$

Ist daher P_0 ein Punkt der Kegelfläche, so ist die Gleichung der Tangentenebene in diesem Punkte

$$f_{x_0}' \cdot x + f_{y_0}' \cdot y + f_{z_0}' \cdot z = 0.$$

Jede Tangentenebene eines Kegels II. O. geht durch die Spitze, und berührt den Kegel entlang einer Mantellinie. Die Tangentenebenen eines Kegels sind daher diejenigen durch die Kegelspitze gehenden Ebenen, deren Horizontalspuren die Horizontalspur des Kegels berühren. Ist

$$\varphi = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta v + 2\varepsilon w + \varkappa = 0$$

die Gleichung der Horizontalspur eines Kegels in Liniencoordinaten, und

$$\Sigma = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \delta_1 = 0$$

die Gleichung der Kegelspitze, so wird der Kegel in Ebenencoordinaten durch den Verein von Gleichungen dargestellt

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma = 0.$$

11. Für die Coordinaten u, v, w der Tangentenebene der Fläche II. O. $f = 0$ im Punkte P_0 derselben ergeben sich aus der Gleichung der Tangentenebene (No. 3, 7) die Gleichungen

1. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = k \cdot u,$
2. $Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = k \cdot v,$
3. $Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + J = k \cdot w,$
4. $Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = - k.$

Reducirt man diese Gleichungen auf Null, und fügt noch die Gleichung des Tangentialpunktes P_0 hinzu

5. $ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen x_0, y_0, z_0, k eliminiren, und erhält als nothwendige Bedingung dafür, dass die Ebene u, v, w die Fläche $f = 0$ berührt,

6. $$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & G & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt erkennt man leicht, dass jede Ebene T, deren Coordinaten der Gleichung $\varphi = 0$ genügen, eine Tangentenebene der Fläche $f = 0$ ist. Denn ist $\varphi = 0$, so giebt es vier Zahlen, x_0, y_0, z_0, k, die den Gleichungen 1. bis 5. genügen. Setzt man nun die Werthe für ku, kv, kw und für $(-k)$ aus 1 . . 4 in die mit k erweiterte Gleichung 5. ein, so erhält man

$$f_{x_0}' \cdot x_0 + f_{y_0}' \cdot y_0 + f_{z_0}' \cdot z_0 + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K = 0.$$

Nun ist, wie man durch direkte Multiplication sieht (vergl. auch No. 3, 6) die linke Seite identisch mit f_0, und da dieselbe verschwindet, so sieht man, dass x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Punktes P_0 der Fläche $f = 0$ sind. Vergleicht man nun die Gleichung der Tangentenebene der Fläche f im Punkte P_0 mit der Gleichung der Ebene T, so sieht man aus den Gleichungen 1. bis 4., dass diese Tangentenebene mit T identisch ist.

Die Gleichungen

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

und

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & D & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

gehören daher zu derselben Fläche; $f = 0$ ist die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten der auf der Fläche gelegenen Punkte erfüllen und $\varphi = 0$ die Gleichung, der die die Fläche tangirenden Ebenen genügen. Es ist hervorzuheben, dass die Gleichung $\varphi = 0$ vom zweiten Grade in den Ebenencoordinaten ist.

---

12. Wir wenden uns nun zu den Untersuchungen über die Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten, die den bisher für die Gleichung in Punktcoordinaten durchgeführten analog sind. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten ist

1. $\varphi = au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 + 2gu + 2hv + 2iw + k = 0.$

Die Ebenen, welche φ berühren, und zugleich durch einen Punkt P gehen, genügen ausser der Gleichung $\varphi = 0$ noch der Gleichung des Punktes P; dieselbe sei

2. $P = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta = 0.$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man eine der Coordinaten, z. B. w eliminiren; man erhält aus 2.

$$w = -(\alpha u + \beta v + \delta) : \gamma .$$

Setzt man dies in 1. ein, so erhält man eine Gleichung in u und v, also die Gleichung, welche von den Horizontalspuren der durch P gehenden Tangentenebenen der Fläche $\varphi = 0$ erfüllt wird.

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade. Da nun die Ebenen, welche durch einen Punkt P gehen, und deren Horizontalspuren eine Curve zweiten Grades berühren, die Tangentenebenen eines Kegels zweiter Ordnung sind (No. 10), so folgt: Die Tangentenebenen einer Fläche zweiter Klasse (d. i. einer Fläche, deren Gleichung in Ebenencoordinaten vom zweiten Grade ist), die durch einen gegebenen Punkt gehen, umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung. Diesen Kegel bezeichnen wir als den Tangentenkegel des Punktes P für die Fläche φ.

13. Bei den weiteren Untersuchungen werden wir von folgendem Satze Gebrauch machen: Bildet man aus den Coordinaten u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 zweier Ebenen T_1 und T_2 mit Hülfe zweier Zahlen λ_1 und λ_2 die Coordinaten einer Ebene T nach den Formeln

1. $$u = \frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad v = \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad w = \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

so geht T durch die Schnittlinie $T_1 T_2$; und umgekehrt: die Coordinaten jeder Ebene des Büschels $T_1 T_2$ können bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ durch diese Formeln gewonnen werden. Denn die Gleichung der Ebene T ist

$$ux + vy + wz - 1 = 0;$$

wenn man mit $\lambda_1 + \lambda_2$ multiplicirt, und u, v, w aus 1. substituirt, so erhält man

$$T \equiv (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)x + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)y + (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)z - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 .$$

Hieraus folgt

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 ,$$

wenn $T_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1$, $\quad T_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 z - 1$.

Da nun $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Gleichungen der Ebenen T_1 und T_2 sind, so folgt, dass T die Schnittlinie von T_1 und T_2 enthält.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, hat man nur zu beachten dass die Gleichung jeder Ebene des Büschels $T_1 T_2$ in der Form erhalten wird

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0 .$$

14. Wir fragen nun nach den Ebenen $\mathfrak{T}$ eines Büschels $T_0 T$, die eine Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ berühren.

Die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ seien

$$\mathfrak{u} = \frac{\lambda_1 u_0 + \lambda_2 u}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\lambda_1 v_0 + \lambda_2 v}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\lambda_1 w_0 + \lambda_2 w}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner in den drei Formeln durch λ_1 dividirt und $\lambda_2 : \lambda_1$ mit μ bezeichnet:

$$\mathfrak{u} = \frac{u_0 + \mu u}{1 + \mu}, \quad \mathfrak{v} = \frac{v_0 + \mu v}{1 + \mu}, \quad \mathfrak{w} = \frac{w_0 + \mu w}{1 + \mu} .$$

Multiplicirt man nun die Gleichung

$$\varphi \equiv a\mathfrak{u}^2 + 2b\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 2c\mathfrak{u}\mathfrak{w} + d\mathfrak{v}^2 + 2c\mathfrak{v}\mathfrak{w} + f\mathfrak{w}^2 + 2g\mathfrak{u} + 2h\mathfrak{v} + 2i\mathfrak{w} + k = 0$$

mit $(1 + \mu)^2$ und substituirt dann

$$(1 + \mu)\mathfrak{u} = u_0 + \mu u, \quad (1 + \mu)\mathfrak{v} = v_0 + \mu v, \quad (1 + \mu)\mathfrak{w} = w_0 + \mu w,$$

so erhält man

1. $$\varphi_0 + 2(\varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + g u_0 + h v_0 + i w_0 + k) \cdot \mu + \varphi \cdot \mu^2 = 0$$

Hierin ist gesetzt

2. $$\varphi_u' \equiv au + bv + cw + g ,$$

3. $$\varphi_v' \equiv bu + dv + ew + h ,$$

4. $$\varphi_w' \equiv cu + ev + fw + i ,$$

und φ_0, φ_{u_0}', φ_{v_0}', φ_{w_0}' bedeuten die Werthe, welche die Functionen φ, φ_u', φ_v', φ_w' für die Coordinaten der Ebene T_0 annehmen.

Die Functionen φ_u', φ_v' φ_w' genügen der Identität

5. $$\varphi_u' \cdot u + \varphi_v' \cdot v + \varphi_w' \cdot w + gu + hv + iw + k \equiv \varphi .$$

Die Gleichung 1. ist zweiten Grades für μ. Wir erfahren daher: Durch eine Gerade gehen zwei (reale oder imaginäre) Tangentenebenen einer Fläche zweiter Klasse.

15. Es sei nun T_0 eine Tangentenebene von φ. Dann ist $\varphi_0 = 0$ und die Gleichung No. 14, 1 hat eine Wurzel $\mu = 0$, welcher die Ebene T_0 zugehört; die andere Wurzel ergiebt sich aus der linearen Gleichung

1. $$2(\varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + g u_0 + h v_0 + i w_0 + k) + \varphi \cdot \mu = 0 .$$

Soll T so gelegen sein, dass beide durch die Schnittlinie $T_0 T$ gehende Tangentenebenen der Fläche φ mit T_0 zusammenfallen, so muss die Gleichung 1. die Wurzel $\mu = 0$ haben, es müssen die Coordinaten der Ebene T also die Gleichung erfüllen

2. $$\varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + g u_0 + h v_0 + i w_0 + k = 0 .$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes. Wir schliessen daher: Alle Geraden auf einer Tangentenebene T_0 einer Fläche zweiter Klasse, durch welche ausser T_0 noch eine mit T_0 zusammenfallende Tangentenebene der Fläche geht, gehen durch einen Punkt.

Dies ist der Punkt, in welchem eine Tangentenebene der Fläche φ von den unendlich nahe benachbarten getroffen wird, mithin der Punkt, in welchem φ von T_0 berührt wird. Die Gleichung des Punktes, in welchem eine Tangentenebene T_0 die Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ berührt, ist daher

$$P \equiv \varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + g u_0 + h v_0 + i w_0 + k = 0 .$$

Nach der Identität No. 14, 5 hat man, da $\varphi_0 = 0$

$$-(\varphi_{u_0}' \cdot u_0 + \varphi_{v_0}' \cdot v_0 + \varphi_{w_0}' \cdot w_0) = g u_0 + h v_0 + i w_0 + k,$$

und kann daher die Gleichung des Punktes P auch in der Form schreiben

$$P \equiv \varphi_{u_0}'(u - u_0) + \varphi_{v_0}'(v - v_0) + \varphi_{w_0}'(w - w_0) = 0 .$$

16. Der auf einer Tangentenebene T_0 gelegene Berührungspunkt wird nur dann unbestimmt, wenn in der Gleichung $P = 0$ alle vier Constanten zugleich verschwinden, also wenn die Coordinaten von T_0 den vier Gleichungen genügen

1. $$\begin{aligned} \varphi_{u_0}' &\equiv a u_0 + b v_0 + c w_0 + g = 0 , \\ \varphi_{v_0}' &\equiv b u_0 + d v_0 + e w_0 + h = 0 , \\ \varphi_{w_0}' &\equiv c u_0 + e v_0 + f w_0 + i = 0 , \\ & g u_0 + h v_0 + i w_0 + k = 0 . \end{aligned}$$

Die Bedingung für den Verein dieser vier für u_0, v_0, w_0 linearen Gleichungen ist

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} a & b & c & g \\ b & d & e & h \\ c & e & f & i \\ g & h & i & k \end{vmatrix} = 0 .$$

Ebenso, wie in No. 4, erkennt man: Soll das System 1. eine eindeutig bestimmte Lösung haben, so müssen die Gleichungen

2. $$\begin{aligned} a u_0 + b v_0 + c w_0 &= -g , \\ b u_0 + d v_0 + e w_0 &= -h , \\ c u_0 + e v_0 + f w_0 &= -i , \end{aligned}$$

von einander unabhängig und die Determinante

$$\Delta_1' \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein. Die Coordinaten von T_0 werden daher aus 2. berechnet. Für jede auf T_0 gelegene Gerade G fallen alsdann die durch G gehenden beiden Tangentenebenen der Fläche φ mit T_0 zusammen; aus diesem Grunde wird T_0 als Doppelebene der Fläche $\varphi = 0$ bezeichnet.

17. Die Coordinaten der Doppelebene erhalten die bestimmten Werthe $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, die Doppelebene ist also unendlich fern, wenn, wie die Gleichungen No. 16, 1. . . 4. lehren

$$g = h = i = k = 0.$$

Die Gleichung der Fläche φ vereinfacht sich in diesem Falle zu

1. $$\varphi \equiv au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evu + fw^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen, d. h. sie enthält nur Glieder zweiten Grades. Wird der Gleichung durch die besonderen Werthe $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ genügt, so wird sie auch von den Werthen $u = n \cdot u_1$, $v = n \cdot v_1$, $w = n \cdot w_1$ erfüllt, wobei n unbestimmt bleibt, mithin von allen Ebenen, deren Coordinaten die Verhältnisse haben $u : v : w = u_1 : v_1 : w_1$. Diese Ebenen sind der Ebene T_1 parallel. Die Gleichung 1. wird also von Schaaren paralleler Ebenen erfüllt. Um über die Anordnung derselben eine deutliche Vorstellung zu erhalten, greifen wir aus jeder Schaar eine Ebene heraus, z. B. die, für welche die Coordinate w einen bestimmten Werth w_1 hat; diese Ebenen gehen durch den Punkt S der Z-Achse, für welchen $OS = 1 : w_1$ ist. Die Coordinaten u, v dieser Ebenen genügen der Gleichung

$$au^2 + 2buv + dv^2 + 2cw_1 \cdot u + 2ew_1 \cdot v + fw_1^2 = 0,$$

ihre Horizontalspuren umhüllen also die durch diese Gleichung bestimmte Curve zweiten Grades. Die Ebenen umhüllen daher einen Kegel II. O., der die Spitze S hat. Die Gleichung

$$\varphi \equiv au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 = 0$$

wird also von den Schaaren von Ebenen umhüllt, die den Tangentenebenen des Kegels parallel sind, der die Gleichungen hat

$$w = w_1, \quad au^2 + 2buv + dv^2 + 2cw_1 \cdot u + 2ew_1 \cdot v + fw_1^2 = 0,$$

wobei w_1 willkürlich angenommen werden kann.

18. Ist die Doppelebene nicht unendlich fern, so nehmen wir sie zur XY-Ebene eines Coordinatensystems. Alsdann werden die Gleichungen No. 16, 1. . . 4. von unbestimmten Werthen von u_0 und v_0 und von $w_0 = \infty$ erfüllt; die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist

$$c = e = f = i = 0.$$

Die Gleichung der Fläche φ wird daher

1. $$\varphi \equiv au^2 + 2buv + dv^2 + 2gu + 2hv + k = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur die Coordinaten u, v; ihr genügen also alle Ebenen, deren Horizontalspuren die Gleichung erfüllen

$$au^2 + 2buv + dv^2 + 2gu + 2hv + k = 0.$$

Hat eine Fläche zweiter Klasse eine im Endlichen liegende Doppelebene, so wird sie von unendlich vielen Büscheln von Ebenen berührt; die Träger aller dieser Büschel von Berührungsebenen liegen auf einer Ebene und sind die Tangenten einer Curve zweiter Klasse. Eine solche Fläche wird als Grenzfläche II. Kl. bezeichnet.

19. Ist $\varphi = 0$ die Gleichung einer Grenzfläche II. Kl., so ist

$$\varphi_u' \equiv au + bv + g, \quad \varphi_v' \equiv bu + dv + h, \quad \varphi_w \equiv 0.$$

Die Gleichung des auf der Tangentenebene T_0 dieser Fläche gelegenen Tangentialpunktes ergiebt sich daher zu (No. 15)

$$P \equiv (au_0 + bv_0 + g)u + (bu_0 + dv_0 + h)v + gu_0 + hv_0 + k = 0.$$

In dieser Gleichung fehlt das Glied mit w; wir schliessen daher: Die Punkte einer Grenzfläche II. Kl. liegen alle auf der Doppelebene und sind die Punkte eines Kegelschnitts.

Die Grenzfläche spielt bei den Flächen zweiter Klasse dieselbe Rolle, welche der Kegel bei Flächen zweiter Ordnung hat. Dem Cylinder als dem Kegel mit unendlich ferner Spitze entspricht die in No. 17 behandelte Grenzfläche mit unendlich ferner Doppelebene.

20. Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes, in welchem die Ebene T_0 die Fläche $\varphi = 0$ berührt, so muss die Gleichung dieses Punktes

$$P \equiv \varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0$$

bis auf einen constanten Faktor m mit der Gleichung

$$xu + yv + zw - 1 = 0$$

übereinstimmen. Wir erhalten hieraus die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_{u_0}' &\equiv au_0 + bv_0 + cw_0 + g = m \cdot x, \\ \varphi_{v_0}' &\equiv bu_0 + dv_0 + ew_0 + h = m \cdot y, \\ \varphi_{w_0}' &\equiv cu_0 + ev_0 + fw_0 + i = m \cdot z, \\ & gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = -m. \end{aligned}$$

Fügt man hierzu noch die selbstverständliche Gleichung

$$xu_0 + yv_0 + zw_0 - 1 = 0,$$

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen u_0, v_0, w_0, m eliminiren; als nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass P ein Punkt der Fläche $\varphi = 0$ ist, erhält man die Gleichung

$$f \equiv \begin{vmatrix} a & b & c & g & x \\ b & d & e & h & y \\ c & e & f & i & z \\ g & h & i & k & -1 \\ x & y & z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade. Jede Fläche zweiter Klasse ist daher von der zweiten Ordnung; früher (No. 11) haben wir gefunden, dass jede Fläche zweiter Ordnung von der zweiten Klasse ist. Es ist daher nicht nöthig, die Bezeichnung zweiter Klasse und zweiter Ordnung getrennt weiter zu führen; man fasst beide unter der gemeinsamen Bezeichnung: Flächen zweiten Grades, zusammen.

Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann nicht durch eine einzige Gleichung in Punktcoordinaten dargestellt werden. Da die Punkte der Grenzfläche einen Kegelschnitt bilden, so ist die Horizontalprojection ebenfalls ein Kegelschnitt, und die Punkte der Grenzfläche sind daher die Punkte des Raumes, welche der Gleichung dieser Horizontalprojection und ausserdem der Gleichung der Doppelebene genügen. Die Grenzfläche wird also in Punktcoordinaten durch eine quadratische Gleichung z. B. zwischen x und y

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$

und durch eine lineare Gleichung, die Gleichung der Doppelebene,

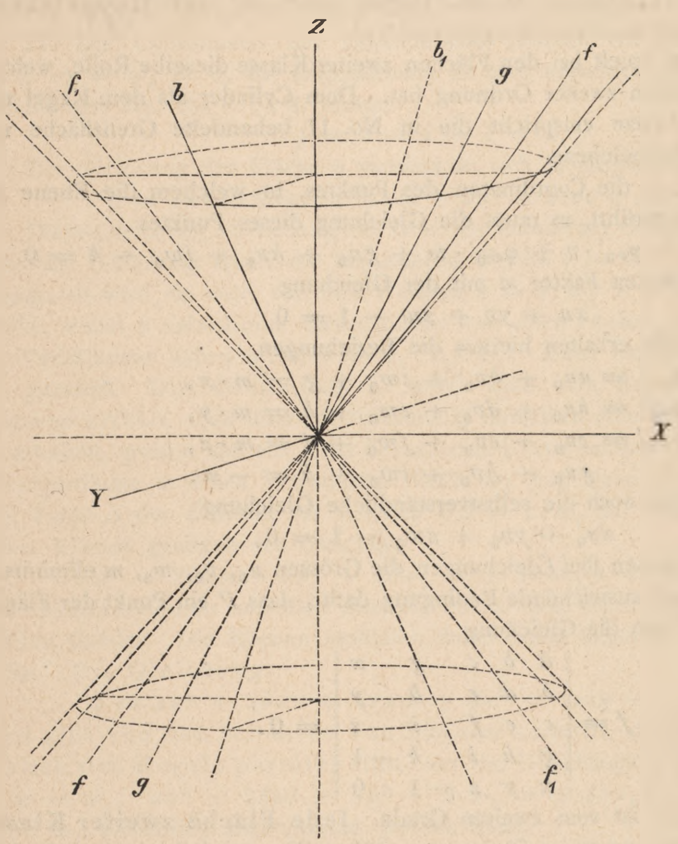
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

charakterisirt.

Wir erinnern daran, dass in gleicher Weise der Kegel in Ebenencoordinaten durch den Verein einer Gleichung zweiten Grades und einer linearen Gleichung, der Gleichung der Kegelspitze, dargestellt wird.

---

21. Wir untersuchen nun den Ort der Geraden, die durch den Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden gehen und für welche die Summe der Winkel, die sie mit diesen beiden Geraden bilden, eine gegebene Grösse 2α hat.



(M. 444.)

Die beiden gegebenen Geraden seien f und f_1, und $f f_1 = 2\gamma$. Wir wählen die Ebene der beiden Geraden zur XZ-Ebene eines Coordinatensystems, ihren Schnittpunkt zum Nullpunkte, und die Halbirungslinie des Winkels 2γ zur Z-Achse, so dass $fz = zf_1 = \gamma$.

Es sei g eine durch O gehende Gerade, für welche

1. $gf + gf_1 = 2\alpha$.

Die Gerade g mache mit den Achsen die Winkel φ, ψ, χ, so dass für die Winkel der Geraden f, f_1 und g mit den Richtungen OX, OY, OZ die Zusammenstellung gilt:

	OX,	OY,	OZ,
f:	$90° - \gamma$,	$90°$,	γ,
f_1:	$90° + \gamma$,	$90°$,	$-\gamma$,
g:	φ,	ψ,	χ.

Aus § 1, No. 6 erhält man

2. $\cos gf = \sin\gamma\cos\varphi + \cos\gamma\cos\chi, \quad \cos gf_1 = -\sin\gamma\cos\varphi = \cos\gamma\cos\chi.$

Aus 1. folgt

$$\cos gf \cdot \cos gf_1 - \sin gf \cdot \sin gf_1 = \cos 2\alpha, \text{ daher}$$

$$\sqrt{(1-\cos^2 gf)(1-\cos^2 gf_1)} = \cos gf \cdot \cos gf_1 - \cos 2\alpha, \text{ woraus folgt}$$

$$1 - \cos^2 gf - \cos^2 gf_1 = \cos^2 2\alpha - 2\cos gf \cdot \cos gf_1 \cdot \cos 2\alpha,$$

3. $$\cos^2 gf + \cos^2 gf_1 - 2\cos 2\alpha \cdot \cos gf \cdot \cos gf_1 - \sin^2 2\alpha = 0.$$

In diese Gleichung führen wir nun die Werthe 2. ein; wir erhalten

4. $$\cos^2 gf + \cos^2 gf_1 = 2(\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \cos^2\gamma\cos^2\chi),$$

5. $$\cos gf \cdot \cos gf_1 = \cos^2\gamma\cos^2\chi - \sin^2\gamma \cdot \cos^2\varphi.$$

Durch diese Werthe erhält man aus 3.

$$2\sin^2\gamma\cos^2\varphi + 2\cos^2\gamma\cos^2\chi - 2\cos 2\alpha(\cos^2\gamma\cos^2\chi - \sin^2\gamma\cos^2\varphi) - \sin^2 2\alpha = 0.$$

Hieraus folgt weiter

$$2\sin^2\gamma(1 + \cos 2\alpha)\cos^2\varphi + 2\cos^2\gamma(1 - \cos 2\alpha)\cos^2\chi - \sin^2 2\alpha = 0,$$

oder einfacher

6. $$\sin^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\gamma\sin^2\alpha\cos^2\chi - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0.$$

Statt der Winkel φ und χ führen wir nun die Coordinaten der Punkte der gesuchten Fläche ein. Ist P ein Punkt auf g, so ist bekanntlich

$$\cos\varphi = x : r, \quad \cos\chi = z : r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

daher erhält man aus 6.

$$\sin^2\gamma \cdot \cos^2\alpha \cdot x^2 + \cos^2\gamma\sin^2\alpha \cdot z^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

oder, geordnet:

7. $$\cos^2\alpha(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha)x^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha \cdot y^2 + \sin^2\alpha(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha)z^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen quadratisch für die Coordinaten, sie ist daher die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, der den Nullpunkt zur Spitze hat.

Da die Gleichung rein quadratisch für alle drei Coordinaten ist, so folgen für gegebene Werthe zweier Coordinaten zwei entgegengesetzte gleiche Werthe der dritten; zu jedem Punkte einer Coordinatenebene, als Projection eines Kegelpunktes auf eine der Coordinatenebenen betrachtet, gehören also zwei symmetrisch zu dieser Ebene liegende Punkte des Kegels. Wir schliessen hieraus, dass der Kegel 7. alle drei Coordinatenebenen zu Symmetrieebenen hat.

Man kann die Gleichung des Kegels noch etwas vereinfachen, wenn man statt γ den Winkel β einführt, den die in der YOZ-Ebene liegenden Mantellinien b und b_1 des Kegels mit der Z-Achse bilden. Nach den Formeln für das rechtwinkelige sphärische Dreieck hat man nämlich

$$\cos bf = \cos bz \cdot \cos fz.$$

Nun ist $bf = \alpha$, $fz = \gamma$, $bz = \beta$, daher hat man $\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

Hieraus folgt sofort

$$\cos^2\gamma - \cos^2\alpha = -(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha) = \sin^2\beta\cos^2\gamma.$$

Setzt man dies in 6. ein und ersetzt im Faktor von y^2 die Grösse $\cos^2\alpha$ durch $\cos^2\beta\cos^2\gamma$, so haben alle Glieder der Gleichung den gemeinsamen Faktor $\cos^2\gamma$; dividirt man durch $-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma$, so folgt

8. $$\cot^2\alpha \cdot x^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - z^2 = 0.$$

22. Man überzeugt sich leicht, dass es in jedem Kegel zweiter Ordnung, der drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat, zwei durch die Spitze gehende Focalstrahlen f und f_1 giebt, derart, dass die Summe der Winkel die sie mit jeder Mantellinie des Kegels bilden, constant ist.

Wählen wir die Symmetrieebenen zu Coordinatenebenen, so muss die Gleichung des Kegels für alle drei Coordinaten rein quadratisch sein, und da der Schnittpunkt der Symmetrieebenen mit der Kegelspitze zusammenfallen muss, also die Kegelgleichung von den Coordinaten $x = y = z = 0$ des Nullpunktes befriedigt wird, so kann die Kegelgleichung kein von den Coordinaten freies Glied haben. Die allgemeine Form der Kegelgleichung ist daher unter diesen Voraussetzungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Die drei Zahlen A, B, C können nicht alle dasselbe Zeichen haben, da sonst die Gleichung nur von den realen Werthen $x = y = z = 0$ befriedigt wird, der Kegel also ausser der Spitze keine realen Punkte enthält. Man kann die Bezeichnung der Coordinatenachsen so wählen, dass A und B positiv sind und C negativ ist; und so, dass A nicht grösser ist als B; dann kann man durch $(-C)$ dividiren und erhält so eine Gleichung von der Form

1. $$m^2x^2 + n^2y^2 - z^2 = 0.$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung

$$\cot^2\alpha \cdot x^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - z^2 = 0,$$

so folgt $\cot\alpha = m$, $\cot\beta = n$, und daher

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{m\sqrt{1+n^2}}{n\sqrt{1+m^2}}.$$

Da $m < n$, so ist auch $m\sqrt{1+n^2} : n\sqrt{1+m^2} < 1$, also γ ein realer Winkel. Ist $m = n$, so ist $\gamma = 0$, und die Kegelgleichung ist

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = 0.$$

Setzt man für z einen gegebenen Werth z_0, so erhält man für die Horizontalprojection der Kegelpunkte, die in der Höhe z_0 über der XY-Ebene liegen, die Gleichung

$$x^2 + y^2 - \frac{z_0^2}{m^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der um den Nullpunkt mit dem Halbmesser $z_0 : m$ beschrieben ist; hierdurch erweist sich der Kegel als Rotationskegel.

23. Um über den Ort der Geraden g Auskunft zu haben, die durch den Schnittpunkt zweier Geraden f und f' gehen und für welche die Differenz der Winkel $fg - f'g$ oder $f'g - fg$ einem gegebenen Winkel 2δ gleich ist, verlängern wir die eine der gegebenen Geraden, z. B. f'; die Verlängerung sei f_1; dann ist

$$f'g = 180° - f_1g.$$

Setzt man dies in $fg - f'g = 2\delta$ ein, so entsteht

$$fg - (180° - f_1g) = 2\delta, \quad \text{mithin}$$
$$fg + f_1g = 180° + 2\delta.$$

Wir erhalten den Kegel, wie in der vorigen Untersuchung, wenn wir nur 2α durch $180° + 2\delta$ ersetzen.

Es ist bemerkenswerth, dass der Kegel daher in gleicher Weise als das räumliche Analogon der Ellipse und Hyperbel auftritt.

Diese Analogie wird noch anschaulicher, wenn man einen Kugelschnitt des Kegels bildet, d. i. wenn man den Kegel mit einer Kugel durchschneidet, deren Centrum die Kegelspitze ist.

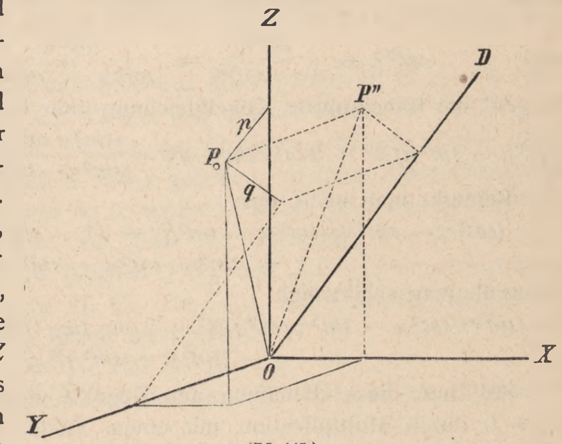
Diese Kugel durchschneide die Schenkel f und f_1 in den Punkten F und F_1; die Gegenpunkte dieser Punkte seien F' und F_1'. Ist nun P ein Punkt des Kugelschnitts und bezeichnet man für zwei Kugelpunkte A und B mit AB den sphärischen Abstand, d. i. den von A nach B sich erstreckenden Bogen eines grössten Kreises, so gelten für P die Beziehungen

$$PF + PF_1 = 2\alpha, \quad PF' + PF_1' = 360° - 2\alpha$$
$$PF - PF_1' = \pm(180 - 2\alpha), \quad PF' - PF_1 = \pm(180 - 2\alpha).$$

Die Paare von Kugelpunkten F und F_1 sowie F' und F_1' haben also den Charakter von elliptischen Brennpunkten, während die Paare F' und F_1, sowie F und F'_1 den Charakter hyperbolischer Brennpunkte haben.

Aus zahlreichen Sätzen über ebene Kegelschnitte erhält man mit leichter Mühe Sätze über diese sphärischen Kegelschnitte und damit auch Sätze über den Kegel zweiter Ordnung.

24. Um über den Ort der Punkte zu entscheiden, deren Abstand von einer gegebenen Geraden f zum Abstande von einer die Gerade f schneidenden Ebene D ein gegebenes Verhältniss ε hat, nehmen wir den Schnitt der Geraden und der Ebene zum Nullpunkte unseres Coordinatensystems, legen die Z-Achse in die Gerade und die Ebene ZOX normal zur Ebene D; OD sei die Verticalspur von D, und $DOZ = \delta$. Ist P_0 ein Punkt der Fläche, so liegt auch jeder Punkt der Geraden OP_0 auf derselben, da für alle diese Punkte die Abstände von der Geraden OZ und von der Ebene D gleiches Verhältniss haben. Wir sehen daraus, dass die Fläche eine Kegelfläche ist, deren Spitze in O liegt.



(M. 445.)

Der Abstand p eines Punktes P von der Z-Achse ist

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Der Abstand q von der Ebene D ist gleich dem Abstande der Verticalprojection P'' des Punktes von der Geraden OD. Man hat

$$q = OP'' \sin(XOP'' - XOD) = OP'' \sin(XOP'' - 90° + \delta)$$
$$= -OP'' \cos(XOP'' + \delta) = OP'' \sin XOP'' \sin\delta - OP'' \cos XOP'' \cos\delta$$
$$= \sin\delta \cdot z - \cos\delta \cdot x.$$

Ist nun verlangt, dass $p : q = \varepsilon$, so folgt

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2(\sin\delta \cdot z - \cos\delta \cdot x)^2.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man

1. $$C = (1 - \varepsilon^2\cos^2\delta)x^2 + 2\varepsilon^2 \sin\delta \cos\delta \cdot xz + y^2 - \varepsilon^2 \sin^2\delta \cdot z^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades und homogen; die Fläche ist daher ein Kegel zweiter Ordnung. Da die Gleichung rein quadratisch für y ist, so folgt, dass die Ebene XOZ eine Symmetrieebene des Kegels ist.

Die Analogie mit den Kegelschnitten legt die Vermuthung nahe, dass dieser Kegel C mit dem in No. 21 gefundenen identisch, und dass die Z-Achse eine Focallinie von C ist. Um darüber zu entscheiden, transformiren wir die Gleichung des Kegels

2. $$\cot^2\alpha \cdot x^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - z^2 = 0$$

auf ein neues Coordinatensystem, welches dieselbe Y-Achse, und die Gerade f zur Z-Achse hat; dann erscheint nur die Ebene XOZ um den Winkel $(-\gamma)$ gedreht, und man hat daher (nach den Transformationsformeln ebener Systeme) die Coordinaten x und z in 2. durch die Werthe $\cos\gamma \cdot x + \sin\gamma \cdot z$, $-\sin\gamma \cdot x + \cos\gamma \cdot z$ zu ersetzen.

Hierdurch erhält man aus 2.

$$\cot^2\alpha(\cos\gamma \cdot x + \sin\gamma \cdot z)^2 + \cot^2\beta \cdot y^2 - (-\sin\gamma \cdot x + \cos\gamma \cdot z)^2 = 0$$

oder, besser geordnet,

$$(\cot^2\alpha \cdot \cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\,x^2 + 2\cos\gamma\sin\gamma\,(\cot^2\alpha + 1)\,xz + \cot^2\beta \cdot y^2$$
$$+ (\cot^2\alpha\,\sin^2\gamma - \cos^2\gamma)\,z^2 = 0.$$

Da $\cot^2\alpha\,\cos^2\gamma - \sin^2\gamma = \cot^2\alpha\,\cos^2\gamma - 1 + \cos^2\gamma = (\cot^2\alpha + 1)\cos^2\gamma - 1$

$$= \frac{\cos^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

sowie
$$\cot^2\alpha\,\sin^2\gamma - \cos^2\gamma = \frac{\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

und
$$\cot^2\beta = \frac{\cos^2\beta}{1 - \cos^2\beta} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma},$$

so geht die transformirte Kegelgleichung über in

$$(\cos^2\gamma - \sin^2\alpha)\,x^2 + 2\cos\gamma\,\sin\gamma \cdot xz + \frac{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma} \cdot y^2 - (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)\,z^2 = 0.$$

Bemerkt man noch, dass

$$(\cos^2\gamma - \sin^2\alpha)(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = (1 - \sin^2\gamma - \sin^2\alpha)(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)$$
$$= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\gamma\,\cos^2\gamma,$$

so erhält man schliesslich

3. $(\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha - \sin^2\gamma\,\cos^2\gamma)\,x^2 + 2\cos\gamma\,\sin\gamma\,(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)\,xz + \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha\,y^2$
$$- (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)^2\,z^2 = 0.$$

Soll nun diese Gleichung den Kegel C darstellen, so muss die Gleichung $C = 0$ durch Multiplication mit einem Faktor k mit 3. identisch werden; es ist also

4. $$k(1 - \varepsilon^2\cos^2\delta) = \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha - \sin^2\gamma\,\cos^2\gamma,$$
5. $$k \cdot \varepsilon^2\sin\delta\,\cos\delta = \cos\gamma\,\sin\gamma\,(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma),$$
6. $$k = \sin^2\alpha\,\cos^2\alpha,$$
7. $$k\,\varepsilon^2\sin^2\delta = (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)^2.$$

Aus 6. folgt der Werth für k; hierauf aus 7. und 5. durch Division $\tang\delta$, durch Substitution z. B. in 7. schliesslich ε.

Zwischen den Grössen $k(1 - \varepsilon^2\cos^2\delta)$, $k\varepsilon^2\sin\delta\,\cos\delta$, $k\varepsilon^2\sin^2\delta$ besteht die Identität

$$[k(1 - \varepsilon^2\cos^2\delta) - k] \cdot k \cdot \varepsilon^2\sin^2\delta = -(k\varepsilon^2\sin\delta\,\cos\delta)^2.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung für den Verein der Gleichungen 4., 5., 6., 7. ist, dass dieselbe Identität von den rechten Seiten der Gleichungen erfüllt wird.

Nun hat man aus 4. und 6.

$$k(1 - \varepsilon^2\cos^2\delta) - k = \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\gamma\cos^2\gamma - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = -\sin^2\gamma\cos^2\gamma.$$

Mithin aus 7.

$$[k(1 - \varepsilon^2\cos\delta) - k] \cdot k\varepsilon^2\sin^2\delta = -\sin^2\gamma \cdot \cos^2\gamma \cdot (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma)^2.$$

Dies ist aber in der That entgegengesetzt gleich der zweiten Potenz der rechten Seite von 5.

Die Ebene D heisst Directrixebene des Kegels; aus den Symmetrieverhältnissen des Kegels folgt, dass zwei Directrixebenen existiren, die normal zu der Symmetrieebene sind, welche die Focalstrahlen enthält und symmetrisch zu jeder der beiden Symmetrieebenen.

An einer späteren Stelle werden wir nachweisen, dass jeder Kegel zweiter Ordnung drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat; daher kommen jedem Kegel zweiter Ordnung die auf die beiden Focallinien und Directrixebenen bezüglichen Eigenschaften zu.

§ 6. Das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide.

1. Um uns über die Formen der Flächen zweiter Ordnung zu unterrichten, wollen wir folgenden Weg einschlagen: Wir betrachten zunächst die Flächen, welche drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen haben; hierauf die, welchen nur zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen zukommen; und dann werden wir untersuchen, ob es Flächen zweiter Ordnung giebt, die nur eine, oder die keine Symmetrieebene haben.

Soll die Ebene XOY eine Symmetrieebene einer Fläche II. O. $f = 0$ sein, so müssen zu jedem Punkte P' der Ebene XOY zwei Punkte P der Fläche gehören, die entgegengesetzt gleiche Werthe der Ordinate z haben. Denkt man sich also in $f = 0$ die Coordinaten x und y gegeben, so muss diese Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln für z ergeben, mithin für z rein quadratisch sein. In gleicher Weise schliessen wir, dass die Gleichung $f = 0$ rein quadratisch für x und y ist, wenn die Ebenen YOZ und XOZ Symmetrieebenen sind. Die Gleichung einer Fläche II. O., die drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat, ist daher in Bezug auf dieselben

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0.$$

2. Wir betrachten zunächst die Fälle, dass ein oder mehr als ein Coefficient gleich Null ist.

α) Sind drei Coefficienten gleich Null, z. B. $D = F = K = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf $Ax^2 = 0$, die Fläche degenerirt daher zur (doppelt zu denkenden) Ebene YOZ. Ist $A = F = K = 0$, so giebt die Gleichung die Ebene XOZ; ist $A = D = K = 0$, so giebt sie die Ebene XOY.

β) Sind zwei Coefficienten gleich Null, so ist zu unterscheiden, ob K verschwindet oder nicht.

Ist $K = 0$ und noch ausserdem z. B. $F = 0$, so geht die Gleichung $f = 0$ über in

$$f = Ax^2 + Dy^2 = 0;$$

durch Zerlegung findet man

$$f = (\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y)(\sqrt{A} \cdot x - \sqrt{-D} \cdot y).$$

Die Gleichung $f = 0$ stellt daher zwei durch die Z-Achse gehende Ebenen dar, deren Winkel von den beiden verticalen Coordinatenebenen halbirt werden; haben A und D dasselbe Vorzeichen, so sind die Ebenen conjugirt complex, und enthalten nichts Reales ausser ihrer Schnittlinie, der Z-Achse.

Ist K von Null verschieden, und z. B. $D = F = 0$, so hat man

$$f = Ax^2 + K = 0,$$

mithin
$$x = \sqrt{-K : A}.$$

Die Gleichung ergiebt zwei reale oder imaginäre Ebenen, die in entgegengesetzt gleichen Abständen parallel zur Ebene YOZ sind.

γ) Ist ein Coefficient gleich Null, so ist wieder zu unterscheiden, ob K verschwindet, oder einer der drei andern Coefficienten.

Verschwindet z. B. F, so ist

$$f = Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Sind A, D und K von gleichem Zeichen, so wird der Gleichung durch keine realen Werthe von x und y genügt. Sind nicht alle Zeichen gleich, so sind zwei gleiche vorhanden; man kann dann die Coordinatenbezeichnung immer so wählen, dass A und K ungleiche Zeichen haben; durch Division der Gleichung durch

$(-K)$ erhält dann x einen positiven Coefficienten α^2. Je nachdem nun D mit A gleiches Zeichen hat, oder nicht, können wir $D:(-K)$ durch β^2 oder $-\beta^2$ ersetzen, unter β eine reale Zahl gedacht. Die Gleichung erhält somit eine der beiden Formen

$$\alpha^2 x^2 \pm \beta^2 y^2 - 1 = 0.$$

Wir sehen, dass sie in beiden Fällen einen Cylinder darstellt, dessen Mantellinien parallel der Z-Achse sind. Wir bezeichnen die Z-Achse als die Achse, die Ebenen XOZ und YOZ als die Hauptebenen des Cylinders. Der Cylinder

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - 1 = 0$$

hat zum Normalschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $1:\alpha$ und $1:\beta$; der Cylinder

$$\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 1 = 0$$

hat zum Normalschnitt eine Hyperbel, deren Hauptachse $1:\alpha$ und deren Nebenachse $1:\beta$ ist.

Ist $K = 0$, so haben wir

$$f = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0.$$

Haben A, D und F dasselbe Zeichen, so wird der Gleichung ausser durch $x = y = z = 0$ durch keinen realen Werth genügt. Haben die Coefficienten nicht dasselbe Zeichen, so stellt $f = 0$ einen Kegel zweiter Ordnung dar (§ 5, 5), Die Coordinatenachsen werden als die Hauptachsen, die Coordinatenebenen als die Hauptebenen des Kegels bezeichnet.

3. Ist keine der Zahlen A, D, F, K gleich Null, und haben alle dasselbe Zeichen, so giebt es keinen realen Punkt, der der Gleichung $f = 0$ genügt.

Haben nicht alle dasselbe Zeichen, so dividire man f durch $-K$ und ersetze nachher die Coefficienten durch α, β, γ; die Gleichung wird dann

$$f = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0.$$

Es sind nun entweder α, β und γ positiv, oder es sind zwei der Coefficienten positiv, der dritte negativ, oder es sind zwei negativ, der dritte positiv. Wir können in den beiden letzteren Fällen die Bezeichnung so wählen, dass α und β positiv, oder bez., dass α positiv ist. Bezeichnen wir daher mit a, b, c drei reale positive Strecken, so haben wir folgende Formen der Gleichung zu unterscheiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichung $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

4. Wir fragen zunächst nach den Punkten, in denen die Fläche f die Achsen OX, OY, OZ schneidet. Die Coordinaten ξ, η, ζ dieser Punkte erhalten wir aus der Gleichung $f = 0$, wenn wir in derselben der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$ setzen; dies ergiebt

$$\xi = \pm a, \quad \eta = \pm b, \quad \zeta = \pm c.$$

Die hierdurch bestimmten drei Paar Schnittpunkte AA_1, BB_1, CC_1 der Fläche mit den Achsen OX, OY, OZ werden als die Scheitel, die Geraden

AA_1, BB_1, CC_1 als die Achsen der Fläche bezeichnet; a, b, c sind daher die Halbachsen.

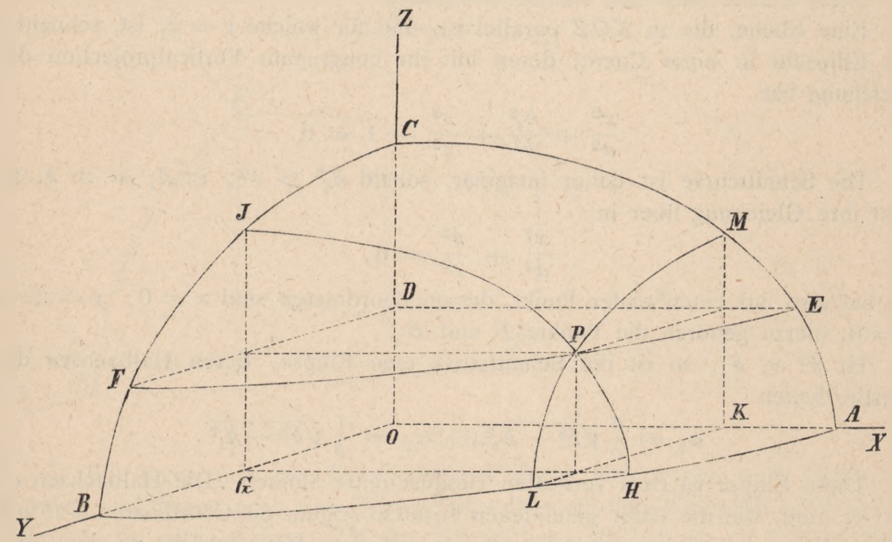
Als Hauptschnitte der Fläche werden die Curven bezeichnet, in denen sie die Hauptebenen (d. i. die Symmetrieebenen) schneidet. Die Gleichungen dieser Curven erhalten wir, indem wir in $f = 0$ der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ setzen; daher ist die Gleichung

des horizontalen Hauptschnitts: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;

„ verticalen „ „ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;

„ seitlichen „ „ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Die Hauptschnitte der Fläche sind also Ellipsen, welche je zwei der Strecken a, b, c zu Halbachsen haben.



(M. 446.)

Eine Ebene T, die parallel der XY-Ebene ist und von ihr den Abstand k hat, hat die Gleichung $z = k$. Die Gleichung der Horizontalprojection des Schnittes der Ebene T mit der Fläche f erhält man daher, wenn man $z = k$ in f einsetzt. Da T parallel der Ebene XOY ist, so ist diese Horizontalprojection mit der auf T liegenden Schnittcurve congruent. Die Substitution $z = k$ ergiebt die Gleichung

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0,$$

und diese zeigt, dass die Schnittcurve nur so lange real ist, als $k^2 : c^2 < 1$, also so lange k zwischen $-c$ und $+c$ liegt. Die Fläche liegt daher zwischen den beiden durch C und C_1 gehenden Horizontalebenen. Ist $k = \pm c$, so wird die Gleichung 1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

und dieser wird nur durch die realen Werthe $x = y = 0$ genügt; diese Schnittebene hat also mit der Fläche nur den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm c$, d. i. C oder C_1 gemein.

Ist $k^2 < c^2$, so gebe man der Gleichung 1. die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, welche die Halbachsen hat

$$a_1 = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - k^2}, \quad b_1 = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - k^2}.$$

Hieraus folgt $a_1 : b_1 = a : b$. Die Schnittellipsen sind daher dem horizontalen Hauptschnitte ähnlich*). Die Halbachsen a_1 und c_1 sind die Abscissen DE und DF, welche in den beiden verticalen Hauptschnitten zu der Ordinate $OD = k$ gehören. Unsere Fläche wird somit beschrieben, wenn sich eine (veränderliche) horizontale Ellipse so bewegt, dass ihr Mittelpunkt (D) auf der Z-Achse und ihre Scheitel (E und F) auf den beiden Ellipsen AC und BC fortrücken.

Diese Fläche führt den Namen Ellipsoid.

Eine Ebene, die zu XOZ parallel ist, und für welche $y = k_1$ ist, schneidet das Ellipsoid in einer Curve, deren mit ihr congruente Verticalprojection die Gleichung hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Schnittcurve ist daher imaginär, sobald $k_1^2 > b^2$; ist $k_1 = \pm b$, so geht ihre Gleichung über in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

sie hat also nur einen realen Punkt, dessen Coordinaten sind $x = 0$, $y = \pm b$, $z = 0$; hierzu gehören die Punkte B und B_1.

Ist $k^2 < b^2$, so ist die Schnittcurve eine Ellipse, deren Halbachsen die Werthe haben

$$a_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k_1^2}, \quad c_2 = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - k_1^2}.$$

Diese Ellipse ist dem verticalen Hauptschnitte ähnlich. Die Halbachsen a_2 und b_2 sind, wie die dafür gefundenen Formeln zeigen, die Coordinaten GH und GJ, welche in dem horizontalen und im seitlichen Hauptschnitte zu der Coordinate $OG = k_1$ gehören.

Durchschneidet man das Ellipsoid mit einer zu YOZ parallelen Ebene, für welche $x = k_2$ ist, so hat man für die Schnittcurve

*) Zwei Curven $f = 0$ und $\varphi = 0$ heissen ähnlich, wenn sich ihre Punkte P auf Π so auf einander beziehen lassen, dass bei einem für jede Curve geeignet gewähltem Coordinatensysteme die Proportion gilt $x : \xi = y : \eta$. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln sind ähnlich, wenn ihre Halbachsen gleiche Verhältnisse haben. Denn bezogen auf die Hauptachsen ist z. B. für zwei Ellipsen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \eta = \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - \xi^2}.$$

Wählt man nun zu P den entsprechenden Π so, dass $\xi = a_1 x : a$, so ergiebt sich

$$\eta = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ist nun $a : b = a_1 : b_1$, so folgt $y : \eta = b : b_1 = a : a_1 = x : \xi$.

Je zwei Parabeln sind ähnlich. Denn wird jede auf ihre Symmetrieachse und Scheiteltangente bezogen, so ist $y = \sqrt{2px}$, $\eta = \sqrt{2q\xi}$. Paart man nun je zwei Punkte, für welche $x : \xi = p : q$, so folgt $\eta = (q : p)\sqrt{2px}$, also $x : \xi = y : \eta$.

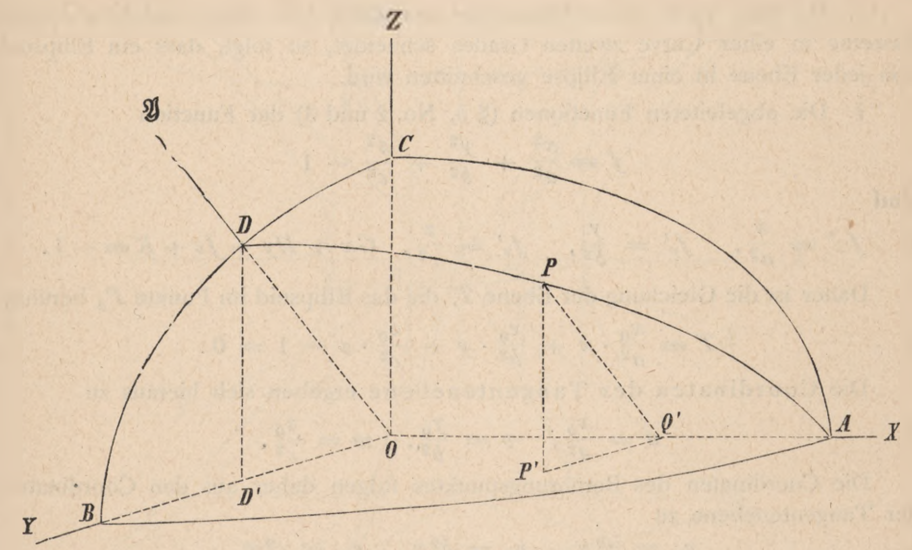
Zwei Geradenpaare sind ähnlich, wenn sie gleiche Winkel einschliessen. Je zwei Paare parallele Gerade sind ähnlich.

$$\frac{k_2^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Diese Curve ist imaginär, wenn $k_2^2 > a^2$; hat den einzigen realen Punkt A oder A_1, wenn $k_2 = \pm a$; und ist, wenn $k_2^2 < a^2$, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$b_3 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k_2^2}, \quad c_3 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - k_2^2}.$$

Diese Ellipse ist dem seitlichen Hauptschnitte ähnlich. Ist $OK = k_2$, so sind die zugehörigen Hauptschnittsordinaten KL und KM die Halbachsen b_3 und c_3.



(M. 447.)

5. Wir legen nun eine Schnittebene T durch eine Achse, z. B. durch die X-Achse und fragen nach dem Schnitte derselben mit dem Ellipsoide. Die Achse OX und die seitliche Spur $O\mathfrak{Y}$ der Schnittebene wählen wir zu Achsen eines in T gelegenen Coordinatensystems. Der Winkel $XO\mathfrak{Y}$ sei α.

Die Strecke OD finden wir, wenn wir in der Gleichung des seitlichen Hauptschnitts

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

die Werthe einsetzen

$$y = OD' = OD \cos\alpha, \quad z = D'D = OD \sin\alpha;$$

es ergiebt sich

$$OD^2 = 1 : \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right).$$

Zwischen den Coordinaten y und z eines Punktes P der Schnittebene und der auf das System $XO\mathfrak{Y}$ bezüglichen Coordinate $\mathfrak{y}$ dieses Punkts bestehen die Beziehungen

$$y = \mathfrak{y}\cos\alpha, \quad z = \mathfrak{y}\sin\alpha.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des Ellipsoids, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung der Schnittcurve, bezogen auf das Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right)\mathfrak{y}^2 - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die OA und OD zu Halbachsen hat. Man kann daher auch das Ellipsoid durch eine veränderliche Ellipse erzeugen, deren Ebene sich um OA dreht, und von welcher ein Scheitel unverändert der Punkt A ist, während der andere auf der aus den Halbachsen b und c in der Ebene YOZ beschriebenen Ellipse BC gleitet.

Ist $b = c$, so ist auch $OD = b$, und die Schnittellipse APD ist den Hauptschnitten AB und AC congruent. Das Ellipsoid entsteht jetzt durch Drehung einer unveränderlichen Ellipse um die Achse OA, es ist ein Rotationsellipsoid. Je nachdem $a \lesseqgtr b$, bezeichnet man die Fläche als ein gedrücktes oder als ein gestrecktes Rotationsellipsoid.

6. Da kein Punkt eines Ellipsoides unendlich fern liegt, und jede Ebene dasselbe in einer Curve zweiten Grades schneidet, so folgt, dass ein Ellipsoid von jeder Ebene in einer Ellipse geschnitten wird.

7. Die abgeleiteten Functionen (§ 5, No. 2 und 3) der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

1. $$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = \frac{y}{b^2}, \quad f_z' = \frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Daher ist die Gleichung der Ebene T, die das Ellipsoid im Punkte P_0 berührt,

2. $$T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y + \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentenebene ergeben sich hieraus zu

3. $$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}, \quad w = \frac{z_0}{c^2}.$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes folgen daher aus den Coordinaten der Tangentenebene zu

4. $$x_0 = a^2 u, \quad y_0 = b^2 v, \quad z_0 = c^2 w.$$

Setzt man dies in die von x_0, y_0, z_0 und u, v, w erfüllte Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des Ellipsoids in Ebenencoordinaten

5. $$\varphi = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen der Function φ (§ 5, No. 14 und 15) sind

$$\varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = b^2 v, \quad \varphi_w' = c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1,$$

daher ist die Gleichung des Punktes P, in welchem die Ebene T_0 das Ellipsoid berührt

6. $$P = a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

Die Gleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

8. Setzt man der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$, um die Strecken ξ, η, ζ zu erhalten, welche die Fläche von den Coordinatenachsen abschneidet, so ergiebt sich

$$\xi = \pm a, \quad \eta = \pm b, \quad z = \pm c\sqrt{-1}.$$

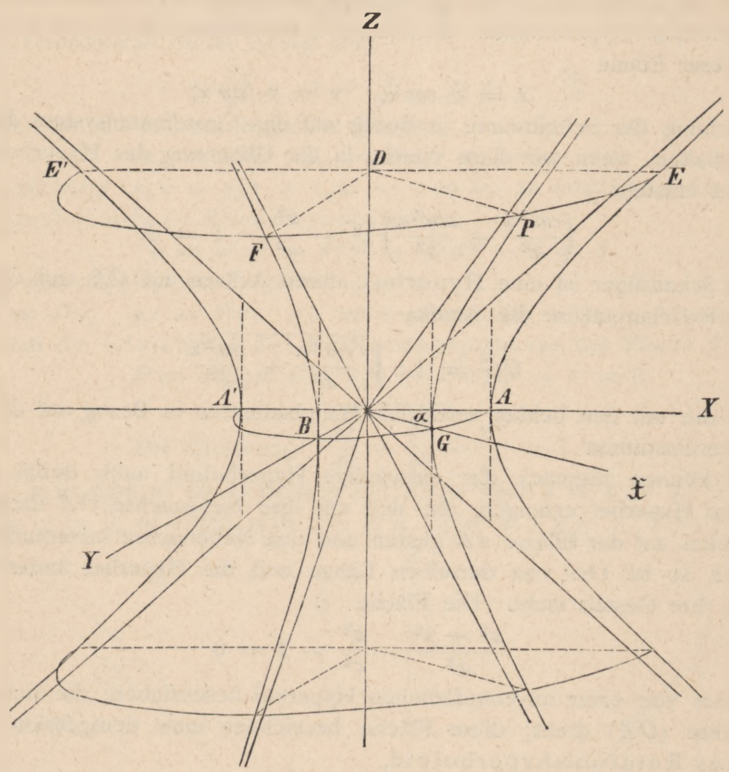
Die Fläche schneidet daher die Z-Achse nicht. Die Schnittpunkte auf der X- und Y-Achse (A, A_1 und B, B_1) werden die Scheitel der Fläche genannt.

Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$

Verticaler Hauptschnitt: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$

Seitlicher „ „ $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$



(M. 448.)

Die XY-Ebene wird daher von der Fläche in einer Ellipse mit den Halbachsen a und b; die XZ-Ebene in einer Hyperbel mit den Halbachsen a und c; und die YZ-Ebene in einer Hyperbel mit den Halbachsen b und c geschnitten.

Eine Ebene parallel zur XY-Ebene, für welche $z = k$, schneidet die Fläche in der Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a_1 = \frac{a}{c}\sqrt{k^2 + c^2}, \quad b_1 = \frac{b}{c}\sqrt{k^2 + c^2}.$$

Dieselben haben das Verhältniss $a : b$, also ist jeder horizontale Schnitt der Fläche dem horizontalen Hauptschnitte ähnlich. Ist $OD = k$, so sind a_1 und b_1 die Coordinaten $x = DE$, bez. $y = DF$, welche im verticalen und im seitlichen Hauptschnitte zu der Coordinate $z = OD$ gehören. Wächst k, so wachsen auch a_1 und b_1, und erhalten unendlich grosse Werthe, wenn k unendlich gross ist. Die Fläche wird daher beschrieben, wenn sich eine horizontale Ellipse so bewegt, dass ihr Centrum auf der Z-Achse und ihre Scheitel auf zwei in der XZ- und in der YZ-Ebene liegenden Hyperbeln gleiten, die das Centrum O haben, deren

Achsen mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, und welche dieselbe der Z-Achse parallele Nebenachse ($2c$) haben.

Man bezeichnet diese Fläche als einschaliges Hyperboloid.

9. Wir legen eine Ebene E durch die Z-Achse und benutzen die Horizontalspur $O\mathfrak{X}$ der Ebene E und OZ als Coordinatensystem für die Schnittcurve dieser Ebene mit dem Hyperboloide. Bezeichnet α den Winkel $\mathfrak{X}OX$, so ist für jeden Punkt dieser Ebene

$$x = \mathfrak{x} \cdot \cos\alpha, \quad y = \mathfrak{x} \cdot \sin\alpha;$$

die Gleichung der Schnittcurve in Bezug auf das Coordinatensystem $\mathfrak{X}OZ$ wird daher erhalten, wenn wir diese Werthe in die Gleichung des Hyperboloids einsetzen; es entsteht

1. $$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\mathfrak{x}^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Schnittfigur ist eine Hyperbel, deren Achsen auf $O\mathfrak{X}$ und OZ liegen, deren halbe Hauptachse die Strecke

$$OG = 1 : \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}$$

ist, und die mit den beiden verticalen Hauptschnitten in Bezug auf die Nebenachse übereinstimmt.

Wir können hiernach das einschalige Hyperboloid auch durch eine veränderliche Hyperbel erzeugen, die sich um ihre Nebenachse OZ dreht, indem ihre Scheitel auf der Ellipse AB gleiten und ihre Nebenachse unverändert bleibt. Ist $a = b$, so ist OG von derselben Länge und die Hyperbel ändert bei der Drehung ihre Gestalt nicht. Die Fläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

wird daher von einer unveränderlichen Hyperbel beschrieben, die sich um ihre Nebenachse (OZ) dreht; diese Fläche bezeichnet man demgemäss als einschaliges Rotationshyperboloid.

Die Gleichung des Vereins der beiden Asymptoten der Schnitthyperbel 1. ist im Coordinatensysteme $\mathfrak{X}OZ$, wenn man die halbe Hauptachse des Schnittes mit a_1 bezeichnet

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a_1} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}}{a_1} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Multiplicirt man aus und setzt den Werth für a_1 ein, so entsteht

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\mathfrak{x}^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ersetzt man hier $\mathfrak{x}\cos\alpha$ durch x und $\mathfrak{x}\sin\alpha$ durch y, so erhält man die Bedingungsgleichung dafür, dass ein Punkt im Raume auf einer Asymptote irgend eines dieser Schnitte gelegen ist; mithin ist die Gleichung der von diesen Asymptoten gebildeten Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels II. O. Man bezeichnet ihn als den Asymptotenkegel des Hyperboloids.

10. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

1. $$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = \frac{y}{b^2}, \quad f_z' = -\frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Die Gleichung der Ebene T, welche das Hyperboloid im Punkte P_0 berührt, ist daher

2. $$T = \frac{x_0}{a^2}\cdot x + \frac{y_0}{b^2}\cdot y - \frac{z_0}{c^2}\cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten dieser Ebene sind

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

Setzt man die hieraus folgenden Werthe

$$x_0 = a^2 u, \quad y_0 = b^2 v, \quad z_0 = -c^2 w$$

in die Gleichung $x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1 = 0$, so erhält man die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

3. $$\varphi = a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - 1 = 0.$$

Aus den abgeleiteten Functionen von φ

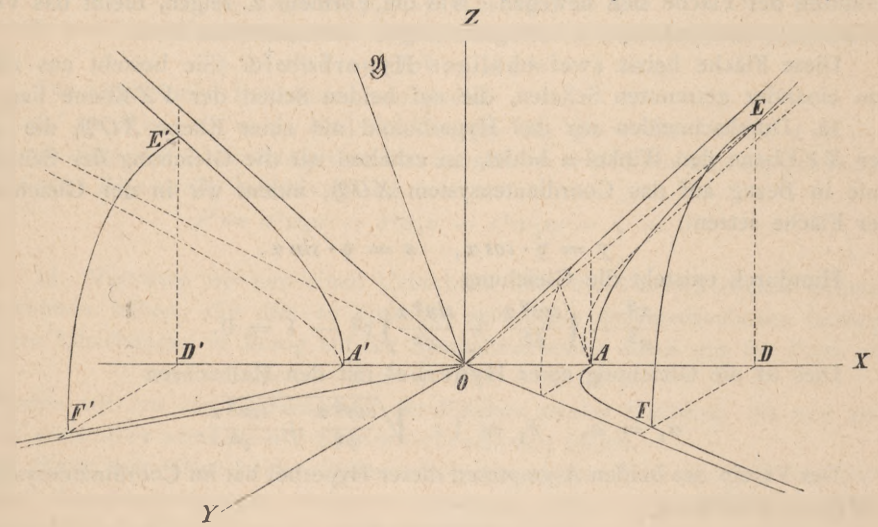
4. $$\varphi_u' = a^2u, \quad \varphi_v' = b^2v, \quad \varphi_w' = -c^2w, \quad gu + hv + iw + k = -1$$

erhält man die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T_0

5. $$P = a^2u_0u + b^2v_0v - c^2w_0w - 1 = 0.$$

Die Gleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

11. Setzt man in die Gleichung der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$ und $x = y = 0$, so erhält man $\xi = \pm a$, $\eta = \pm b\sqrt{-1}$, $\zeta = \pm c\sqrt{-1}$.



(M. 449.)

Die Fläche wird daher von der Y-Achse und der Z-Achse nicht in realen Punkten geschnitten; nur die Schnittpunkte mit der X-Achse sind real; sie werden als Scheitel der Fläche (A und A_1) bezeichnet.

Die Hauptschnitte haben die Gleichungen

Horizontaler Hauptschnitt:	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$
Verticaler „ „ :	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$
Seitlicher „ „ :	$-\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Die Fläche wird daher von der Ebene YOZ in einer imaginären Curve geschnitten; die andern beiden Hauptschnitte sind reale Hyperbeln mit gemeinsamer Hauptachse $(2a)$ und verschiedenen Nebenachsen.

Eine Ebene, die parallel der YZ-Ebene ist, und für welche $x = k$, schneidet die Fläche in der Curve

1. $$\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Dieser Schnitt ist imaginär, wenn $k^2 < a^2$ ist; zwischen den Ebenen, die YOZ im Abstande $\pm a$ parallel gehen, liegt also kein realer Punkt der Fläche. Ist $k = \pm a$, so geht die Gleichung 1. über in

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

und dieser Gleichung wird nur durch $y = z = 0$ genügt, d. i. durch die Scheitel A und A_1. Ist $k^2 > a^2$, so ist die Schnittcurve eine Ellipse, deren Halbachsen auf den Spuren der Schnittebene liegen und die Längen haben

2. $$a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2}, \quad c_1 = \frac{c}{a}\sqrt{k^2 - a^2}.$$

Ist $OD = k$, so sind a_1 und c_1 die Ordinaten DF und DE, die in den Hauptschnitten zu der Abscisse OD gehören. Die Fläche wird daher durch eine veränderliche Ellipse beschrieben, die normal zur X-Achse sich so bewegt, dass ihr Centrum auf der X-Achse und ihre Scheitel auf den beiden Hauptschnitten der Fläche sich bewegen. Wie die Formeln 2. zeigen, bleibt das Verhältniss der Halbachsen der bewegten Ellipse unveränderlich $b : c$.

Diese Fläche heisst zweischaliges Hyperboloid. Sie besteht aus zwei von einander getrennten Schalen, die auf beiden Seiten der YZ-Ebene liegen.

12. Durchschneiden wir das Hyperboloid mit einer Ebene $XO\mathfrak{Y}$, die mit der XY-Ebene den Winkel α bildet, so erhalten wir die Gleichung der Schnittlinie in Bezug auf das Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$, indem wir in der Gleichung der Fläche setzen

$$y = \mathfrak{y}\cdot\cos\alpha, \quad z = \mathfrak{y}\cdot\sin\alpha.$$

Hierdurch entsteht die Gleichung

1. $$\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right)\mathfrak{y}^2 - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen

$$a_1 = a, \quad b_1 = 1 : \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}}.$$

Der Verein der beiden Asymptoten dieser Hyperbel hat im Coordinatensystem $XO\mathfrak{Y}$ die Gleichung

2. $$\left(\frac{x}{a} - \frac{\mathfrak{y}}{b_1}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{\mathfrak{y}}{b_1}\right) = 0.$$

Führt man die Multiplication aus und setzt den Werth für b_1 ein, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right)\cdot\mathfrak{y}^2 = 0.$$

Setzt man hierin y für $\mathfrak{y}\cos\alpha$ und z für $\mathfrak{y}\sin\alpha$, so erhält man die Gleichung der von den Asymptoten aller dieser Schnitthyperbeln gebildeten Fläche

3. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Diese Fläche ist ein Kegel II. O., der Asymptotenkegel des zweischaligen Hyperboloids.

Ist $b = c$, so sind die beiden Hauptschnittshyperbeln congruent; da alsdann in 1. auch $b_1 = b$ ist, so wird in diesem besonderen Falle das Hyperboloid durch eine unveränderliche Hyperbel erzeugt, die sich um ihre Hauptachse dreht. Diese Fläche ist daher als zweischaliges Rotationshyperboloid zu bezeichnen. Die Gleichung desselben ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

13. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = -\frac{y}{b^2}, \quad f_z' = -\frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Daher ist die Gleichung der Ebene, die das einschalige Hyperboloid im Punkte P_0 berührt.

1. $$T = \frac{x_0}{a^2}\cdot x - \frac{y_0}{b^2}\cdot y - \frac{z_0}{c^2}\cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten von T sind

2. $$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

Durch Einsetzung der hieraus folgenden Werthe $x_0 = a^2u$, $y_0 = -b^2v$, $z_0 = -c^2w$ in die Gleichung

$$x_0u + y_0v + z_0w - 1 = 0$$

erhält man die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

4. $$\varphi = a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - 1 = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

5. $$\varphi_u' = a^2u, \quad \varphi_v' = -b^2v, \quad \varphi_w' = -c^2w, \quad gu + hv + iw + k = -1;$$

hieraus folgt die Gleichung des Punktes P, in welchem das Hyperboloid von der Ebene T_0 berührt wird.

6. $$P = a^2u_0u - b^2v_0v - c^2w_0w - 1 = 0.$$

---

14. Nachdem wir nun einen Ueberblick über die Flächen zweiter Ordnung gewonnen haben, die drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, deren Gleichungen in Bezug auf die Symmetrieebenen daher von der Form sind

1. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

wenden wir uns zur Charakteristik der Flächen zweiter Ordnung, die nur zwei auf einander senkrechte Symmetrieebenen haben.

Wählt man diese beiden Symmetrieebenen zu den Ebenen XOZ und YOZ eines Coordinatensystems, so ist die Gleichung einer solchen Fläche rein quadratisch für x und y, dagegen gemischt quadratisch für z, also von der Form

2. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2Jz + K = 0,$$

wobei J von Null verschieden ist. Verschieben wir den Nullpunkt entlang der Z-Achse um die Strecke γ, so erhalten wir die Gleichung der Fläche im neuen Systeme, indem wir in der Gleichung 2. die Coordinate z durch $z + \gamma$ ersetzen; hierdurch entsteht

3. $$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2(F\gamma + J)z + (F\gamma^2 + 2J\gamma + K) = 0.$$

Kann man nun für γ einen endlichen Werth bestimmen, der die Gleichung erfüllt

4. $$F\gamma + J = 0,$$

so geht die Gleichung 3. durch diese Wahl von γ in eine Gleichung von der

Form 1. über; wenn also die Fläche 2. nur zwei Symmetrieebenen haben soll, so muss $F\gamma + J$ für einen endlichen Werth γ unerfüllbar sein, es ist folglich in diesem Falle $F = 0$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung der Fläche in Bezug auf das neue System

5. $$Ax^2 + Dy^2 + 2Jz + 2J\gamma + K = 0.$$

Nehmen wir $\gamma = -K : 2J$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

6. $$Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0.$$

Betreffs der Vorzeichen kann vorausgesetzt werden, dass A positiv ist; dann ergeben sich für die Vorzeichen der zwei Grössen D und J folgende Combinationen

Vorzeichen von D: $+, +, -, -,$

„ „ „ J: $+, -, +, -.$

Da es freisteht, welche Seite der Z-Achse man als die positive annehmen will, der Wechsel des positiven Sinnes der Z-Achse aber als ein Vorzeichenwechsel des letzten Gliedes der Gleichung 6. sich äussert, so folgt, dass wir den Coefficienten J ohne Beschränkung der Allgemeinheit negativ voraussetzen können. Dividiren wir durch den absoluten Werth von J, und ersetzen die neuen Coefficienten von x^2 und y^2 durch passend gewählte andere Zeichen, so sind also nur noch die zwei wesentlich verschiedenen Fälle zu unterscheiden

7. $$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

8. $$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

wo nun a und b als positive Strecken vorausgesetzt werden können.

Die Gleichung $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$.

15. Für die Strecken ξ und η, welche diese Fläche von den beiden Coordinatenachsen OX und OY abschneidet, ergeben sich aus der Gleichung der Fläche durch Einsetzung von $y = z = 0$, bez. $x = z = 0$ die Gleichungen

1. $$\frac{\xi^2}{a} = 0, \quad \frac{\eta^2}{b} = 0.$$

Jede der beiden Achsen OX und OY schneidet also die Fläche in zwei mit dem Nullpunkte zusammenfallenden Punkten; beide Achsen sind daher Tangenten der Fläche, und mithin wird die Fläche von der Ebene XOY im Punkte O berührt. Setzt man in die Gleichung der Fläche $x = y = 0$, so folgt

2. $$2z = 0.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst $z = 0$. Da aber bewiesen worden ist, dass im Allgemeinen eine jede Gerade mit einer. Fläche zweiter Ordnung zwei Schnittpunkte hat, so ist die Gleichung 2. als eine quadratische Gleichung aufzufassen, in welcher der Coefficient von z^2 verschwindend klein ist; die Gleichung hat daher, als quadratische Gleichung betrachtet, ausser der Wurzel $z = 0$ noch die zweite Wurzel $z = \infty$. Die Fläche hat mit der Z-Achse ausser dem Nullpunkte noch einen unendlich fernen Punkt gemein.

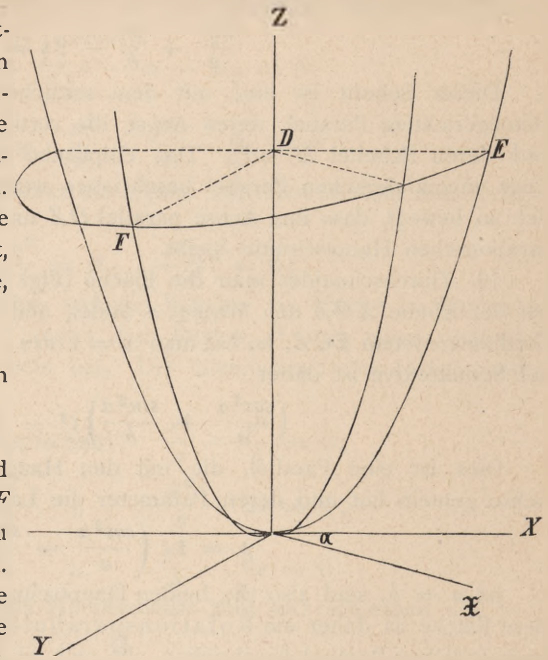
Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0,$

Verticaler „ „ $\frac{x^2}{a} - 2z = 0,$

Seitlicher „ „ $\frac{y^2}{b} - 2z = 0.$

Die erste Gleichung wird nur von einem realen Punkte, dem Nullpunkte, erfüllt, und bestätigt, dass die Fläche von der Ebene XOY im Punkte O berührt wird.



(M. 450.)

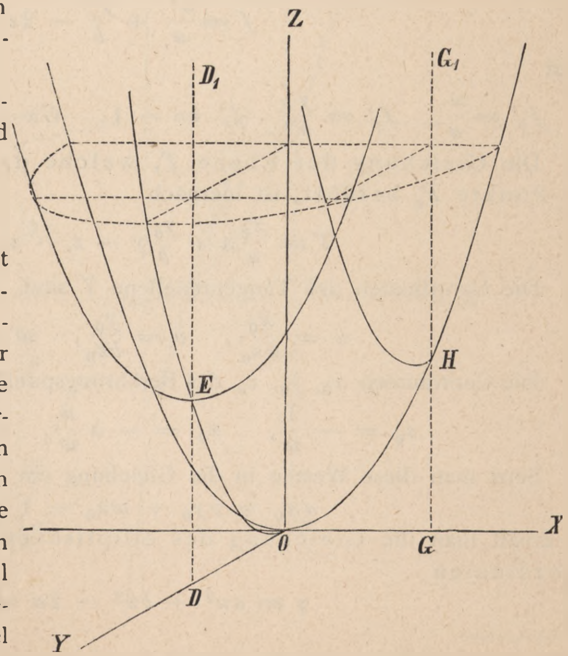
Die beiden andern Hauptschnitte sind **Parabeln**, deren gemeinsamer Scheitel der Nullpunkt, deren gemeinsame Achse die Z-Achse ist, und deren Parameter die Strecken a und b sind.

Eine Ebene, die im Abstande $z = k$ parallel zur XY-Ebene ist, schneidet die Fläche in der Curve,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2k = 0.$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a_1 = \sqrt{2ka}$,
$b_1 = \sqrt{2kb}$.

Ist $OD = k$, so sind a_1 und b_1 die Coordinaten DE und DF der Hauptschnittsparabeln, die zu der Coordinate $z = OD$ gehören. Die Fläche wird also durch eine veränderliche Ellipse erzeugt, die sich normal zur Z-Achse so bewegt, dass ihr Centrum auf der Z-Achse und ihre Scheitel auf den beiden Hauptschnittsparabeln gleiten. Wird $k = \infty$, so werden auch beide Halbachsen dieser Ellipse unendlich gross.



(M. 451.)

Die Fläche führt den Namen **elliptisches Paraboloid**.

Die Ebene $y = k_1$ schneidet das elliptische Paraboloid in der Curve

$$\frac{x^2}{a} + \frac{k_1^2}{b} - 2z = 0.$$

Diese Curve ist eine **mit dem verticalen Hauptschnitte congruente Parabel**, welche die seitliche Spur DD_1 der Schnittebene zur Achse und den Schnittpunkt E derselben mit dem seitlichen Hauptschnitte der Parabel zum Scheitel hat. Das elliptische Paraboloid wird also auch von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich so bewegt, dass ihre Ebene parallel der XZ-Ebene, ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem seitlichen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

Der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene $x = k_2$ hat die Gleichung

$$\frac{k_2^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

Dieser Schnitt ist eine mit dem seitlichen Hauptschnitte congruente und gleichgerichtete Parabel, deren Achse die verticale Spur GG_1 der Schnittebene, und deren Scheitel H ist*). Das elliptische Paraboloid kann also auch von einer unveränderlichen Parabel beschrieben werden, die parallel zur Ebene YOZ sich so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem verticalen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

16. Durchschneidet man die Fläche (Fig. 450) mit einer Ebene $\mathfrak{x}OZ$, die mit der Ebene XOZ den Winkel α bildet, und bezieht die Schnittcurve auf das Cordinatensystem $\mathfrak{x}OZ$, so hat man $x = \mathfrak{x}\cos\alpha$, $y = \mathfrak{x}\sin\alpha$, und die Gleichung der Schnittcurve ist daher

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a} + \frac{\sin^2\alpha}{b}\right)\mathfrak{x}^2 - 2z = 0.$$

Dies ist eine Parabel, die mit den Hauptschnitten den Scheitel und die Achse gemein hat und deren Parameter die Länge hat

$$p = 1 : \left(\frac{\cos^2\alpha}{a} + \frac{\sin^2\alpha}{b}\right).$$

Ist $a = b$, sind also die beiden Hauptschnitte congruent, so ist auch $p = a$; diese Fläche ist daher ein Rotationsparaboloid, d. h. sie wird von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich um ihre Achse dreht. Die Gleichung eines Rotationsparaboloids ist

$$x^2 + y^2 - 2az = 0.$$

17. Die abgeleiten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a}, \quad f_y' = \frac{y}{b}, \quad f_z' = -1, \quad Gx + Hy + Jz + K = -z.$$

Die Gleichung der Ebene T, welche das elliptische Paraboloid im Punkte P_0 berührt, ist hiernach

1. $$T = \frac{x_0}{a}x + \frac{y_0}{b}y - z - z_0 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentenebene T sind

2. $$u = \frac{x_0}{az_0}, \quad v = \frac{y_0}{bz_0}, \quad w = -\frac{1}{z_0}.$$

Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Berührungspunktes ergeben sich hiernach zu

3. $$z_0 = -\frac{1}{w}, \quad x_0 = -a\frac{u}{w}, \quad y_0 = -b\frac{v}{w}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des elliptischen Paraboloids in Ebenencoordinaten

4. $$\varphi = au^2 + bv^2 - 2u = 0.$$

*) In der Figur ist von dieser Parabel nur die vordere Hälfte aufgezeichnet worden.

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = au, \quad \varphi_v' = by, \quad \varphi_w' = -1, \quad gu + hv + iw + k = -w.$$

Die Gleichung des Punktes P, in welchem das Paraboloid von der Ebene T_0 berührt wird, ist demnach

7. $$P = au_0u + bv_0v - w - w_0 = 0.$$

Die Gleichung $\quad \dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} - 2z = 0.$

18. Die Strecken ξ, η, ζ, welche die Fläche von den Achsen abschneidet, ergeben sich aus

$$\frac{\xi^2}{a} = 0, \quad \frac{\eta^2}{b} = 0, \quad -2\zeta = 0.$$

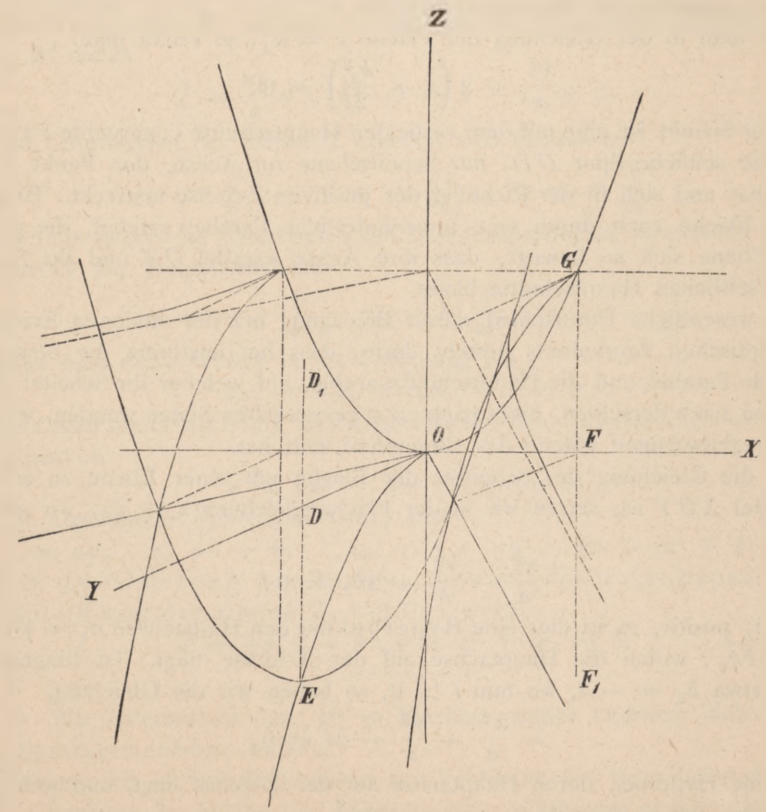
Hieraus folgt, dass die X-Achse und die Y-Achse die Fläche im Punkte O berühren, und dass die Z-Achse ausser dem Punkte O noch einen unendlich fernen Punkt mit der Fläche gemein hat. Die Gleichungen der Hauptschnitte sind

Horizontaler Hauptschnitt: $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} = 0;$

Verticaler „ „ $\dfrac{x^2}{a} - 2z = 0;$

Seitlicher „ „ $\dfrac{y^2}{b} - 2z = 0.$

Die Gleichung des horizontalen Hauptschnitts lässt sich schreiben



(M. 452.)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0;$$

dieser Hauptschnitt besteht daher aus den beiden durch den Anfangspunkt gehenden Geraden

$$\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0, \qquad \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0.$$

Wir bemerken, dass dies Auftreten von Geraden, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, nicht vereinzelt ist; wir werden im folgenden Abschnitte hierüber weitere Untersuchungen mittheilen.

Der verticale Hauptschnitt ist eine Parabel, deren Achse in der Z-Achse, deren Scheitel im Nullpunkte liegt, und die sich in der Richtung der Z-Achse erstreckt; der Parameter ist a. Der seitliche Hauptschnitt ist eine Parabel vom Parameter b, deren Scheitel im Nullpunkte, deren Achse in der Z-Achse liegt, und die sich in der Richtung der negativen Z-Achse erstreckt.

Die Ebene $x = k$ schneidet die Fläche in der Curve

$$\frac{k^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

also in einer Parabel, die dem seitlichen Hauptschnitte congruent ist; sie hat zur Achse die Verticalspur FF_1 der Schnittebene und zum Scheitel den Schnittpunkt G der Geraden FF_1 und des verticalen Hauptschnitts. Die Fläche wird daher von einer unveränderlichen Parabel beschrieben, die sich parallel zur Ebene YOZ so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem verticalen parabolischen Hauptschnitte bleibt.

Setzt man in der Gleichung der Fläche $y = k_1$, so erhält man

$$\frac{x^2}{a} - 2\left(z + \frac{k_1^2}{2b}\right) = 0.$$

Dieser Schnitt ist eine mit dem verticalen Hauptschnitte congruente Parabel, welche die seitliche Spur DD_1 der Schnittebene zur Achse, den Punkt E zum Scheitel hat und sich in der Richtung der positiven Z-Achse erstreckt. Hiernach wird die Fläche auch durch eine unveränderliche Parabel erzeugt, die parallel zur XZ-Ebene sich so bewegt, dass ihre Achse parallel OZ und ihr Scheitel auf dem seitlichen Hauptschnitte bleibt.

Der wesentliche Unterschied dieser Erzeugung mit der analogen Erzeugung eines elliptischen Paraboloids besteht darin, dass bei letzterem die bewegliche erzeugende Parabel und die Hauptschnittsparabel, auf welcher ihr Scheitel gleitet, die Achsen nach derselben, nicht nach entgegengesetzten Seiten wenden, während bei der gegenwärtigen Fläche das Gegentheil statt hat.

Um die Gleichung des Schnittes der Fläche mit einer Ebene zu erhalten, die parallel XOY ist, setzen wir in der Flächengleichung $z = k_2$; wir erhalten dadurch

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2k_2 = 0.$$

Ist k_2 positiv, so ist dies eine Hyperbel mit den Halbachsen $a_1 = \sqrt{2ak_2}$, $b_1 = \sqrt{2bk_2}$, wobei die Hauptachse auf der X-Achse liegt. Ist hingegen k_2 negativ, etwa $k_2 = -l$, wo nun $l > 0$, so haben wir die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2l = 0,$$

mithin eine Hyperbel, deren Hauptachse auf der Y-Achse liegt, und welche die Halbachsen hat $a_1 = \sqrt{2al}$, $b_1 = \sqrt{2bl}$.

Da für die Grundrisse aller dieser Schnitthyperbeln das Achsenverhältniss constant ist, nämlich $a_1 : b_1 = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, so haben sie alle die Asymptoten

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0,$$

haben also alle den horizontalen Hauptschnitt zu Asymptoten.

Die Asymptoten der Schnitthyperbeln selbst liegen daher auf den beiden Ebenen, die durch die Z-Achse und die beiden Geraden bestimmt sind, die den horizontalen Hauptschnitt bilden. Diese Ebenen bezeichnet man als die Asymptotenebenen der Fläche.

Wir können uns hiernach die Fläche durch eine veränderliche Hyperbel erzeugt denken, die parallel zur XY-Ebene sich so bewegt, dass ihre Achsen auf den Ebenen XOZ und YOZ, ihre beiden Scheitel auf einem der beiden verticalen Hauptschnitte der Fläche und ihre Asymptoten auf den beiden Ebenen bleiben, die durch die Z-Achse und die Geraden des horizontalen Hauptschnitts gehen.

Im Zusammenhange mit dieser Entstehungsweise der Fläche führt dieselbe den Namen hyperbolisches Paraboloid.

19. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a}, \quad f_y' = -\frac{y}{b}, \quad f_z' = -1, \quad Gx + Hy + Jz + K = -z.$$

Die Gleichung der Ebene T, welche die Fläche im Punkte P_0 berührt, ist daher

1. $$T = \frac{x_0}{a}x - \frac{y_0}{b}\cdot y - z - z_0 = 0.$$

Die Coordinaten der Ebene T ergeben sich hieraus zu

2. $$u = \frac{x_0}{az_0}, \quad v = -\frac{y_0}{bz_0}, \quad w = -\frac{1}{z_0}.$$

Hieraus folgen die Coordinaten des Berührungspunktes, ausgedrükt durch die Coordinaten der Tangentenebene

3. $$x_0 = -a\cdot\frac{u}{w}, \quad y_0 = b\cdot\frac{v}{w}, \quad z_0 = -\frac{1}{w}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids in Ebenencoordinaten

4. $$\varphi = au^2 - bv^2 + 2w = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = au, \quad \varphi_v' = -bv, \quad \varphi_w' = 1, \quad yu + hv + iw + k = w;$$

daher ist die Gleichung des Punktes P, in welchem das hyperbolische Paraboloid von der Ebene T_0 berührt wird:

5. $$P = au_0u - bv_0v + w + w_0 = 0.$$

---

20. Wir untersuchen nun, ob es Flächen zweiter Ordnung giebt, die nur eine Symmetrieebene haben.

Nehmen wir die Symmetrieebene zur YZ-Ebene des Coordinatensystems, so ist die Gleichung der Fläche rein quadratisch für x, dagegen gemischt für y und z, also von der Form

1. $f = Ax^2 + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0$.

Wir suchen nun diese Gleichung dadurch zu vereinfachen, dass wir den Nullpunkt in der YZ-Ebene verlegen und der Z-Achse und der Y-Achse neue geeignete Richtungen geben. Dabei bleibt die Coordinate x ungeändert und die Coordinaten y und z ändern sich gemäss der Formeln für die allgemeine Coordinatentransformation rechtwinkeliger Systeme in der Ebene. Hierbei ändert sich also nur der Ausdruck

2. $$Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K,$$

und geht in eine quadratische Function der auf das neue System bezüglichen Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ über.

Wenn die Gleichung $f = 0$ ausser Ax^2 noch quadratische Glieder hat, wenn also nicht zugleich $D = E = F = 0$, so kann, wie in der analytischen Geometrie der Ebene bewiesen worden ist, durch Verschiebung und Drehung des Coordinatensystems immer ein Coordinatensystem erreicht werden, durch welches aus der Function 2. die transformirte Function hervorgeht: entweder

3. $$M\mathfrak{y}^2 + N\mathfrak{z}^2 + R, \quad \text{oder} \quad 4. \; M\mathfrak{y}^2 + P\mathfrak{z}.$$

Die Gleichung

$$Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

geht aus 1. hervor, wenn man $x = 0$ setzt, ist also die Gleichung der Curve, in der die Fläche von der Symmetrieebene geschnitten wird; die Fälle 3. oder 4. treten daher ein, je nachdem diese Schnittcurve einen Mittelpunkt hat (Ellipse oder Hyperbel ist) oder keinen (Parabel). Bezogen auf das neue Coordinatensystem lautet die Gleichung der Fläche entweder

5. $Ax^2 + M\mathfrak{y}^2 + N\mathfrak{z}^2 + R = 0$, oder 6. $Ax^2 + M\mathfrak{y}^2 + P\mathfrak{z} = 0$.

Wenn also nicht zugleich $D = E = F = 0$, so hat die Fläche entweder noch zwei, oder noch eine Symmetrieebene, die auf der vorausgesetzten senkrecht stehen.

Wenn $D = E = F = 0$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung der Fläche zu

7. $$f = Ax^2 + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der YZ-Ebene hat die Gleichung

8. $$2Hy + 2Jz + K = 0$$

ist also eine Gerade. Wählt man diese Gerade zur Z-Achse des Coordinatensystems, so vereinfacht sich die Gleichung 8. zu

$$2Hy = 0,$$

es ist also dann $J = K = 0$, und die Gleichung der Fläche ergiebt sich zu

9. $$Ax^2 + 2Hy = 0.$$

Als Gleichung im Coordinatensystem XOY betrachtet, stellt sie eine Parabel dar, deren Scheitel im Nullpunkte und deren Achse auf der Y-Achse liegt. Da jeder Punkt der Gleichung 9. genügt, dessen Horizontalprojection auf dieser Parabel liegt, so folgt, dass die Gleichung 9. einen Cylinder darstellt, dessen horizontaler Querschnitt eine Parabel ist, und dessen Mantellinien der Z Achse parallel sind. Wir bezeichnen diesen Cylinder als parabolischen Cylinder.

Jede zu den Mantellinien normale Ebene kann als Symmetrieebene dieses Cylinders gelten.

21. Nun bleibt uns noch übrig, zu untersuchen, ob es unsymmetrische Flächen II. O. giebt.

Hierzu haben wir die Bedingungen aufzusuchen, an welche die Existenz einer Symmetrieebene gebunden ist, und nachzusehen, ob diese bei jeder Fläche zweiter Ordnung erfüllt werden.

§ 7. Symmetrieebenen der Flächen zweiter Ordnung.

1. Zieht man durch einen Punkt Π eine Gerade G, die mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so sind die Strecken r, welche von P bis an den Schnittpunkt der Geraden G mit der Fläche II. O.

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

reichen, die Wurzeln der Gleichung (§ 5, No. 2, 3)

1. $$f(\xi, \eta, \zeta) + (f_\xi' \cos\alpha + f_\eta' \cos\beta + f_\zeta' \cos\gamma) r$$
$$+ (A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cos\beta + 2C\cos\alpha\cos\gamma + D\cos\beta + 2E\cos\beta\cos\gamma + F\cos\gamma) r^2 = 0.$$

Wenn der Coefficient von r verschwindet, so ist diese Gleichung rein quadratisch; die Gleichung hat dann zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln, und der Punkt Π ist die Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden G und der Fläche f.

Die Gleichung

2. $$f_\xi' \cos\alpha + f_\eta' \cos\beta + f_\zeta' \cos\gamma = 0$$

ist also die Bedingung dafür, dass P die Mitte der unter den Richtungswinkeln α, β, γ durch Π gehenden Sehne der Fläche $f = 0$ ist.

Es giebt unzählig viele Sehnen einer Fläche f, die in einem gegebenen Punkte Π halbirt werden. Um die Gleichung der Fläche zu erhalten, auf der alle diese Geraden liegen, haben wir $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in 2. durch die Coordinaten eines Punkts von G auszudrücken.

Ist P auf G gelegen und von Π um ρ entfernt, so ist

$$x - \xi = \rho\cos\alpha, \quad y - \eta = \rho\cos\beta, \quad z - \zeta = \rho\cos\gamma;$$

man gewinnt daher aus 2. die Gleichung der gesuchten Fläche

3. $$T = f_\xi'(x - \xi) + f_\eta'(y - \eta) + f_\zeta'(z - \zeta) = 0.$$

Wir haben daher: Die Sehnen einer Fläche II. O., die einen gegebenen Punkt Π zum Mittelpunkte haben, liegen auf der Ebene

$$T = f_\xi'(x - \xi) + f_\eta'(y - \eta) + f_\zeta'(z - \zeta) = 0;$$

liegt der Punkt Π auf der Fläche f, so geht diese Ebene in die Tangentenebene im Punkte Π über. Dieser Satz kann auch folgende Fassung erhalten: Jeder Punkt im Raume ist das Centrum eines durch ihn gehenden (realen oder nicht realen) ebenen Schnittes einer Fläche II. O.; die Gleichung der Ebene dieser Schnittcurve ist $T = 0$.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Ebene T für alle Punkte Π des Raumes real ist, also auch dann, wenn keine durch Π gehende reale Sehne der Fläche f in Π halbirt wird.

2. Die Gleichung der Ebene T wird nur dann unbestimmt, wenn die Coordinaten des Punktes Π solche Werthe haben, dass die Functionen f_ξ', f_η', f_ζ' zugleich verschwinden, wenn also

1. $$\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta &= -G, \\ B\xi + D\eta + E\zeta &= -H, \\ C\xi + E\eta + F\zeta &= -J. \end{aligned}$$

Wenn die Determinante

2. $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so wird diese Gleichung von einem Systeme endlicher Werthe ξ, η, ζ genügt. Für den hierdurch eindeutig bestimmten, nicht unendlich fern liegenden Punkt verschwindet der Coefficient von r in der Gleichung No. 1, 1 unabhängig von den Winkeln α, β, γ; dieser Punkt halbirt daher alle durch ihn gehenden Sehnen der Fläche; aus diesem Grunde heisst er das Centrum der Fläche. Das Centrum einer Fläche zweiter Ordnung ist zugleich das Centrum für jeden durch dasselbe gehenden ebenen Schnitt.

Die Bedingung dafür, dass eine Fläche zweiter Ordnung ein eindeutig bestimmtes, nicht unendlich fernes Centrum hat, ist

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

und die Coordinaten ξ, η, ζ des Centrums sind die Lösungen des Systems $f_\xi' = 0$, $f_\eta' = 0$, $f_\zeta' = 0$, mithin in die Werthe

3. $$\xi = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \eta = -\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \quad \zeta = -\frac{\Delta_4}{\Delta_1},$$

wenn mit Δ_2, Δ_3, Δ_4 die Determinanten bezeichnet werden

4. $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} G & B & C \\ H & D & E \\ J & E & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A & G & C \\ B & H & E \\ C & J & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A & B & G \\ B & D & H \\ C & E & J \end{vmatrix}.$$

3. Ist $G = H = J = 0$, und Δ_1 von Null verschieden, so verschwinden ξ, η und ζ. Das Centrum der Fläche

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz + K = 0$$

fällt also mit dem Nullpunkte zusammen.

Die Gleichungen des Kegels zweiter Ordnung, des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide haben die Form

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

wobei A, D, F von Null verschieden sind; in der Determinante Δ_1 verschwinden in diesem Falle alle ausserhalb der Diagonale stehenden Glieder, sie reducirt sich daher auf das Produkt $\Delta_1 = ADF$, und ist mithin von Null verschieden. Der Kegel, das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide haben daher ein Centrum, und zwar ist dasselbe der Schnittpunkt der drei Symmetrieebenen.

4. Die Gleichungen der beiden Paraboloide haben die Form

$$f = Ax^2 + Dy^2 + 2Jz = 0.$$

Für das Centrum gelten jetzt die Gleichungen $A\xi = 0$, $D\eta = 0$; bemerken wir noch, dass $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_4 = ADJ$ ist, so folgt: Das Centrum eines Paraboloids liegt auf der Durchschnittsachse der Symmetrieebenen, von dem Schnittpunkte derselben mit der Fläche unendlich weit entfernt.

Die Gleichungen des elliptischen und des hyperbolischen Cylinders fallen unter die Form

$$Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Für das Centrum hat man $A\xi = 0$, $D\eta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_4 = 0$; mithin ist $\xi = \eta = 0$ und ζ unbestimmt. Jeder Punkt in der Durchschnittsachse der Symmetrieebenen eines elliptischen oder hyperbolischen Cylinders kann also als Centrum der Fläche angesehen werden.

Die Gleichung des parabolischen Cylinders ist

$$Ax^2 + 2Hy = 0.$$

Hier hat man $A\xi = 0$, $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, mithin $\xi = 0$, η unendlich gross, ζ unbestimmt.

Die Gleichung, aus welcher η zu bestimmen wäre, reducirt sich auf $0 = -H$; betrachtet man diese Gleichung als lineare Gleichung für η mit einem unendlich kleinen Coefficienten von η, so folgt, dass ihr nur durch einen unendlich grossen Werth von η genügt werden kann.

Jeder unendlich ferne Punkt auf der Symmetrieebene eines parabolischen Cylinder kann als Centrum desselben betrachtet werden.

Da bei den Paraboloiden und den Cylindern von einem Centrum im eigentlichen Sinne des Wortes nicht zu reden ist, so werden diese Flächen als nichtcentrale Flächen den centralen Flächen, nämlich dem Ellipsoid, den Hyperboloiden und dem Kegel gegenübergestellt.

5. Haben in der Gleichung No. 1, 2

$$f_x' \cos\alpha + f_y' \cos\beta + f_z' \cos\gamma = 0$$

die Winkel α, β, γ gegebene Werthe, so ist diese Gleichung die Bedingung für die Coordinaten der Mitten der Sehnen der Fläche $f = 0$, welche die durch die Winkel α, β, γ vorgeschriebene Richtung haben, sie ist also die Gleichung der Fläche, auf welcher die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen.

Die Function $T = f_x' \cos a + f_y' \cos\beta + f_z' \cos\gamma$ ist linear bezüglich der Coordinaten x, y, z; wir schliessen daher: Die Mitten paralleler Sehnen einer Fläche zweiter Ordnung liegen auf einer Ebene; haben die Sehnen die Richtungswinkel α, β, γ, so ist die Gleichung dieser Ebene

1. $$T = \cos\alpha \cdot f_x' + \cos\beta \cdot f_y' + \cos\gamma \cdot f_z' = 0.$$

Für die Sehnen, die der Reihe nach der X-Achse, der Y-Achse, der Z-Achse des Coordinatensystems parallel sind, haben α, β, γ die Werthe $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90°$; bez. $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = 90°$; bez. $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 0$; die Ebenen, welche die Mitten der den Achsen parallelen Sehnen enthalten, haben daher die Gleichungen

2. $$f_x' = 0, \quad f_y' = 0, \quad f_z' = 0.$$

Die Gleichung 1. lehrt, dass jeder Punkt, der diesen drei Ebenen $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$ gemein ist, auch auf der Ebene T liegt.

6. Beim Ellipsoid, den beiden Hyperboloiden und dem Kegel haben diese drei Ebenen nur einen Punkt gemein, das Centrum; die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines Ellipsoids, Hyperboloids oder Kegels enthalten, gehen also durch das Centrum der Fläche, und werden daher als Diametralebenen bezeichnet.

Jede Diametralebene halbirt eine bestimmte Schaar paralleler Sehnen; denn die Gleichung jeder Diametralebene kann in der Form geschrieben werden

1. $$T = a_1 f_x' + a_2 f_y' + a_3 f_z' = 0.$$

Sind α, β, γ die Richtungswinkel der von T halbirten Sehnen, so muss diese Gleichung mit No. 5, 1 gleichbedeutend sein; es muss also eine Zahl n geben, für welche

$$\cos\alpha = na_1, \quad \cos\beta = na_2, \quad \cos\gamma = na_3.$$

Quadrirt man und addirt, so erhält man

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = n^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Da nun $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so folgt $n = 1 : \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und daher

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Wenn der Diameter d der Fläche den Sehnen parallel ist, die von einer Diametralebene T halbirt werden, so heissen die Ebene T und der Diameter d einander conjugirt.

7. Wählt man das Centrum der Fläche zum Nullpunkte, so ist die Gleichung (No. 3)

1. $$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + K = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen f_x', f_y', f_z' sind

2. $$f_x' = Ax + By + Cz,\quad f_y' = Bx + Dy + Ez,\quad f_z' = Cx + Ey + Fz.$$

Sind α_1, β_1, γ_1 die Richtungswinkel eines Diameters d_1, der auf der Diametralebene T liegt, die dem Diameter d mit den Richtungswinkeln α, β, γ conjugirt ist, und ist P ein Punkt des Diameters d_1, r sein Abstand vom Centrum, so hat man

$$x = r\cos\alpha_1,\quad y = r\cos\beta_1,\quad z = r\cos\gamma_1.$$

Da P auf T liegt, so ist $T = 0$ erfüllt; setzt man nun diese Werthe in T ein, so haben alle Glieder den Faktor r; unterdrückt man denselben, so bleibt

3. $$(A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1)\cos\alpha + (B\cos\alpha_1 + D\cos\beta_1 + E\cos\gamma_1)\cos\beta + (C\cos\alpha_1 + E\cos\beta_1 + F\cos\gamma_1)\cos\gamma = 0.$$

Wenn also die Cosinus von sechs Winkeln α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 dieser Gleichung genügen, so liegt der Diameter, dessen Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1 sind, auf der Ebene, welche dem Diameter mit den Richtungswinkeln α, β, γ conjugirt ist.

Nimmt man die Glieder der Gleichung 3. zusammen, die in derselben Verticalreihe stehen, so erhält man

$$(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\alpha_1 + (B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\beta_1 + (C\cos\alpha + E\cos\beta + F\cos\gamma)\cos\gamma_1 = 0.$$

Dies ist dieselbe Gleichung wie 3., nur sind die Winkel α, β, γ gegen α_1, β_1, γ_1 vertauscht; mithin ergiebt sich: Ist der Diameter d_1 in der Ebene enthalten, die dem Diameter d conjugirt ist, so ist auch d in der Ebene enthalten, die d_1 conjugirt ist. — Die Ebenen, die allen in einer Diametralebene T liegenden Diametern conjugirt sind, bilden ein Büschel, dessen Träger der zu T conjugirte Diameter d ist.

8. Die Gleichung der Ebene T, deren Schnitt mit der Fläche

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + K = 0$$

sein Centrum in einem gegebenen Punkte Π hat, ist (No. 1, 3)

1. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z - (f_\xi' \cdot \xi + f_\eta' \cdot \eta + f_\zeta' \cdot \zeta) = 0.$$

Die jetzt geltenden Werthe von f_x' f_y', f_z' (No. 7, 2) erfüllen die Identität

2. $$f_x' \cdot x + f_y' \cdot y + f_z' \cdot z = f - K;$$

daher kann man in 1. das letzte Glied einfacher schreiben und erhält

3. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z - f(\xi, \eta, \zeta) + K = 0.$$

Multiplicirt man die Functionen

$$f_\xi' = A\xi + B\eta + C\zeta,\quad f_\eta' = B\xi + D\eta + E\zeta,\quad f_\zeta' = C\xi + E\eta + F\zeta,$$

der Reihe nach mit x, y, z und addirt, indem man die Glieder jeder Verticalreihe zusammennimmt, so erhält man die Identität

4. $$f_\xi' \cdot x + f_\eta' \cdot y + f_\zeta' \cdot z = f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta.$$

Hiernach erhält die Gleichung der Ebene T die Form

5. $$f_x' \cdot \xi + f_y' \cdot \eta + f_z' \cdot \zeta - f(\xi, \eta, \zeta) + K = 0.$$

Sind α, β, γ die Richtungswinkel des Diameters, der durch Π geht, und ist ρ der Abstand des Punktes Π vom Centrum, so kann man ξ, η, ζ durch $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$ ersetzen; nachdem man durch ρ dividirt hat, erhält man

$$\mathrm{T} = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma - \frac{1}{\rho}[f(\xi, \eta, \zeta) - K] = 0.$$

Diese Gleichung stimmt in den variabeln Gliedern mit der Gleichung der dem Diameter α, β, γ conjugirten Diametralebene

$$T = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma = 0$$

überein, und weicht nur durch das Vorhandensein eines constanten Gliedes ab, die Ebenen T und T sind daher parallel. Wir schliessen hieraus: Die Centra aller parallelen ebenen Schnitte einer centralen Fläche zweiter Ordnung liegen auf einem Diameter; dieser Diameter ist der zu dieser Schaar paralleler Ebenen gehörigen Diametralebene conjugirt.

9. Wir wenden uns nun zu entsprechenden Sätzen über die Flächen II. O., die kein im Endlichen liegendes, eindeutig bestimmtes Centrum haben, und zwar zunächst zu den Paraboloiden.

Die abgeleiteten Functionen f_x', f_y', f_z' der Function

$$f = Ax^2 + Dy^2 + 2Jz$$

sind $f_x' = Ax$, $f_y' = Dy$, $f_z' = J$. Die Ebene T, welche die Sehnen von der Richtung α, β, γ halbirt, hat daher die Gleichung

$$T = A\cos\alpha \cdot x + D\cos\beta \cdot y + J\cos\gamma = 0.$$

Alle Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines Paraboloids enthalten, sind daher der Achse des Paraboloids parallel.

Der elliptische und der hyperbolische Cylinder haben in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Verticalebenen mit den Symmetrieebenen zusammenfallen, Gleichungen von der Form

$$f = Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Jetzt ist $f_x' = Ax$, $f_y' = Dy$, $f_z' = 0$, daher ist

$$T = A\cos\alpha \cdot x + B\cos\beta \cdot y = 0.$$

Die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines elliptischen oder hyperbolischen Cylinders enthalten, gehen durch die Achse des Cylinders

Aus der Gleichung des parabolischen Cylinders

$$f = Ax^2 + 2Hy = 0$$

folgt $f_x' = Ax$, $f_y' = H$, $f_z' = 0$, Daher erhält man

$$T = A\cos\alpha \cdot x + H\cos\beta = 0.$$

Die Ebenen, welche die Mitten paralleler Sehnen eines parabolischen Cylinders enthalten, sind der Symmetrieebene des Cylinders parallel.

10. Für die Gleichung der Ebene, deren Schnitt mit der Fläche einen gegebenen Punkt Π zum Centrum hat, (No. 1, 3.) ergiebt sich

1. bei den Paraboloiden: $A\xi \cdot x + D\eta \cdot y + Jz - (A\xi^2 + D\eta^2 + J\zeta) = 0,$
2. beim ellipt. und hyperb. Cyl.: $A\xi \cdot x + D\eta \cdot y - (A\xi^2 + D\eta^2) = 0,$
3. beim parabol. Cylinder: $A\xi \cdot x + Hy - (A\xi^2 + H\eta) = 0.$

Sind α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene 1., so hat man

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = A\xi : D\eta : J,$$

woraus sich ergiebt

$$\xi = J\cos\alpha : A\cos y, \quad \eta = J\cos\beta : D\cos\gamma.$$

Die Coordinaten der Horizontprojection des Centrums eines ebenen Schnittes in einem Paraboloide sind also nur von der Stellung der Schnittebene abhängig. Hieraus folgt: Die Centra paralleler Schnitte eines Paraboloids liegen auf einer Geraden, die zur Achse des Paraboloids parallel ist.

Die Ebene 2. ist parallel der Cylinderachse und schneidet daher den Cylinder in zwei Mantellinien, die gleichweit von Π entfernt sind. Für einen Punkt, der auf der Achse des Cylinders liegt, ist $\xi = \eta = 0$, und hierfür wird die Gleichung 2. identisch erfüllt. Wir haben daher: Für alle ebenen Schnitte eines elliptischen oder parabolischen Cylinders, welche die Achse treffen, ist der Schnittpunkt mit der Achse das Centrum.

---

11. Die Ebene

1. $$T \equiv f_x' \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma = 0,$$

welche die der Richtung α, β, γ parallelen Sehnen der Fläche II. O. $f = 0$ halbirt, ist Symmetrieebene der Fläche, wenn sie rechtwinkelig zur Richtung der von ihr halbirten Sehnen ist. Jede Ebene, die zur Richtung α, β, γ rechtwinkelig ist, hat eine Gleichung von der Form

2. $$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0,$$

wobei d den Abstand der Ebene vom Nullpunkte bezeichnet; also muss die Gleichung 2. durch Multiplication mit einer Zahl μ mit 1. identisch werden, wenn T Symmetrieebene sein soll. Ordnet man T nach den Coordinaten, so entsteht:

$$T \equiv (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)x + (B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos)y$$
$$+ (C\cos\gamma + E\cos\beta + F\cos\gamma)z + G\cos\alpha + H\cos\beta + J\cos\gamma = 0.$$

Der Vergleich mit

$$\mu\cos\alpha \cdot x + \mu\cos\beta \cdot y + \mu\cos\gamma \cdot z - \mu d = 0$$

ergiebt die Gleichungen

3. $$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = \mu\cos\alpha,$$
4. $$B\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = \mu\cos\beta,$$
5. $$C\cos\alpha + E\cos\beta + F\cos\gamma = \mu\cos\gamma,$$
6. $$G\cos\alpha + H\cos\beta + J\cos\gamma = -\mu d.$$

Fügt man hierzu noch

7. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

so hat man fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten α, β, γ, μ, d. Um dieselben zu ermitteln, bemerken wir, dass die Gleichungen 3., 4., 5. und 7. nur α, β, γ, μ enthalten; sind diese gefunden, so erhält man aus 6. die letzte Unbekannte d. Den Gleichungen 3., 4., 5. kann man die Form geben:

8. $$\begin{aligned}(A - \mu)\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\beta &= 0,\\ B\cos\alpha + (D-\mu)\cos\beta + E\cos\gamma &= 0,\\ C\cos\alpha + E\cos\beta + (F-\mu)\cos\gamma &= 0;\end{aligned}$$

Ihr Verein erfordert das Verschwinden der Determinante

9. $$R \equiv \begin{vmatrix} A-\mu & B & C \\ B & D-\mu & E \\ C & E & F-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades für μ; hat man dieselbe aufgelöst, so setzt man eine Wurzel μ in die Gleichungen 8. ein. Berechnet man das

Verhältniss $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ aus je zweien der Gleichungen, so erhält man die in Folge der Gleichung 9. gleichbedeutenden Proportionen

10. $$\begin{aligned}\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= [(D-\mu)(F-\mu) - E^2] : [CE - B(F-\mu)] : [BE - C(D-\mu)],\\ &= [CE - B(F-\mu)] : [(A-\mu)(F-\mu) - C^2] : [CB - E(A-\mu)],\\ &= [BE - C(D-\mu)] : [CB - E(A-\mu)] : [(A-\mu)(D-\mu) - B^2].\end{aligned}$$

Haben die Zahlen L, M, N dasselbe Verhältniss, wie je drei zu derselben Zeile gehörige Subdeterminanten der Determinante R, so ist

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = L : M : N;$$

unter Rücksicht auf die Gleichungen 6. und 7. hat man alsdann die Lösungen des Problems

11. $$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

12. $$\cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad d = -\frac{1}{\mu}\frac{GL + HM + JN}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

12. Die Gleichung $R = 0$ liefert entwickelt

1. $$R \equiv (A-\mu)(D-\mu)(F-\mu) - E^2(A-\mu) - C^2(D-\mu) - B^2(F-\mu) + 2BCE = 0;$$

oder nach Potenzen von μ geordnet

2. $$R \equiv -\mu^3 + (A+D+F)\mu^2 - (DF + AF + AD - C^2 - B^2 - E^2)\mu + \Delta_1 = 0,$$

wenn man wieder mit Δ^1 die Determinante bezeichnet

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix}.$$

Die cubische Gleichung $R = 0$ hat mindestens eine reale Wurzel; diese ist von Null verschieden, wenn $\Delta_1 \gtrless 0$.

Unter der Voraussetzung $\Delta_1 \gtrless 0$ bezeichne μ_0 eine reale Wurzel von $R = 0$. Alsdann sind die Werthe No. 11, 11 und 12 real und d nicht unendlich gross; sie sind eindeutig bestimmt, ausser wenn für μ_0 alle neun auf der rechten Seite von No. 11, 10 stehende Subdeterminanten der Determinante R verschwinden. Wenn letzteres nicht der Fall ist, so entspricht der Wurzel μ_0 eine reale, nicht unendlich ferne Symmetrieebene. Nach den Entwicklungen des letzten Abschnitts gehört die Fläche $f = 0$ alsdann zu den dort aufgezählten Flächen; da $\Delta_1 \gtrless 0$, hat sie ein eindeutig bestimmtes Centrum, das nicht unendlich fern ist, sie ist daher ein Kegel oder ein Ellipsoid, oder ein Hyperboloid. Diese Flächen haben drei (oder, wenn sie Rotationsflächen sind unzählig viele) Symmetrieebenen; folglich sind in diesem Falle auch die andern Wurzeln der Gleichung $R = 0$ real.

13. Wenn $\Delta_1 \gtrless 0$ und für eine reale Wurzel μ_0 der Gleichung $R = 0$ alle Subdeterminanten von R verschwinden, so sind die Gleichungen No. 11, 8 gleichbedeutend, und mithin ihre Coefficienten der Reihe nach einander proportional,

1. $$(A - \mu_0) : B : C = B : (D - \mu_0) : E = C : E : (F - \mu_0).$$

Sind B, C, E von Null verschieden, so schliesst man hieraus

$$\mu_0 = A - \frac{BC}{E} = D - \frac{BE}{C} = F - \frac{CE}{B}.$$

Umgekehrt, wenn B, C, E von Null verschieden sind, und wenn

$$A - \frac{BC}{E} = D - \frac{BE}{C} = F - \frac{CE}{B},$$

und man nimmt den gemeinschaftlichen Werth dieser Differenzen für μ_0, so sind, wie man sofort erkennt, die Proportionen 1. erfüllt und μ_0 ist eine Wurzel von $R = 0$. Multiplicirt man in diesem Falle die Gleichungen No. 11, 8. der Reihe nach mit E, C, B und ersetzt $E(A - \mu_0)$, $C(D - \mu_0)$, $B(F - \mu_0)$ durch die aus 1. sich ergebenden Werthe BC, BE, CE, so gehen die drei Gleichungen über in

2. $$BC\cos\alpha + BE\cos\beta + CE\cos\gamma = 0.$$

Durch die Formeln

$$\cos\alpha_1 = \frac{BC}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{BE}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{CE}{\sqrt{B^2C^2 + B^2E^2 + C^2E^2}}$$

ist eine Richtung eindeutig bestimmt. Ersetzt man die Grössen BC, BE, CE in 2. durch die proportionalen Werthe $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, so entsteht

3. $$\cos\alpha_1 \cos\alpha + \cos\beta_1 \cos\beta + \cos\gamma_1 \cos\gamma = 0.$$

Hieraus folgt, dass alle der Wurzel μ_0 zugehörigen Symmetrieebenen der Richtung α_1, β_1, γ_1 parallel sind. Vergleicht man die Gleichung einer Symmetrieebene

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0$$

mit No. 11, 6.

$$\cos\alpha \cdot G + \cos\beta \cdot H + \cos\gamma \cdot J + \mu_0 d = 0,$$

so ist ersichtlich, dass alle diese Symmetrieebenen durch den Punkt P_0 gehen, für welchen

$$x_0 = -G:\mu_0, \quad y_0 = -H:\mu_0, \quad z_0 = -J:\mu_0.$$

Folglich sind alle Ebenen Symmetrieebenen, die den Punkt P_0 und die durch P_0 gehende Gerade q enthalten, die mit den Achsen die Winkel α_1, β_1, γ_1 bildet.

Durch dieses Verhalten ist die Fläche als Rotationsfläche, und q als Rotationsachse gekennzeichnet; da $\Delta_1 \gtrless 0$, so entsprechen den Voraussetzungen der Rotationskegel, das Rotationsellipsoid und die Rotationshyperboloide, wenn deren Rotationsachse mit keiner Coordinatenebene parallel ist, also $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ nicht verschwinden.

Wenn B verschwindet, so folgt aus No. 13, 1., dass entweder noch C oder E verschwindet. Ist $B = C = 0$, so folgt, dass auch $A - \mu_0 = 0$; daher ist

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta : \cos\gamma = (D - \mu_0) : E = E : (F - \mu_0).$$

Ersetzt man hier μ_0 durch A, so ergiebt sich die Bedingung

3. $$(D - A) : E = E : (F - A).$$

Wenn E nicht verschwindet, so kann A weder gleich D noch gleich F sein.

Umgekehrt: Wenn 3. erfüllt und $B = C = 0$ ist, während $E \gtrless 0$, so ist $\mu_0 = A$ eine Wurzel von $R = 0$; das System No. 11, 8. geht über in

4. $$(D - A)\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \quad E\cos\beta + (F - A)\cos\gamma = 0,$$

und diese beiden Gleichungen fallen infolge 3. zusammen. Aus 4. folgt, dass alle Ebenen Symmetrieebenen sind, die der durch

$$\cos\alpha_1 = 0, \quad \cos\beta_1 = \frac{D - A}{\sqrt{(D - A)^2 + E^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{E}{\sqrt{(D - A)^2 + E^2}}$$

bestimmten Richtung parallel sind und P_0 enthalten.

Wir kommen daher wieder auf den vorigen Fall, nur dass die Rotationsachse normal zur X-Achse ist.

Breslau. Eduard Trewendts Buchdruckerei (Setzerinnenschule).